Бирациональные типы алгебраических орбифолдов

Эндрю Креш[*], Юрий Чинкель[†]

1 ноября 2020

Аннотация

Строится вариант группы бирациональных символов Концевича, Пестуна и второго автора. Он применяется к определению бирациональных инвариантов алгебраических орбифолдов.

1 Введение

Рассмотрим гладкое проективное многообразие X размерности n над полем k характеристики 0; наши многообразия неприводимы, но не обязательно геометрически неприводимы. Статья [14] ввела *группу Бернсайда* многообразий

$$\mathrm{Burn}_n = \mathrm{Burn}_{n,k},$$

как свободную абелеву группу классов изоморфизмов конечно порожденных полей степени трансцендентности n над k; для такого поля K мы обозначим через $[K]$ соответствующий образующий. По многообразию X определяется его класс

$$[X] := [k(X)] \in \mathrm{Burn}_n,$$

[*]Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Switzerland, andrew.kresch@math.uzh.ch

[†]Courant Institute, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA, Simons Foundation, 160 Fifth Av., New York, NY 10010, USA, tschinkel@cims.nyu.edu

продолженный по аддитивности до гладких проективных схем, которые необязательно неприводимы. Для

$$U = X \setminus D,$$

дополнение к дивизору с простыми нормальными пересечениями

$$D = D_1 \cup \cdots \cup D_\ell,$$

можно определить его класс в Burn_n:

$$[U] := [X] - \sum_{1\le i\le \ell} [D_i \times \mathbb{P}^1] + \sum_{1\le i<j\le \ell} [(D_i \cap D_j) \times \mathbb{P}^2] - \dots . \tag{1.1}$$

Это не только инвариант класса изоморфизма U, но и бирациональный инвариант в следующем смысле: $[U] = [U']$ в Burn_n если существуют квазипроективное многообразие V и бирациональные проективные морфизмы

$$V \to U \qquad \text{и} \qquad V \to U'.$$

Этот формализм использовался для доказательства специализации рациональности.

Предположим, что на X имеется точное действие конечной абелевой группы G. В этой ситуации определен G-эквивариантный бирациональный инвариант X, введенный в [13], принимающий значения в группе

$$\mathcal{B}_n(G),$$

который записывает представление на нормальном расслоение в общей точке компонент множества неподвижных точек X^G.

В этой статье мы исследуем бирациональные инварианты *орбифолдов*. Напомним, что (алгебраический) орбифолд, это гладкий отделимый неприводимый стек Деліня–Мамфорда, конечного типа над k, с тривиальным общим стабилизатором. У такого стека есть грубое пространство модулей, [11], которое отделимо и конечного типа над k. Назовем орбифолд *квазипроективным* (или *проективным*) если грубое пространство модулей квазипроективное (или проективное) многообразие (см. [15]). Например, действие G на X определяет проективный орбифолд $[X/G]$. В этой статье все орбифолды квазипроективны.

Мы введем группу

$$\overline{\mathrm{Burn}}_n,$$

которая совмещает свойства групп Burn_n и $\mathcal{B}_n(G)$. В $\overline{\mathrm{Burn}}_n$ мы сохраняем только информацию о представлениях конечных абелевых групп, с точностью до автоморфизмов этих групп. Работая с $\overline{\mathrm{Burn}}_n$, мы построим бирациональный инвариант квазипроективных n-мерных орбифолдов.

Достаточно рассматривать конечные *абелевы* группы, благодаря дивизориалификации [6]. Это последовательность раздутий с гладкими центрами, применив которую к общему орбифолду можно получить орбифолд с только абелевыми группами как геометрическими стабилизаторами. Слабая факторизация [2], доказанная в функториальной форме в [3], используется для доказательства желаемой бирациональной инвариантности.

В § 2 мы определяем группу Бернсайда многообразий соотношениями, аналогичными соотношениям ножниц, используемым в определении группы Гротендика многообразий. В § 3 мы определяем группу $\overline{\mathrm{Burn}}_n$. В § 4 мы определяем класс алгебраического орбифолда в $\overline{\mathrm{Burn}}_n$. В § 5 содержится связь между инвариантами орбифолдов и модулярными кривыми.

Исследование Э. Креша выполнено при частичной поддержке Swiss National Science Foundation – SNSF (грант 184613). Исследование Ю. Чинкеля выполнено при частичной поддержке National Science Foundation – NSF (грант 2000099).

2 Группа Бернсайда и соотношения ножниц

Пусть k – поле характеристики 0. К группе Гротендика

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$$

два подхода, как к абелевой группе, порожденной классами алгебраических многообразий над k с классическими соотношениями ножниц (здесь не имеет значения, если мы ограничимся только квазипроективными многообразиями), или через задание Биттнер [8], в котором участвуют только гладкие проективные многообразия. Мы не рассматриваем дополнительную структуру кольца на $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$.

В этой главе, мы зафиксируем наблюдение, что группа Бернсайда Burn_n также допускает задание соотношениями ножниц. Как отмечено в введении, мы только требуем, чтобы многообразия были неприводимы (а не геометрически неприводимы).

Лемма 2.1. *Пусть k – поле характеристики 0, и W – гладкое квазипроективное многообразие над k. Для любого непустого открытого $U \subset W$ существуют дивизоры $D_1, \ldots, D_\ell$ такие, что $W \smallsetminus D_1$ содержится в U, и $D_1 \smallsetminus D_2, \ldots, D_{\ell-1} \smallsetminus D_\ell$, D_ℓ все гладки.*

Доказательство. Пусть $Z = W \smallsetminus U$. Из [12, Thm. 7] следует, что при данном вложении W в проективное пространство, общая гиперповерхность достаточно высокой степени, содержащая Z определяет дивизор D_1 на W, особенности которого D_1^{sing} содержатся в Z и который не содержит неприводимых компонент Z. Если D_1 гладкий, мы закончили, с $\ell = 1$. Иначе, мы имеем $\dim(D_1^{\mathrm{sing}}) < \dim(Z)$, и мы заключаем индукцией по размерности $\dim(Z)$. □

Предложение 2.2. *Пусть k – поле характеристики 0 и n – натуральное число. Сопоставление $[k(X)]$ к $[X]$, для гладких проективных многообразий X размерности n над k определяет изоморфизм*

$$\mathrm{Burn}_n \xrightarrow{\sim} \Big(\bigoplus_{[U],\, \dim(U)=n} \mathbb{Z} \cdot [U] \Big) \Big/ \textit{модифицированные ножницы},$$

где, справа, мы имеем фактор свободной абелевой группы на классах изоморфизмов гладких квазипроективных многообразий размерности n над k по модифицированным соотношением ножниц

$$[U] = [V \times \mathbb{P}^{n-d}] + [U \smallsetminus V],$$

для гладких замкнутых подмногообразий $V \subset U$ размерности $d < n$. Обратный изоморфизм задан формулой (1.1).

Доказательство. Мы проверим, что отображение утверждения корректно определено, то есть, что классы любой пары бирационально эквивалентных гладких проективных n-мерных многообразий равны по модулю модифицированных соотношений ножниц.

Благодаря слабой факторизации, достаточно рассмотреть случай X и $B\ell_Y X$, где X гладкое и проективное размерности n и Y гладкое подмногообразие X размерности $d < n$.

Из модифицированных соотношений ножниц мы видим, что

$$\begin{aligned}
[X] &= [Y \times \mathbb{P}^{n-d}] + [X \smallsetminus Y], \\
[B\ell_Y X] &= [\mathbb{P}(N_{Y/X}) \times \mathbb{P}^1] + [X \smallsetminus Y],
\end{aligned}$$

где $N_{Y/X}$ обозначает нормальное расслоение. Достаточно показать, что $[\mathbb{P}(N_{Y/X}) \times \mathbb{P}^1] = [Y \times \mathbb{P}^{n-d}]$. Мы покажем, в большей общности, что для любого гладкого квазипроективного W размерности $e < n$ и векторного расслоения F на W ранга $r \leq n+1-e$, мы имеем

$$[\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}^{n+1-e-r}] = [W \times \mathbb{P}^{n-e}]. \tag{2.1}$$

Для любого гладкого квазипроективного многообразия Z размерности $n-1$ мы имеем $[Z \times \mathbb{A}^1] = 0$ (рассматривая $Z \times \{\infty\} \subset Z \times \mathbb{P}^1$), итак

$$[W \times \mathbb{P}^{n-e}] = [W \times (\mathbb{P}^1)^{n-e}]$$

(рассматривая $W \times \mathbb{P}^{n-e-1} \subset W \times \mathbb{P}^{n-e}$). Мы докажем (2.1) по индукции на e; случай $e = 0$ очевиден. Пусть $U \subset W$ – непустое открытое подмножество, на котором F тривиально, и $D_1, \ldots, D_\ell$ – дивизоры как в лемме 2.1.

Модифицированные соотношения ножниц и предположение индукции дают

$$\begin{aligned}
[\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}^{n+1-e-r}] = [D_\ell \times \mathbb{P}^{n+1-e}] + [(D_{\ell-1} \smallsetminus D_\ell) \times \mathbb{P}^{n+1-e}] \\
+ \cdots + [(D_1 \smallsetminus (D_2 \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n+1-e}] \\
+ [(W \smallsetminus (D_1 \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n-e}].
\end{aligned}$$

Мы заключаем соотношениями, для $1 \leq i \leq \ell$:

$$\begin{aligned}
[(W \smallsetminus (D_{i+1} \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n-e}] = [(D_i \smallsetminus (D_{i+1} \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n+1-e}] \\
+ [(W \smallsetminus (D_i \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n-e}].
\end{aligned}$$

Переходим к проверке, что обратное отображение в формуле (1.1) корректно определено, то есть, сохраняет модифицированные соотношения ножниц. Пусть V – гладкое замкнутое подмногообразие U

размерности d. Тогда U может быть представлено как дополнение, в гладком проективном многообразии X, к дивизору с простыми нормальными пересечениями $D_1 \cup \dots \cup D_\ell$, с которым гладкое подмногообразие $Y \subset X$ имеет нормальное пересечение, так что $Y \cap U = V$. Имеется $[U]$ по формуле (1.1). Для $[V \times \mathbb{P}^{n-d}]$ имеется вложение в $Y \times \mathbb{P}^{n-d}$, дополнение к дивизору с простыми нормальными пересечениями

$$(D_1 \cap Y) \times \mathbb{P}^{n-d} \cup \dots \cup (D_\ell \cap Y) \times \mathbb{P}^{n-d},$$

и значит, аналогичная формула в Burn_n. Раздутие $B\ell_Y X$ имеет дивизор с простыми нормальными пересечениями $\widetilde{D}_1 \cup \dots \cup \widetilde{D}_\ell \cup E$, где $\widetilde{D}_i$ обозначает собственный прообраз D_i, и E, исключительный дивизор, что дает формулу для $[U \smallsetminus V]$ в Burn_n. Сравнивая формулы и пользуясь тем, что каждое пересечение без участия E бирационально пересечению в X, тогда как каждое пересечение с участием E бирационально произведению пересечения в Y с проективным пространством правильной размерности, мы получаем искомое соотношение.

Ясно, что композиция двух отображений $\mathrm{Burn}_n \to \mathrm{Burn}_n$ является тождественной. Композиция в другом порядке тоже тождественна, что видно из модифицированных соотношений ножниц. $\square$

3 Группа Бернсайда стеков

В этой главе мы введем группу $\overline{\mathrm{Burn}}_n$.

Определение 3.1. Определим $\mathbb{Z}[t]$-модуль $\overline{\mathcal{B}}$ как фактор свободного $\mathbb{Z}$-модуля на парах (A, S) из свободных абелевых групп A и конечной системы образующих S группы A, где действие t прибавляет элемент 0 к S, по следующим соотношениям:

- (A, S) и (A, S') эквивалентны, если S' перестановка S.
- (A, S) и (A', S') эквивалентны, если некоторый изоморфизм $A \cong A'$ переводит S в S'.
- для всех $2 \le j \le m$, (A, S), $S = (a_1, \dots, a_m)$, эквивалентна
$$\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,j\}} (-t)^{|I|-1} \Big(A/\langle a_i - a_{i_0} \rangle_{i \in I},$$
$$(\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_1 - \bar{a}_{i_0}, \dots \text{(опуская все } i \in I) \dots, \bar{a}_j - \bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{j+1}, \dots, \bar{a}_m) \Big),$$

где, внутри суммы, i_0 означает элемент из I, с последовательностью элементов из $A/\langle a_i - a_{i_0}\rangle_{i\in I}$, длины $1+(j-|I|)+(m-j)$, независимой от выбора i_0.

Пример 3.2. Для $m = j = 2$, мы получаем, что пара $(A,(a_1,a_2))$ эквивалентна

$$(A,(a_1,a_2-a_1)) + (A,(a_2,a_1-a_2)) - t(A/\langle a_1-a_2\rangle,(\bar{a}_1)).$$

Пусть $[A,S]$ обозначает класс пары (A,S) в $\mathcal{B}$. Определим градуировку на $\overline{\mathcal{B}}$, полагая, что $[A,S]$ имеет степень $|S|$:

$$\overline{\mathcal{B}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{B}}_n.$$

С этой градуировкой, $\overline{\mathcal{B}}$ является градуированным $\mathbb{Z}[t]$-модулем, с естественной градуировкой на $\mathbb{Z}[t]$.

Представления определяют, через их веса, элементы в $\overline{\mathcal{B}}$. Если G конечная диагонализируемая групповая схема с точным представлением

$$\rho\colon G \to GL_n$$

(над произвольным полем), то существует пара, (A,S), где A двойственная по Картье к G группа и S последовательность весов в разложении ρ в суммы n одномерных линейных представлений. Элемент

$$[\rho] := [A,S] \in \overline{\mathcal{B}}_n$$

канонически определен через ρ.

Ограничивая на группы e-кручения A, для положительного целого e, или на p-примарные A, для простых p, получаем $\mathbb{Z}[t]$-модуль $\overline{\mathcal{B}}^{[e]}$, соответственно $\overline{\mathcal{B}}^{(p)}$. Очевидные гомоморфизмы из этих модулей в $\overline{\mathcal{B}}$ являются расщепленными мономорфизмами, с расщеплением, заданным

$$[A,S] \to [A/eA,S], \qquad \text{соответственно}, \qquad [A,S] \to [A(p),S],$$

где $A(p)$ обозначает p-примарную подгруппу A. Мы получаем

$$\overline{\mathcal{B}} = \bigoplus_{p} \overline{\mathcal{B}}^{(p)}, \qquad \overline{\mathcal{B}}^{(p)} = \varinjlim_{j} \overline{\mathcal{B}}^{[p^j]}.$$

Определение 3.3. Пусть k – поле характеристики 0 и n – натуральное число. Группа

$$\overline{\mathrm{Burn}}_n$$

есть абелева группа, порожденная парами (K, α), где

- K конечно порожденное поле степени трансцендентности $d \leq n$ над k и
- $\alpha \in \overline{\mathcal{B}}_{n-d}$,

по модулю отождествления $(K(t), \beta)$ и $(K, t\beta)$, для $\beta \in \overline{\mathcal{B}}_{n-d-1}$.

Пример 3.4. Для $\overline{\mathcal{B}}_2^{[5]}$ мы имеем образующие $t^2[0,()]$, $t[C_5,(1)]$, $[C_5,(1,1)]$, $[C_5,(1,2)]$, $[C_5,(1,4)]$, $[C_5 \oplus C_5,((1,0),(0,1))]$, и соотношения:

$$\begin{aligned} t[C_5,(1)] &= [C_5,(1,4)] + t[C_5,(1)] - t^2[0,()], \\ [C_5,(1,1)] &= 2t[C_5,(1)] - t[C_5,(1)], \\ [C_5,(1,2)] &= [C_5,(1,1)] + [C_5,(1,2)] - t^2[0,()], \\ [C_5,(1,4)] &= 2[C_5,(1,2)] - t^2[0,()], \\ [C_5 \oplus C_5,((1,0),(0,1))] &= 2[C_5 \oplus C_5,((1,0),(0,1))] - t[C_5,(1)], \end{aligned}$$

где $C_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Мы получаем

$$[C_5 \oplus C_5,((1,0),(0,1))] = [C_5,(1,1)] = [C_5,(1,4)] = t[C_5,(1)] = t^2[0,()],$$

где

$$2\big([C_5,(1,2)] - t^2[0,()]\big) = 0.$$

Следовательно, $\overline{\mathcal{B}}_2^{[5]} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4 Бирациональные инварианты орбифолдов

В этой главе мы введем бирациональные инварианты n-мерных орбифолдов над полем k характеристики 0, со значениями в $\overline{\mathrm{Burn}}_n$.

Пусть $\mathcal{X}$ – орбифолд. Напомним из [5] (см. также [6]): если $D_1 \cup \cdots \cup D_\ell$ дивизор с простыми нормальными пересечениями на $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ называется *дивизориальным* относительно $D_1, \ldots, D_\ell$ если морфизм

$$\mathcal{X} \to B\mathbb{G}_m^\ell,$$

определенный $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_i)$, для $i = 1, \dots, \ell$, является представимым; из этого следует, что стабилизаторные групповые схемы $\mathcal{X}$ диагонализируемы. Мы будем пользоваться этой терминологией применительно к произвольному конечному набору линейных расслоений.

Дивизориалификация - это процедура, применяемая к орбифолду $\mathcal{X}$, которая дает последоваетельность раздутий вдоль гладких центров

$$\mathcal{Y} \to \cdots \to \mathcal{X},$$

такую, что $\mathcal{Y}$ дивизориальный относительно подходящего дивизора с простыми нормальными пересечениями. Это дано Algorithm C в [5], где первоначально требуются абелевы геометрические стабилизаторы, однако потом это условие убирается [6].

Как было объяснено в введении, инвариантность при бирациональных проективных морфизмах является утверждением об инвариантности относительно отношения эквивалентности существования третьего объекта (многообразие или стек Делиня–Мамфорда) с бирациональными проективными морфизмами к данным двум объектам. В этой главе мы интересуемся квазипроективными орбифолдами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$, и отношение эквивалентности принимает форму существования стека Делиня–Мамфорда $\mathcal{Y}$ с бирациональными проективными морфизмами

$$\mathcal{Y} \to \mathcal{X} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{Y} \to \mathcal{X}'. \tag{4.1}$$

Напомним, что морфизм стеков проективен, если он факторизуется, с точностью до 2-изоморфизма, как последовательность замкнутого вложения и проекции из проективного расслоения $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, для некоторого квази-когерентного пучка конечного типа $\mathcal{E}$, в частности, проективные морфизмы всегда представимы.

В ситуации (4.1) нет потери общности предполагая, что $\mathcal{Y}$ тоже орбифолд, так как разрешение особенностей в функториальной форме как в [20] и [7] приложимо к стекам.

Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ квазипроективные орбифолды, то морфизм $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ проективен тогда и только тогда, когда он представимый и собственный. (Каждый проективный морфизм является представимым и собственным. Обратное следует из того, что $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ факторизуется, с точностью до 2-изоморфизма, через $\mathcal{X} \times_X Y$, где X и Y обозначают соответствующие грубые пространства модулей, таким образом, что $\mathcal{X} \to X$ и $\mathcal{Y} \to Y$ индуцируют биекции на геометрических точках; представимый собственный морфизм индуцирующий биекцию на геометрических точках является конечным, а значит, проективным.)

Теорема 4.1. *Пусть k – поле характеристики 0, n – натуральное число, и $\mathcal{X}$ – n-мерное квазипроективное многообразие над k. Следующее предписание, отображающие $\mathcal{X}$ на класс $[\mathcal{X}] \in \overline{\mathrm{Burn}}_n$ дает инвариант относительно бирациональных проективных морфизмов:*

- *С помощью дивизориалификации, заменим $\mathcal{X}$ на квазипроективный орбифолд $\mathcal{Y}$, дивизориальный относительно конечного набора линейных расслоений.*
- *Стратифицируем $\mathcal{Y}$ по типу изоморфизма геометрических стабилизаторов и запишем для каждой компоненты соответствующее нормальное расслоение:*

$$\mathcal{Y} = \coprod_G \mathcal{Y}_G, \qquad N_{Y,G} = N_{\mathcal{Y}_G/\mathcal{Y}}.$$

- *Запишем грубое пространство модулей $\mathcal{Y}_G$, для каждой G, как Y_G, и определим элемент*

$$[\mathcal{X}] := \sum_G ([Y_G], [N_{Y,G}]) \in \overline{\mathrm{Burn}}_n.$$

В последнем шаге, если Y_G неприводимо размерности d, то $[Y_G]$ это ассоциированный элемент Burn_d, а $[N_{Y,G}] \in \overline{\mathcal{B}}_{n-d}$ класс, ассоциированный с представлением G в геометрической общей точке $\mathcal{Y}_G$. В общем случае, мы понимаем $([Y_G], [N_{Y,G}])$ как сумму элементов $\overline{\mathrm{Burn}}_n$ относящихся к неприводимым компонентам.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}'$ – квазипроективный орбифолд с бирациональным проективным морфизмом на $\mathcal{X}$. Дивизориализуем $\mathcal{X}'$ и получим $\mathcal{Y}'$. Диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{Y}' \\ & & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

можно дополнить до 2-коммутативного квадрата бирациональных проективных морфизмов квазипроективных орбифолдов, разрешая особенности замыкания в послойном произведении непустого открытого подстека где морфизмы являются изоморфизмами. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что для бирационального проективного морфизма квазипроективных орбифолдов $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ имеет место

$$\sum_G ([Y_G], [N_{Y,G}]) = \sum_G ([Z_G], [N_{Z,G}]) \in \overline{\mathrm{Burn}}_n. \tag{4.2}$$

Пусть $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_\ell$ – линейные расслоения, относительно которых $\mathcal{Y}$ дивизориален. Функториальная форма слабой факторизации в [3] применима к стекам и дает факторизацию $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ как композицию отображений *дивизориальных проективных орбифолдов* (относительно прообразов $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_\ell$), где каждое отображение, или его обратное, является раздутием с гладким центром.

Пусть $\mathcal{V}$ – гладкий замкнутый подстек $\mathcal{Y}$ размерности $< n$, с грубым пространством модулей V, и пусть $\mathcal{Z} = B\ell_{\mathcal{V}}\mathcal{Y}$. Проверим (4.2) в этом случае. Слева, мы разобьем $\mathcal{Y}_G$ на объединение компонент $\mathcal{Y}'_G$, не пересекающихся с $\mathcal{V}$, и компонент $\mathcal{Y}''$, нетривиально пересекающих $\mathcal{V}$, и применим модифицированные соотношения ножниц к $\mathcal{Y}''_G$:

$$\begin{aligned}\sum_G ([Y_G], [N_{Y,G}]) &= \sum_G ([Y'_G], [N_{Y,G}]) \\ &+ \sum_G ([Y''_G \cap V], t^{\dim(\mathcal{Y}''_G) - \dim(\mathcal{Y}''_G \cap \mathcal{V})}[N_{Y,G}]) + \sum_G ([Y''_G \setminus V], [N_{Y,G}]),\end{aligned}$$

где во второй сумме справа, размерности взяты по компонентам. Разбивая сумму справа от (4.2) аналогичным способом, мы получаем выражение с одинаковыми первыми и третьими суммами, и со второй суммой, которая отличается от второй суммы в выражении выше на соотношение в $\overline{\mathcal{B}}$. □

Замечание 4.2. Над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, рассматривая орбиповерхности, у которых нетривиальные стабилизаторы имеют порядок 5, мы видим, что четность числа изолированных особых точек с C_5-стабилизатором и разными весами, сумма которых отлична от нуля, не меняется при раздутиях точек.

Это замечание имеет свое отражение в 2-кручении в $\overline{\mathcal{B}}_2^{[5]}$, как видно из примера 3.4 и бирациональной инвариантности в теореме 4.1. В этом контексте мы отметим [5, Exa. 4.3], а именно, наблюдение, что такая точка с C_5-стабилизатором не исчезнет при раздутиях.

Пример 4.3. Функториальная дестекификация [5] орбифолда дает последовательность раздутий с гладкими центрами и операций корневых стеков вдоль гладких дивизоров, которые упрощают структуру стека. Операция корневого стека добавляет стабилизатор μ_n (для положительного целого n) вдоль дивизора [10, §2], [1, App. B], и результатом дестекификации является орбифолд, который получается из гладкого многообразия последовательностью операций корневых стеков вдоль компонент дивизора с простыми нормальными пересечениями. Одних раздутий не хватает, чтобы привести общий орбифолд в эту форму, как отмечено в замечании 4.2. Соответственно, мы можем рассматривать группу $\overline{\mathcal{B}}/\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ обозначает подмодуль порожденный классами пар

$$(C_{a_1} \oplus \cdots \oplus C_{a_r}, (g_1, \ldots, g_r))$$

прямых сумм конечных циклических групп ($r \geq 0$ произвольно) и наборов образующих, как препятствие к дестекификации одними раздутиями.

Имеем

$$\overline{\mathcal{B}}^{[p]} \subset \mathcal{C} \qquad \text{для} \qquad p \in \{2, 3\},$$

так как для дестекификации в этих случаях достаточно раздутий [16], [19].

Таблица 1 показывает классы изоморфизма $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$ для некоторых простых $p \geq 5$. Следующий результат подтверждает очевидную закономерность.

Предложение 4.4. *Для простого $p \geq 5$ пусть*

$$g = g(X_0(p))$$

обозначает род модулярной кривой, то есть,

$$g = \begin{cases} \left[\frac{p}{12}\right] \mp 1, & \text{когда } p \equiv \pm 1 \bmod 12, \\ \left[\frac{p}{12}\right], & \text{иначе.} \end{cases}$$

p	$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$	p	$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$	p	$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$
5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	17	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	31	$\mathbb{Z}^2$
7	0	19	$\mathbb{Z}$	37	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^2$
11	$\mathbb{Z}$	23	$\mathbb{Z}^2$	41	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^3$
13	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	29	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^2$	43	$\mathbb{Z}^3$

Таблица 1: Тип изоморфизма $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$

Тогда

$$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^g, & \text{\textit{если} } p\equiv 1 \bmod 4,\\ \mathbb{Z}^g, & \text{\textit{если} } p\equiv 3 \bmod 4.\end{cases}$$

Доказательство предложения 4.4, основывающееся на вычислениях с символами Манина [17], дано в следующей главе.

Запись 0 в таблице 1 для $p=7$ означает, что $\overline{\mathcal{B}}_2^{[7]}\subset\mathcal{C}$. На самом деле, мы имеем также $\overline{\mathcal{B}}_3^{[7]}\subset\mathcal{C}$. Однако оказывается, что

$$\overline{\mathcal{B}}_4^{[7]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_4^{[7]})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

5 Модулярные символы и доказательство предложения 4.4

Эквивариантная группа Бернсайда, введенная в [13], связана с модулярными кривыми $X_1(N)$, для разных N. В этой главе похожую роль играют модулярные кривые

$$X_0(p)=\Gamma_0(p)\backslash\mathbb{H}\cup\{0,\infty\}$$

и соответствующие модулярные символы [17]; установленная нами связь между 2-мерной бирациональной геометрией и модулярными кривыми остается загадочной для нас.

Для простых $p\geq 5$, мы интересуемся абелевой группой

$$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$$

с образующими

$$[C_p,(1,a)], \qquad 2 \le a \le p-2,$$

и соотношениями

$$\begin{aligned}
[C_p,(1,a)] &= [C_p,(1,a^{-1})] \qquad \text{для всех } a, && (5.1)\\
2[C_p,(1,2)] &= 0, && (5.2)\\
[C_p,(1,2)] &= -[C_p,(1,p-2)], && (5.3)\\
[C_p,(1,a)] &= [C_p,(1,a-1)] + [C_p,(1,a^{-1}-1)] && (5.4)\\
&\qquad \text{для } a \in \left\{3,\dots,\tfrac{p-1}{2}\right\} \cup \left\{\tfrac{p+3}{2},\dots,p-2\right\},
\end{aligned}$$

где a^{-1} означает положительное целое меньше, чем p, обратное к a mod p. (Имеем $[C_p,(1,1)] = t[C_p,(1)] \in \mathcal{C}$ и $[C_p,(1,p-1)] = t^2[0,()] \in \mathcal{C}$.)

Модулярная группа

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod p \right\}$$

имеет индекс $p+1$ в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, с представителями правых смежных классов

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Gamma_0(p)$ действует стандартным способом на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, а также на $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$, с двумя орбитами соответствующими каспам $0, \infty \in X_0(p)$. Здесь, 0 относится к множеству всех $b/d \in \mathbb{Q}$ с $p \nmid d$, а ∞ к множеству $a/c \in \mathbb{Q}$ с $p \mid c$. Действительная структура на $X_0(p)$ определяется стандартным комплексным сопряжением $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\bar{z}$. Хорошо известно, что множество действительных точек $X_0(p)$ связно.

Применяя символы Манина [17] к $\Gamma_0(p)$, мы получаем задание $H_1(X_0(p),\mathbb{Z})$ образующими и соотношениями. Предложение 4.4 следует из доказательства, что эти соотношение, вместе с дополнительными соотношениями, отражающими, что сумма любого цикла с его комплексно сопряженным равна нулю, совпадают с видом (5.1)–(5.4). На самом деле, мы используем более простые соотношения, которые дают гомологии не римановой поверхности $X_0(p)$, а соответствующего *орбифолда* со стабилизаторами в эллиптических точках. Фактор

$\mathbb{H}$ по $\Gamma_0(p)/\{\pm 1\}$ – это орбифолд, который компактифицируется дополнением каспов до

$$X_0(p)_{\mathrm{orb}}.$$

Орбифолды и их топологические инварианты объяснены, например, в [18], а удобная ссылка на орбикривые – это [4]. Заметим, что $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$ также можно задать напрямую как гомологии дополнения к эллиптическим точкам, по модулю соотношения, что подходящее кратное маленькой петли вокруг эллиптической точки зануляется.

Если $p \equiv 1 \bmod 4$, то существует пара комплексно сопряженных эллиптических точек в $X_0(p)_{\mathrm{orb}}$, где стабилизатор (представляющей точки в $\mathbb{H}$) имеет порядок 2 в $\Gamma_0(p)/\{\pm 1\}$; для каждой из них, дважды маленькая петля полагается равной нулю в гомологиях. Если $p \equiv 1 \bmod 3$, то есть комплексно сопряженная пара эллиптических точек где стабилизатор имеет порядок 3 в $\Gamma_0(p)/\{\pm 1\}$, для таких мы полагаем трижды маленькая петля равна нулю в гомологиях.

Соберем нужные нам результаты из [17], с модификациями в рамках теории орбифолдов. Мы сохраняем обозначения (5.1)–(5.4) относительно a и a^{-1}, и для $a \notin \{p-2, (p-1)/2\}$ определим положительные целые a' и a'' меньше, чем p, через условия

$$a' \equiv -a^{-1} - 1 \bmod p, \qquad a'' \equiv -(a+1)^{-1} \bmod p.$$

Лемма 5.1 ([17, (1.4)]). *Сюрьективный гомоморфизм*

$$\Gamma_0(p) \to H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$$

определен сопоставлением $\gamma \in \Gamma_0(p)$ образа

$$\{0, \gamma \cdot 0\}$$

в $X_0(p)$ геодезической в $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q}$ из 0 в $\gamma \cdot 0$. Ядро порождено коммутатором $\Gamma_0(p)$ и параболическими элементами $\Gamma_0(p)$.

Лемма 5.2 ([17, (1.5)–(1.9)]). *Абелева группа $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$ допускает задание образующими*

$$\Big\{0, \frac{1}{a}\Big\}, \qquad 2 \le a \le p-2,$$

и соотношениями

$$\{0, \frac{1}{a}\} + \{0, \frac{1}{p - a^{-1}}\} = 0, \tag{5.5}$$

$$\{0, \frac{1}{a}\} + \{0, \frac{1}{a'}\} + \{0, \frac{1}{a''}\} = 0, \tag{5.6}$$

$$\{0, \frac{1}{(p-1)/2}\} + \{0, \frac{1}{p-2}\} = 0. \tag{5.7}$$

Доказательство предложения 4.4 использует алгебраический результат вместе с топологическим рассуждением.

Лемма 5.3. *Изоморфизм*

$$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}) \to$$
$$H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z}) \Big/ \Big\langle \{0, \frac{1}{a}\} + \{0, \frac{1}{p-a}\},\ a \in \{2, \ldots, p-2\} \Big\rangle$$

задается $[C_p, (1, a)] \mapsto \{0, 1/a\}$, *для всех* a.

Доказательство. Предположим, что $2 \leq b \leq (p-3)/2$. Вычтем соотношения (5.4), соответствующие $a = b+1$ и $a = p-b$, и заметим, что правые члены сократятся, благодаря (5.1). Получим

$$[C_p, (1, b+1)] - [C_p, (1, p-b)] = [C_p, (1, b)] - [C_p, (1, p-b-1)].$$

Начиная с (5.3), мы получим, по индукции,

$$[C_p, (1, a)] = -[C_p, (1, p-a)], \tag{5.8}$$

для всех a. Используя (5.8) и (5.1), мы перепишем (5.4) в форме

$$[C_p, (1, a)] + [C_p, (1, a')] + [C_p, (1, a'')] = 0, \tag{5.9}$$

для $a \notin \{(p-1)/2, p-2\}$.

Мы завершаем доказательство, сравнивая соотношения (5.1)–(5.2), (5.8)–(5.9) с (5.5)–(5.7) и с дополнительными соотношениями от фактор-группы в утверждении леммы. □

В то время, как группа $H_1(X_0(p),\mathbb{Z})$ свободна ранга $2g$ (где g это род кривой $X_0(p)$), мы имеем кручение в $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z})$:

$$H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{2g}, & \text{если } p\equiv 1 \bmod 12,\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{2g}, & \text{если } p\equiv 5 \bmod 12,\\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{2g}, & \text{если } p\equiv 7 \bmod 12,\\ \mathbb{Z}^{2g}, & \text{если } p\equiv 11 \bmod 12. \end{cases}$$

Комплексное сопряжение действует на $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z})$:

$$\{0,\frac{1}{a}\}\mapsto\{0,\frac{1}{p-a}\}.$$

Лемма 5.3 отождествляет $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$ с фактором $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z})$ по элементам вида суммы цикла и его сопряженного.

Комплексное сопряжение действует тривиально на $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$. Для $p\equiv 1 \bmod 4$, число пересечения mod 2 с кривой, инвариантной под сопряжением, и соединяющей эллиптические точки порядка 2 разделяет $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z})[2]$ эквивариантно как прямое слагаемое $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z})$. Теперь $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$ есть прямая сумма $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, когда $p\equiv 1 \bmod 4$, нуль, когда $p\equiv 3 \bmod 4$, и фактор $H_1(X_0(p),\mathbb{Z})$ по элементам формы сумма цикла и его сопряженного. Последнее можно разобрать выбрав триангуляцию $X_0(p)$, инвариантную относительно сопряжения, и используя спектральную последовательность связывающую эквивариантную гомологию $X_0(p)$ с групповыми гомологиями $H_j(X_0(p),\mathbb{Z})$, с одной стороны, и с групповыми гомологиями групп j-цепей, с другой стороны, для $j=0$, 1, 2; cf. [9, §VII.7]. (Все групповые гомологии рассматриваются для группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, соответствующей комплексному сопряжению.) Мы опускаем детали, и показываем только результат:

$$H_i(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},H_1(X_0(p),\mathbb{Z}))=0 \qquad \text{для всех } i\geq 1,$$

$$H_j^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(X_0(p),\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } j=0,\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^{g}, & \text{если } j=1,\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{если } j\geq 2. \end{cases}$$

Обращение в нуль $H_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},H_1(X_0(p),\mathbb{Z}))$ влечет за собой, что подгруппа $H_1(X_0(p),\mathbb{Z})$ элементов формы сумма цикла и его сопряженного имеет фактор без кручения. Это значит, что фактор изоморфен $\mathbb{Z}^g$.

Список литературы

[1] D. Abramovich, T. Graber, A. Vistoli, Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks, *Amer. J. Math.*, 130(5):1337–1398, 2008.

[2] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, Torification and factorization of birational maps, *J. Amer. Math. Soc.*, 15(3):531–572, 2002.

[3] D. Abramovich, M. Temkin, Functorial factorization of birational maps for qe schemes in characteristic 0, *Algebra Number Theory*, 13(2):379–424, 2019.

[4] K. Behrend, B. Noohi, Uniformization of Deligne-Mumford curves, *J. Reine Angew. Math.*, 599:111–153, 2006.

[5] D. Bergh, Functorial destackification of tame stacks with abelian stabilisers, *Compos. Math.*, 153(6):1257–1315, 2017.

[6] D. Bergh, D. Rydh, Functorial destackification and weak factorization of orbifolds, `arXiv:1905.00872`.

[7] E. Bierstone, P. D. Milman, Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant, *Invent. Math.*, 128(2):207–302, 1997.

[8] F. Bittner, The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero, *Compos. Math.*, 140(4):1011–1032, 2004.

[9] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Math., 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[10] C. Cadman, Using stacks to impose tangency conditions on curves, *Amer. J. Math.*, 129(2):405–427, 2007.

[11] S. Keel, S. Mori, Quotients by groupoids, *Ann. of Math. (2)*, 145(1):193–213, 1997

[12] S. L. Kleiman, A. B. Altman, Bertini theorems for hypersurface sections containing a subscheme, *Comm. Algebra*, 7(8):775–790, 1979.

[13] M. Kontsevich, V. Pestun, Yu. Tschinkel, Equivariant birational geometry and modular symbols, *J. Eur. Math. Soc.* (to appear); `arXiv:1902.09894`.

[14] M. Kontsevich, Yu. Tschinkel, Specialization of birational types, *Invent. Math.*, 217(2):415–432, 2019.

[15] A. Kresch, On the geometry of Deligne-Mumford stacks, *Algebraic geometry (Seattle, 2005), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 259–271.

[16] A. Kresch, Destackification with restricted root operations, *Eur. J. Math.*, 4(4):1421–1432, 2018.

[17] Ю. И. Манин, Параболические точки и дзета-функции модулярных кривых, *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, 36(1):19–66, 1972.

[18] I. Moerdijk, Orbifolds as groupoids: an introduction, *Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001)*, Contemp. Math., 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 205–222.

[19] J. Oesinghaus, Conic bundles and iterated root stacks, *Eur. J. Math.*, 5(2):518–527, 2019.

[20] O. E. Villamayor U., Patching local uniformizations, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 25(6):629–677, 1992.

BIRATIONAL TYPES OF ALGEBRAIC ORBIFOLDS

ANDREW KRESCH AND YURI TSCHINKEL

Abstract. We introduce a variant of the birational symbols group of Kontsevich, Pestun, and the second author, and use this to define birational invariants of algebraic orbifolds.

1. Introduction

Let k be a field of characteristic zero and X a smooth projective variety over k, of dimension n; we require our varieties to be irreducible, but not necessarily geometrically irreducible. The paper [14] introduced the *Burnside group* of varieties

$$\mathrm{Burn}_n = \mathrm{Burn}_{n,k},$$

the free abelian group on isomorphism classes of finitely generated fields of transcendence degree n over k; for such a field K we denote the corresponding generator by $[K]$. To X one associates its class

$$[X] := [k(X)] \in \mathrm{Burn}_n,$$

extended by additivity for smooth projective schemes that are not necessarily irreducible. To

$$U = X \setminus D,$$

the complement to a simple normal crossing divisor

$$D = D_1 \cup \cdots \cup D_\ell,$$

one may also associate a class in Burn_n:

$$[U] := [X] - \sum_{1\le i\le \ell} [D_i \times \mathbb{P}^1] + \sum_{1\le i<j\le \ell} [(D_i \cap D_j) \times \mathbb{P}^2] - \dots . \tag{1.1}$$

This is not only an invariant of the isomorphism type of U, but is a birational invariant in the following sense: $[U] = [U']$ in Burn_n if there exist a quasiprojective variety V and birational projective morphisms

$$V \to U \qquad \text{and} \qquad V \to U'.$$

This formalism was used to establish specialization of rationality.

Date: October 26, 2020.

Now we suppose that X is equipped with a faithful action of a finite abelian group G. Then there is a G-equivariant birational invariant of X introduced in [13], taking its value in a group

$$\mathcal{B}_n(G)$$

which records the normal bundle representation generically along components of the fixed locus X^G.

This paper concerns birational invariants of *orbifolds*. An (algebraic) orbifold is a smooth separated irreducible finite-type Deligne-Mumford stack over k with trivial generic stabilizer. Such a stack has a coarse moduli space [11], separated and of finite type over k. We call the orbifold *quasiprojective* (respectively *projective*) when the coarse moduli space is a quasiprojective (respectively projective) variety (see [15]). For instance, the G-action on X determines a projective orbifold $[X/G]$. The orbifolds in this article are always quasiprojective.

We will introduce a group

$$\overline{\mathrm{Burn}}_n$$

that combines features of the groups Burn_n and $\mathcal{B}_n(G)$. We only carry in $\overline{\mathrm{Burn}}_n$ the information of representations of finite abelian groups, up to automorphisms of those groups. Working with $\overline{\mathrm{Burn}}_n$, we will exhibit a birational invariant of a quasiprojective n-dimensional orbifold.

It suffices to consider finite *abelian* groups thanks to divisorialification [6], a sequence of blow-ups in smooth centers which, when applied to a general orbifold, yields an orbifold with only abelian groups as geometric stabilizer groups. Weak factorization [2], in a functorial form proved in [3], is used to exhibit the desired birational invariance.

In Section 2 we establish a presentation of the Burnside group of varieties with relations that are analogous to the scissors relations, used to define the Grothendieck group of varieties. Section 3 introduces the group $\overline{\mathrm{Burn}}_n$. In Section 4 the class of an algebraic orbifold in $\overline{\mathrm{Burn}}_n$ is defined. Section 5 confirms a connection between invariants of orbifold surfaces and modular curves.

Acknowledgments: The first author was partially supported by the Swiss National Science Foundation. The second author was partially supported by NSF grant 2000099.

2. Burnside group via scissors relations

Let k be a field of characteristic zero. The Grothendieck group

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$$

may be approached in two ways, as an abelian group generated by the classes of algebraic varieties over k with the classical scissors relations (where it makes no difference if we restrict to just smooth quasiprojective varieties), or via the Bittner presentation [8], which only involves smooth projective varieties. We do not concern ourselves in this article with the further structure of $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_k)$ as a ring.

In this section we record the observation that the Burnside group Burn_n also admits a description in terms of scissors relations. As mentioned in the Introduction, we only require our varieties to be irreducible (but not necessarily geometrically irreducible).

Lemma 2.1. *Let k be a field of characteristic zero, and let W be a smooth quasiprojective variety over k. For any nonempty open $U \subset W$ there exist divisors $D_1, \dots, D_\ell$ such that $W \smallsetminus D_1$ is contained in U, and $D_1 \smallsetminus D_2, \dots, D_{\ell-1} \smallsetminus D_\ell$, D_ℓ are all smooth.*

Proof. Let $Z = W \smallsetminus U$. By [12, Thm. 7], given an embedding of W in projective space, a general hypersurface of sufficiently large degree containing Z defines a divisor D_1 on W whose singular locus D_1^{sing} is contained in Z and does not contain any irreducible component of Z. If D_1 is smooth, then we are done with $\ell = 1$. Otherwise, we have $\dim(D_1^{\mathrm{sing}}) < \dim(Z)$, and we conclude by induction on $\dim(Z)$. ☐

Proposition 2.2. *Let k be a field of characteristic zero and n a natural number. Then the assignment to $[k(X)]$ of $[X]$ for smooth projective varieties X of dimension n over k defines an isomorphism*

$$\mathrm{Burn}_n \xrightarrow{\sim} \Big(\bigoplus_{[U],\, \dim(U)=n} \mathbb{Z}\cdot[U] \Big) \Big/ \textit{modified-scissors},$$

where, on the right, we have the quotient of the free abelian group on isomorphism classes of smooth quasiprojective varieties of dimension n over k by the modified scissors relations

$$[U] = [V \times \mathbb{P}^{n-d}] + [U \smallsetminus V]$$

for smooth closed subvarieties $V \subset U$ of dimension $d < n$. The inverse isomorphism is given by the formula (1.1).

Proof. We check that the map from the statement of the proposition is well-defined, i.e., the classes of any pair of birationally equivalent smooth projective n-dimensional varieties are equal modulo the modified scissors relations.

By weak factorization, it suffices to consider the case of X and $B\ell_Y X$, where X is smooth and projective of dimension n and Y is a smooth subvariety of X of dimension $d < n$. By the modified scissors relations we have

$$[X] = [Y \times \mathbb{P}^{n-d}] + [X \smallsetminus Y],$$
$$[B\ell_Y X] = [\mathbb{P}(N_{Y/X}) \times \mathbb{P}^1] + [X \smallsetminus Y],$$

where $N_{Y/X}$ denotes the normal bundle. We are done if we can show that $[\mathbb{P}(N_{Y/X}) \times \mathbb{P}^1] = [Y \times \mathbb{P}^{n-d}]$. We will show, more generally, that for any smooth quasiprojective variety W of dimension $e < n$ and vector bundle F on W of rank $r \le n+1-e$, we have

$$[\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}^{n+1-e-r}] = [W \times \mathbb{P}^{n-e}]. \tag{2.1}$$

For any smooth quasiprojective variety Z of dimension $n-1$ we have $[Z \times \mathbb{A}^1] = 0$ (by considering $Z \times \{\infty\} \subset Z \times \mathbb{P}^1$), and hence

$$[W \times \mathbb{P}^{n-e}] = [W \times (\mathbb{P}^1)^{n-e}]$$

(by considering $W \times \mathbb{P}^{n-e-1} \subset W \times \mathbb{P}^{n-e}$). We prove (2.1) by induction on e; the case $e = 0$ is now clear. Let $U \subset W$ be a nonempty open subset on which F is trivial, and $D_1, \ldots, D_\ell$, divisors as in Lemma 2.1. The modified scissors relation and the induction hypothesis lead to

$$\begin{aligned}[\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}^{n+1-e-r}] = [D_\ell \times \mathbb{P}^{n+1-e}] &+ [(D_{\ell-1} \smallsetminus D_\ell) \times \mathbb{P}^{n+1-e}] \\ &+ \cdots + [(D_1 \smallsetminus (D_2 \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n+1-e}] \\ &+ [(W \smallsetminus (D_1 \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n-e}].\end{aligned}$$

We conclude with the relations, for $1 \le i \le \ell$:

$$\begin{aligned}[(W \smallsetminus (D_{i+1} \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n-e}] &= [(D_i \smallsetminus (D_{i+1} \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n+1-e}] \\ &\quad + [(W \smallsetminus (D_i \cup \cdots \cup D_\ell)) \times \mathbb{P}^{n-e}].\end{aligned}$$

We verify that the map in the reverse direction, given by the formula (1.1), is well-defined, i.e., respects the modified scissors relations. Let V be a smooth closed subvariety of U of dimension d. Then U may be presented as the complement in a smooth projective variety X of a simple normal crossing divisor $D_1 \cup \cdots \cup D_\ell$, with which a smooth subvariety $Y \subset X$ has normal crossing, such that $Y \cap U = V$. We have $[U]$, given by the formula (1.1). For $[V \times \mathbb{P}^{n-d}]$ we have the embedding in $Y \times \mathbb{P}^{n-d}$, complement to the simple normal crossing divisor

$$(D_1 \cap Y) \times \mathbb{P}^{n-d} \cup \cdots \cup (D_\ell \cap Y) \times \mathbb{P}^{n-d},$$

and thus an analogous formula in Burn_n. The blow-up $B\ell_Y X$ has the simple normal crossing divisor $\widetilde{D}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{D}_\ell \cup E$, where $\widetilde{D}_i$ denotes the proper transform of D_i, and E, the exceptional divisor, leading to a formula for $[U \smallsetminus V]$ in Burn_n. Comparing formulas and using that any intersection not involving E is birational to the corresponding intersection in X, while any intersection involving E is birational to the product of an intersection in Y with projective space of the appropriate dimension, we obtain the desired relation.

It is clear that the composite $\mathrm{Burn}_n \to \mathrm{Burn}_n$ of the two maps is the identity. The composite in the other order is seen to be the identity using the modified scissors relations. $\square$

3. Burnside group for stacks

In this section we introduce the group $\overline{\mathrm{Burn}}_n$.

Definition 3.1. We define the $\mathbb{Z}[t]$-module $\overline{\mathcal{B}}$ by starting with the free $\mathbb{Z}$-module on pairs (A, S) consisting of a finite abelian group A and finite generating system S of A, where the action of t is to append the element 0 to S, and passing to the quotient by the following relations:

- (A, S) and (A, S') are equivalent if S' is a permutation of S.
- (A, S) and (A', S') are equivalent if some isomorphism $A \cong A'$ transforms S to S'.
- (A, S), $S = (a_1, \dots, a_m)$, is equivalent, for any $2 \le j \le m$, to

$$\sum_{\emptyset \ne I \subset \{1,\dots,j\}} (-t)^{|I|-1} \Big(A/\langle a_i - a_{i_0} \rangle_{i \in I},$$

$$(\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_1 - \bar{a}_{i_0}, \dots (\text{omitting all } i \in I) \dots, \bar{a}_j - \bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{j+1}, \dots, \bar{a}_m) \Big),$$

  where inside the sum i_0 denotes an element of I, with sequence of elements of $A/\langle a_i - a_{i_0} \rangle_{i \in I}$ of length $1 + (j - |I|) + (m - j)$ that is independent of the choice of i_0.

Example 3.2. When $m = j = 2$, we obtain $(A, (a_1, a_2))$ equivalent to

$$(A, (a_1, a_2 - a_1)) + (A, (a_2, a_1 - a_2)) - t(A/\langle a_1 - a_2 \rangle, (\bar{a}_1)).$$

We let $[A, S]$ denote the class in $\overline{\mathcal{B}}$ of a pair (A, S). We define a grading on $\overline{\mathcal{B}}$ by assigning degree $|S|$ to $[A, S]$:

$$\overline{\mathcal{B}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{B}}_n.$$

With this grading, $\overline{\mathcal{B}}$ is a graded $\mathbb{Z}[t]$-module, for the natural grading on $\mathbb{Z}[t]$.

Representations determine, via their weights, elements of $\overline{\mathcal{B}}$. If G is a finite diagonalizable group scheme with faithful representation

$$\rho \colon G \to GL_n$$

(over an arbitrary field), then there is a pair (A, S), where A is the Cartier dual group to G and S is the sequence of weights supplied by a decomposition of ρ as a sum of n one-dimensional linear representations. The element

$$[\rho] := [A, S] \in \overline{\mathcal{B}}_n$$

is canonically determined by ρ.

Restricting to e-torsion groups A for a positive integer e, respectively, to p-primary A for a prime number p, leads to a $\mathbb{Z}[t]$-module $\overline{\mathcal{B}}^{[e]}$, respectively $\overline{\mathcal{B}}^{(p)}$. The evident homomorphisms from these modules to $\overline{\mathcal{B}}$ are split monomorphisms, with splittings given by

$$[A, S] \to [A/eA, S], \qquad \text{respectively,} \qquad [A, S] \to [A(p), S],$$

where $A(p)$ denotes the p-primary subgroup of A. We have

$$\overline{\mathcal{B}} = \bigoplus_p \overline{\mathcal{B}}^{(p)}, \qquad \overline{\mathcal{B}}^{(p)} = \varinjlim_j \overline{\mathcal{B}}^{[p^j]}.$$

Definition 3.3. Let k be a field of characteristic zero and n a natural number. The group

$$\overline{\mathrm{Burn}}_n$$

is the abelian group generated by pairs (K, α), where

- K is a finitely generated field of transcendence degree $d \le n$ over k and
- $\alpha \in \overline{\mathcal{B}}_{n-d}$,

modulo the identification of $(K(t), \beta)$ and $(K, t\beta)$ for $\beta \in \overline{\mathcal{B}}_{n-d-1}$.

Example 3.4. For $\overline{\mathcal{B}}_2^{[5]}$ we have generators $t^2[0, ()]$, $t[C_5, (1)]$, $[C_5, (1, 1)]$, $[C_5, (1, 2)]$, $[C_5, (1, 4)]$, $[C_5 \oplus C_5, ((1, 0), (0, 1))]$, and relations:

$$\begin{aligned} t[C_5, (1)] &= [C_5, (1, 4)] + t[C_5, (1)] - t^2[0, ()], \\ [C_5, (1, 1)] &= 2t[C_5, (1)] - t[C_5, (1)], \\ [C_5, (1, 2)] &= [C_5, (1, 1)] + [C_5, (1, 2)] - t^2[0, ()], \\ [C_5, (1, 4)] &= 2[C_5, (1, 2)] - t^2[0, ()], \\ [C_5 \oplus C_5, ((1, 0), (0, 1))] &= 2[C_5 \oplus C_5, ((1, 0), (0, 1))] - t[C_5, (1)], \end{aligned}$$

where $C_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. We deduce

$$[C_5 \oplus C_5, ((1, 0), (0, 1))] = [C_5, (1, 1)] = [C_5, (1, 4)] = t[C_5, (1)] = t^2[0, ()],$$

with

$$2\big([C_5, (1, 2)] - t^2[0, ()]\big) = 0.$$

Hence $\overline{\mathcal{B}}_2^{[5]} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Birational invariants of orbifolds

In this section we introduce birational invariants of n-dimensional orbifolds over a field k of characteristic zero, taking values in $\overline{\mathrm{Burn}}_n$.

Let $\mathcal{X}$ be an orbifold. We recall from [5] (see also [6]): if $D_1 \cup \cdots \cup D_\ell$ is a simple normal crossing divisor on $\mathcal{X}$, then $\mathcal{X}$ is called *divisorial* with respect to $D_1, \ldots, D_\ell$ if the morphism

$$\mathcal{X} \to B\mathbb{G}_m^\ell,$$

determined by $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_i)$, for $i = 1, \ldots, \ell$, is representable; this implies that the stabilizer group schemes of $\mathcal{X}$ are diagonalizable. We will apply this terminology more generally to any finite collection of line bundles.

Divisorialification is a procedure that, when applied to an orbifold $\mathcal{X}$, yields a succession of blow-ups along smooth centers

$$\mathcal{Y} \to \cdots \to \mathcal{X},$$

such that $\mathcal{Y}$ is divisorial with respect to a suitable simple normal crossing divisor. This is given as Algorithm C in [5], initially with a requirement to have abelian geometric stabilizer groups, later with this requirement removed [6].

As explained in the introduction, invariance under birational projective morphisms is the statement of invariance under the equivalence relation of existence of a third object (variety or Deligne-Mumford stack) with birational projective morphisms to two given objects. In this section we are interested in quasiprojective orbifolds $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}'$, and the equivalence takes the form of existence of a Deligne-Mumford stack $\mathcal{Y}$ with birational projective morphisms

$$\mathcal{Y} \to \mathcal{X} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{Y} \to \mathcal{X}'. \tag{4.1}$$

We recall that a morphism of stacks is projective if it factors up to 2-isomorphism as a closed immersion followed by projection from a projective bundle $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ for some quasi-coherent sheaf $\mathcal{E}$ of finite type; in particular, projective morphisms are always representable.

In the situation (4.1) there is no loss of generality in supposing $\mathcal{Y}$ as well to be an orbifold, since resolution of singularities in a functorial form as in [20] and [7] is applicable to algebraic stacks. When $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are quasiprojective orbifolds, a morphism $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ is projective if and only if it is representable and proper. (Every projective morphism is representable and proper. The reverse implication uses that $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ factors up to 2-isomorphism through $\mathcal{X} \times_X Y$, where X and Y denote the respective coarse moduli spaces, that $\mathcal{X} \to X$ and $\mathcal{Y} \to Y$ induce bijections on geometric points, and that a representable proper morphism inducing a bijection on geometric points is finite, hence projective.)

Theorem 4.1. *Let k be a field of characteristic zero, n a natural number, and $\mathcal{X}$ an n-dimensional quasiprojective orbifold over k. The following recipe, assigning to $\mathcal{X}$ a class $[\mathcal{X}] \in \overline{\mathrm{Burn}}_n$ gives an invariant under birational projective morphisms:*

- *Use divisorialification to replace $\mathcal{X}$ by a quasiprojective orbifold $\mathcal{Y}$ that is divisorial with respect to some finite collection of line bundles.*
- *Stratify $\mathcal{Y}$ by the isomorphism type of the geometric stabilizer group and attach to each component the normal bundle:*
$$\mathcal{Y} = \coprod_G \mathcal{Y}_G, \qquad N_{Y,G} = N_{\mathcal{Y}_G/\mathcal{Y}}.$$
- *Writing the coarse moduli space of $\mathcal{Y}_G$, for each G, as Y_G, we assign the element*
$$[\mathcal{X}] := \sum_G ([Y_G], [N_{Y,G}]) \in \overline{\mathrm{Burn}}_n.$$

In the last step, if Y_G is irreducible of dimension d, then we understand $[Y_G]$ to be the associated element of Burn_d, with $[N_{Y,G}] \in \overline{\mathcal{B}}_{n-d}$ associated to the representation of G at the geometric generic point of $\mathcal{Y}_G$. In general, we understand $([Y_G], [N_{Y,G}])$ to be the sum of the elements of $\overline{\mathrm{Burn}}_n$ attached to the irreducible components.

Proof. Let $\mathcal{X}'$ be a quasiprojective orbifold with birational projective morphism to $\mathcal{X}$. We divisorialize $\mathcal{X}'$ to obtain $\mathcal{Y}'$. The diagram

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Y}' \arrow[d] \\ \mathcal{Y} \arrow[r] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

may be completed to a 2-commutative square of birational projective morphisms of quasiprojective orbifolds by desingularizing the closure in the fiber product of a nonempty open substack where the morphisms are isomorphisms. This way, we are reduced to showing that for a birational projective morphism $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ of quasiprojective orbifolds we have

$$\sum_G ([Y_G], [N_{Y,G}]) = \sum_G ([Z_G], [N_{Z,G}]) \in \overline{\mathrm{Burn}}_n. \tag{4.2}$$

Let $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\ell$ be line bundles, relative to which $\mathcal{Y}$ is divisorial. The functorial form of weak factorization in [3] is applicable to stacks and yields a factorization of $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ as a composite of maps *of divisorial projective orbifolds* (with respect to pullbacks of $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\ell$), each equal to or inverse to a blow-up along a smooth center.

Let $\mathcal{V}$ be a smooth closed substack of $\mathcal{Y}$ of dimension $< n$, with coarse moduli space V, and let $\mathcal{Z} = B\ell_{\mathcal{V}}\mathcal{Y}$. We verify (4.2) in this case. On the left, we break up $\mathcal{Y}_G$ into the unions of components $\mathcal{Y}'_G$ disjoint from $\mathcal{V}$ and $\mathcal{Y}''$, meeting $\mathcal{V}$ nontrivially, and apply the modified scissors relation to $\mathcal{Y}''_G$:

$$\sum_G([Y_G],[N_{Y,G}]) = \sum_G([Y'_G],[N_{Y,G}])$$
$$+\sum_G([Y''_G\cap V], t^{\dim(\mathcal{Y}''_G)-\dim(\mathcal{Y}''_G\cap\mathcal{V})}[N_{Y,G}]) + \sum_G([Y''_G\smallsetminus V],[N_{Y,G}]),$$

where in the second sum on the right, the dimensions are understood to be taken componentwise. Breaking up the sum on the right of (4.2) in a similar fashion, we obtain an expression with identical first and third sums and a second sum that differs from the second sum in the expression above by relations in $\overline{\mathcal{B}}$. □

Remark 4.2. Over an algebraically closed field of characteristic zero, if we consider orbifold surfaces whose only nontrivial stabilizer groups are of order 5, then the parity of the number of isolated points with C_5-stabilizer and unequal weights not summing to zero remains unchanged under blow-up of points. This observation is reflected in the 2-torsion in $\overline{\mathcal{B}}_2^{[5]}$ obtained in Example 3.4 and the birational invariance in Theorem 4.1. In this context we mention [5, Exa. 4.3], the observation that a single such point with C_5-stabilizer persists under blow-up.

Example 4.3. Functorial destackification [5] of an orbifold provides a sequence of blow-ups along smooth centers and root stack operations along smooth divisors that simplify the stack structure. The root stack operation adds stabilizer μ_n (for some positive integer n) along a divisor [10, §2], [1, App. B], and the outcome of destackification is an orbifold that is obtained from a smooth variety by iterating root stack operations along components of a simple normal crossing divisor. Blow-ups alone are, as noted in Remark 4.2, insufficient to bring a general orbifold into this form. Correspondingly, we may view the quotient $\overline{\mathcal{B}}/\mathcal{C}$, where $\mathcal{C}$ denotes the submodule generated by the classes of pairs

$$(C_{a_1}\oplus\cdots\oplus C_{a_r},(g_1,\dots,g_r))$$

of direct sums of finite cyclic groups ($r \geq 0$ arbitrary) and tuples of generators, as an obstruction to destackification with blow-ups alone.

We have

$$\overline{\mathcal{B}}^{[p]} \subset \mathcal{C} \qquad \text{for} \qquad p\in\{2,3\},$$

since blow-ups suffice for the destackification in these cases [16], [19].

p	$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$	p	$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$	p	$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$
5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	17	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	31	$\mathbb{Z}^2$
7	0	19	$\mathbb{Z}$	37	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^2$
11	$\mathbb{Z}$	23	$\mathbb{Z}^2$	41	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^3$
13	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	29	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^2$	43	$\mathbb{Z}^3$

TABLE 1. Isomorphism type of $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$

Table 1 records the isomorphism type of $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$ for some primes $p\ge 5$. The next result confirms the evident pattern.

Proposition 4.4. *For a prime $p\ge 5$ let*

$$g=g(X_0(p))$$

denote the genus of the modular curve, i.e.,

$$g=\begin{cases}\left[\frac{p}{12}\right]\mp 1, & \textit{when } p\equiv\pm 1 \bmod 12,\\ \left[\frac{p}{12}\right], & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

Then

$$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^g, & \textit{if } p\equiv 1 \bmod 4,\\ \mathbb{Z}^g, & \textit{if } p\equiv 3 \bmod 4.\end{cases}$$

The proof of Proposition 4.4, based on computations with Manin's modular symbols [17], is given in the next section.

The entry 0 in Table 1 for $p=7$ indicates that $\overline{\mathcal{B}}_2^{[7]}\subset\mathcal{C}$. In fact, we have $\overline{\mathcal{B}}_3^{[7]}\subset\mathcal{C}$ as well. But we find

$$\overline{\mathcal{B}}_4^{[7]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_4^{[7]})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

5. Modular symbols and the proof of Proposition 4.4

The equivariant Burnside group introduced in [13] is shown to exhibit a connection with the modular curves $X_1(N)$ for various N. In this section the modular curves

$$X_0(p)=\Gamma_0(p)\backslash\mathbb{H}\cup\{0,\infty\}$$

and the corresponding modular symbols [17] play a role; the connection between 2-dimensional birational geometry and modular curves remains mysterious to us.

Fix a prime $p\ge 5$; we are interested in the abelian group

$$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$$

with generators

$$[C_p,(1,a)], \qquad 2\le a\le p-2,$$

and relations

$$[C_p,(1,a)] = [C_p,(1,a^{-1})] \qquad \text{for all } a, \tag{5.1}$$

$$2[C_p,(1,2)] = 0, \tag{5.2}$$

$$[C_p,(1,2)] = -[C_p,(1,p-2)], \tag{5.3}$$

$$[C_p,(1,a)] = [C_p,(1,a-1)] + [C_p,(1,a^{-1}-1)] \tag{5.4}$$

$$\text{for } a\in\big\{3,\dots,\tfrac{p-1}{2}\big\}\cup\big\{\tfrac{p+3}{2},\dots,p-2\big\},$$

where a^{-1} denotes the positive integer less than p, inverse to a mod p. (We have $[C_p,(1,1)] = t[C_p,(1)]\in\mathcal{C}$ and $[C_p,(1,p-1)] = t^2[0,()]\in\mathcal{C}$.)

The modular group

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c\equiv 0 \bmod p\right\}$$

has index $p+1$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, with right coset representatives

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0\\ p-1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

We let $\Gamma_0(p)$ act in the standard way on the upper half-plane $\mathbb{H}$ and as well on $\mathbb{Q}\cup\{i\infty\}$, the latter with two orbits corresponding to the cusps 0, $\infty\in X_0(p)$. Here, 0 corresponds to the set of all $b/d\in\mathbb{Q}$ with $p\nmid d$ and ∞, to the set of $a/c\in\mathbb{Q}$ with $p\mid c$. The real structure on $X_0(p)$ is determined by the standard complex conjugation $\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, $z\mapsto -\bar z$. It is well known that the real locus of $X_0(p)$ is connected.

With Manin's modular symbols [17], applied to $\Gamma_0(p)$, we get a presentation of $H_1(X_0(p),\mathbb{Z})$ by generators and relations. Proposition 4.4 is established by showing that these relations, together with the additional relations that the sum of any cycle and its complex conjugate is zero, match the presentation (5.1)–(5.4). In fact, we use a simpler set of relations, which yield the homology not of the Riemann surface $X_0(p)$, but rather of the corresponding *orbifold* with stabilizers at elliptic points. The quotient of $\mathbb{H}$ by $\Gamma_0(p)/\{\pm 1\}$ is an orbifold, which we compactify by adding the cusps to obtain

$$X_0(p)_{\mathrm{orb}}.$$

Orbifolds and their topological invariants are explained, for instance, in [18], while a convenient reference for orbifold curves is [4]. However, $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}},\mathbb{Z})$ may also be presented directly as the homology of the complement of the elliptic points, modulo the relation that an appropriate multiple of a small loop around an elliptic point is zero.

When $p \equiv 1 \bmod 4$ there is a complex conjugate pair of elliptic points of $X_0(p)_{\mathrm{orb}}$ where the stabilizer (of a representative point of $\mathbb{H}$) has order 2 in $\Gamma_0(p)/\{\pm 1\}$; for each of these, twice a small loop is declared to be zero in homology. When $p \equiv 1 \bmod 3$ there is a complex conjugate pair of elliptic points where the stabilizer has order 3 in $\Gamma_0(p)/\{\pm 1\}$, for which we declare 3 times a small loop to be zero in homology.

We summarize the needed results from [17], modified appropriately to the orbifold setting. We maintain the convention from (5.1)–(5.4) about a and a^{-1} and, when $a \notin \{p-2, (p-1)/2\}$ define positive integers a' and a'' less than p by the requirements

$$a' \equiv -a^{-1} - 1 \bmod p, \qquad a'' \equiv -(a+1)^{-1} \bmod p.$$

Lemma 5.1 ([17, (1.4)]). *A surjective homomorphipsm*

$$\Gamma_0(p) \to H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$$

is defined by sending $\gamma \in \Gamma_0(p)$ to the image

$$\{0, \gamma \cdot 0\}$$

in $X_0(p)$ of a geodesic path in $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q}$ from 0 to $\gamma \cdot 0$. The kernel is generated by the commutator subgroup of $\Gamma_0(p)$ and the parabolic elements of $\Gamma_0(p)$.

Lemma 5.2 ([17, (1.5)–(1.9)]). *The abelian group $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$ is presented by generators*

$$\big\{0, \frac{1}{a}\big\}, \qquad 2 \le a \le p-2,$$

and relations

$$\big\{0, \frac{1}{a}\big\} + \big\{0, \frac{1}{p - a^{-1}}\big\} = 0, \tag{5.5}$$

$$\big\{0, \frac{1}{a}\big\} + \big\{0, \frac{1}{a'}\big\} + \big\{0, \frac{1}{a''}\big\} = 0, \tag{5.6}$$

$$\big\{0, \frac{1}{(p-1)/2}\big\} + \big\{0, \frac{1}{p-2}\big\} = 0. \tag{5.7}$$

Now the proof of Proposition 4.4 combines an algebraic result with topological reasoning.

Lemma 5.3. *An isomorphism*

$$\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}) \to$$
$$H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z}) \Big/ \Big\langle \big\{0, \frac{1}{a}\big\} + \big\{0, \frac{1}{p-a}\big\},\, a \in \{2, \dots, p-2\} \Big\rangle$$

is given by $[C_p, (1,a)] \mapsto \{0, 1/a\}$ for all a.

Proof. Suppose $2 \le b \le (p-3)/2$. We subtract the relations (5.4) corresponding to $a = b+1$ and $a = p-b$, noticing that the rightmost terms cancel thanks to (5.1), to obtain

$$[C_p, (1, b+1)] - [C_p, (1, p-b)] = [C_p, (1, b)] - [C_p, (1, p-b-1)].$$

Starting from (5.3) we obtain, inductively,

$$[C_p, (1, a)] = -[C_p, (1, p-a)] \tag{5.8}$$

for all a. Using (5.8) and (5.1), we rewrite (5.4) as

$$[C_p, (1, a)] + [C_p, (1, a')] + [C_p, (1, a'')] = 0 \tag{5.9}$$

for $a \notin \{(p-1)/2, p-2\}$. We conclude by matching relations (5.1)–(5.2), (5.8)–(5.9) with (5.5)–(5.7) and the additional relations from the quotient group in the statement of the lemma. $\square$

While $H_1(X_0(p), \mathbb{Z})$ is free of rank $2g$ (where g is the genus of $X_0(p)$), there may be torsion in $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$:

$$H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2g}, & \text{if } p \equiv 1 \bmod 12, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2g}, & \text{if } p \equiv 5 \bmod 12, \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2g}, & \text{if } p \equiv 7 \bmod 12, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & \text{if } p \equiv 11 \bmod 12. \end{cases}$$

Complex conjugation acts on $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$ by

$$\{0, \frac{1}{a}\} \mapsto \{0, \frac{1}{p-a}\}.$$

Lemma 5.3 identifies $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$ with the quotient of $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$ by the elements of the form sum of a cycle and its conjugate.

Complex conjugation acts trivially on $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$. When $p \equiv 1 \bmod 4$, intersection number mod 2 with a conjugation-invariant curve joining the order 2 elliptic points splits off $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})[2]$ equivariantly as a direct summand of $H_1(X_0(p)_{\mathrm{orb}}, \mathbb{Z})$. Now $\overline{\mathcal{B}}_2^{[p]}/(\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}_2^{[p]})$ is a direct sum of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ when $p \equiv 1 \bmod 4$, zero when $p \equiv 3 \bmod 4$, and the quotient of $H_1(X_0(p), \mathbb{Z})$ by the elements of the form sum of a cycle and its conjugate. The latter is accessed by choosing a conjugation-invariant triangulation of $X_0(p)$ and using spectral sequences relating the equivariant homology of $X_0(p)$ with the group homology of $H_j(X_0(p), \mathbb{Z})$, on the one hand, and the group homology of the groups of j-chains on the other, for $j = 0, 1, 2$; cf. [9, §VII.7]. (All group homology is for the group $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, corresponding to complex conjugation.) We omit the details and report only the outcome:

$$H_i(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_1(X_0(p),\mathbb{Z})) = 0 \qquad \text{for all } i \ge 1,$$
$$H_j^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(X_0(p),\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } j = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^g, & \text{if } j = 1, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{if } j \ge 2. \end{cases}$$

The vanishing of $H_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_1(X_0(p),\mathbb{Z}))$ has the consequence that the subgroup of $H_1(X_0(p),\mathbb{Z})$ of elements of the form sum of a cycle and its conjugate has torsion-free quotient. Hence the quotient is isomorphic to $\mathbb{Z}^g$.

References

[1] D. Abramovich, T. Graber, and A. Vistoli. Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks. *Amer. J. Math.*, 130(5):1337–1398, 2008.

[2] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, and J. Włodarczyk. Torification and factorization of birational maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(3):531–572, 2002.

[3] D. Abramovich and M. Temkin. Functorial factorization of birational maps for qe schemes in characteristic 0. *Algebra Number Theory*, 13(2):379–424, 2019.

[4] K. Behrend and B. Noohi. Uniformization of Deligne-Mumford curves. *J. Reine Angew. Math.*, 599:111–153, 2006.

[5] D. Bergh. Functorial destackification of tame stacks with abelian stabilisers. *Compos. Math.*, 153(6):1257–1315, 2017.

[6] D. Bergh and D. Rydh. Functorial destackification and weak factorization of orbifolds, 2019. `arXiv:1905.00872`.

[7] E. Bierstone and P. D. Milman. Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant. *Invent. Math.*, 128(2):207–302, 1997.

[8] F. Bittner. The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero. *Compos. Math.*, 140(4):1011–1032, 2004.

[9] K. S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[10] C. Cadman. Using stacks to impose tangency conditions on curves. *Amer. J. Math.*, 129(2):405–427, 2007.

[11] S. Keel and S. Mori. Quotients by groupoids. *Ann. of Math. (2)*, 145(1):193–213, 1997.

[12] S. L. Kleiman and A. B. Altman. Bertini theorems for hypersurface sections containing a subscheme. *Comm. Algebra*, 7(8):775–790, 1979.

[13] M. Kontsevich, V. Pestun, and Yu. Tschinkel. Equivariant birational geometry and modular symbols, 2019. `arXiv:1902.09894`, to appear in J. Eur. Math. Soc.

[14] M. Kontsevich and Yu. Tschinkel. Specialization of birational types. *Invent. Math.*, 217(2):415–432, 2019.

[15] A. Kresch. On the geometry of Deligne-Mumford stacks. In *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 259–271. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[16] A. Kresch. Destackification with restricted root operations. *Eur. J. Math.*, 4(4):1421–1432, 2018.
[17] Yu. I. Manin. Parabolic points and zeta functions of modular curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 36(1):19–66, 1972.
[18] I. Moerdijk. Orbifolds as groupoids: an introduction. In *Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001)*, volume 310 of *Contemp. Math.*, pages 205–222. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
[19] J. Oesinghaus. Conic bundles and iterated root stacks. *Eur. J. Math.*, 5(2):518–527, 2019.
[20] O. E. Villamayor U. Patching local uniformizations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 25(6):629–677, 1992.

Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Switzerland
Email address: andrew.kresch@math.uzh.ch

Courant Institute, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA
Email address: tschinkel@cims.nyu.edu

Simons Foundation, 160 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA