Recentemente sono venuto a conoscenza di una serie di recenti sviluppi sull'argomento. Per chi volesse approfondire, la referenza seguente è apparsa nel secondo volume dei Proceedings dell'International Congress of Mathematicians tenutosi a Seoul nel 2014:

Umberto Zannier
Elementary integration of differentials in families and conjectures of Pink

Nella discussione della pagina 11, per concludere che il polinomio di quinto grado ha, genericamente, cinque zeri distinti, bisogna assumere che non abbia fattori ripetuti in $\mathbb{C}(x)$. Come nel Lemma 5.1 questo è sicuramente il caso se il polinomio è irriducibile, come stavo implicitamente assumendo: si noti che se il polinomio fosse, effettivamente, riducibile, allora avremmo delle formule per gli zeri che coinvolgerebbero opportune radici dei coefficienti. Ringrazio Umberto Zannier per avermi segnalato la svista.

Nel Lemma 5.1, il domino delle funzioni f_i è, ovviamente, l'intervallo J.

Nella dimostrazione del Lemma 7.1 ho erroneamente stimato il modulo dell'esponenziale di un numero complesso dal basso usando l'esponenziale del modulo. Ovviamente l'identità corretta è $|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$. La svista non inficia l'idea base della dimostrazione: qui di seguito riporto le opportune modifiche, in rosso, alla dimostrazione del Lemma. L'errore mi è stato segnalato da Michela Dettori, a cui vanno i miei ringraziamenti.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che un tale intervallo e un tale polinomio esistano. In particolare, possiamo supporre che tale polinomio sia monico. Avremo allora

$$P(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} f_j X^j$$

dove ciascun f_j è una funzione razionale. Sia ora F l'insieme finito di punti sul piano complesso su cui almeno una delle funzioni $f_{m-1}, \ldots, f_0, g$ non è definita. Un semplice argomento di continuazione analitica (si veda ad esempio [?]) mostra che, se

$$P(f(t)) = e^{ng(t)} + \sum_{j=0}^{n-1} f_j(t) e^{jg(t)} = 0 \qquad \forall t \in I$$

allora

$$P(f(z)) = e^{ng(z)} + \sum_{j=0}^{n-1} f_j(z) e^{jg(z)} = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus F\,.$$

Se la funzione razionale g non è un polinomio e ζ è uno zero del denominatore, allora per opportune costanti $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $C \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avremo

$$\left| g(z) - \frac{\alpha}{(z-\zeta)^N} \right| \le \frac{C}{|z-\zeta|^{N-1}}$$

per ogni z in intorno U di ζ (eccetto $z = \zeta$). Scriviamo $\alpha = 2ce^{i\phi}$ con $2c = |\alpha| > 0$ e consideriamo un punto $z = \zeta + \varepsilon e^{i\phi/N}$, dove $\varepsilon > 0$ è piccolo. Avremo allora

$$|\mathrm{Re}\, g(z) - 2c\varepsilon^{-N}| = |\mathrm{Re}\,(g(z) - 2c\varepsilon^{-N})| \leq |g(z) - 2c\varepsilon^{-N}| \leq C\varepsilon^{-(N-1)}$$

da cui concludiamo

$$\mathrm{Re}\, g(z) \geq 2c\varepsilon^{-N} - |g(z) - 2c\varepsilon^{-N}| \geq 2c\varepsilon^{-N} - C\varepsilon^{-(N-1)}\,.$$

In particolare per ε sufficientemente piccolo concludiamo

$$\mathrm{Re}\, g(z) \geq c\varepsilon^{-N} \geq \frac{c}{\varepsilon} = \frac{c}{|z-\zeta|}.$$

Quindi esiste una successione $z_k \to \zeta$ con la proprietà che

$$\mathrm{Re}\, g(z_k) \geq \frac{c}{|z_k - \zeta|}\,. \tag{7.1}$$

D'altra parte, per una costante $C > 0$ e un intero $N \in \mathbb{N}$ opportuni, in un intorno V di ζ possiamo anche stimare

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} f_j(z)e^{jg(z)}\right| \leq C\left(e^{(n-1)\mathrm{Re}\, g(z)} + 1\right)|z-\zeta|^{-N} \qquad \forall z \in V \setminus \{\zeta\}\,.$$

Ne concludiamo

$$|P(f(z))| \geq e^{n\mathrm{Re}\, g(z)} - C\left(e^{(n-1)\mathrm{Re}\, g(z)} + 1\right)|z-\zeta|^{-N} \qquad \forall z \in V \setminus \{\zeta\}\,. \tag{7.2}$$

D'altra parte, da (7.1) e dalle proprietà di crescita dell'esponenziale, segue che

$$\lim_{k\to\infty} |P(f(z_k))| = \infty\,,$$

in contraddizione col fatto che $P(f)$ dovrebbe essere identicamente nulla in ogni intorno di ζ.

Pertanto abbiamo escluso che e^g possa essere algebrica su $\mathbb{C}(x)$ quando g non è un polinomio. D'altra parte, con un ragionamento del tutto analogo si vede che, se g è un polinomio non costante, allora

$$\limsup_{|z|\to\infty} |P(f(z))| = \infty\,.$$