

Vom Möbius-Band zur Hilbert-Funktion

Klassisches und Aktuelles
zur Arithmetisierung der Gestalt

Um sich begreiflich zu machen,
muss man zum Auge reden.

J. G. Herder

M. Brodmann
Mathematisches Institut
der Universität Zürich

Mit zwei Plastiken
von F. Lenzinger

Zielsetzung:

Die Arithmetisierung der Gestalt ist ein fundamentales Konzept der Mathematik. Anhand klassischer Beispiele wird dieses Konzept erläutert. Dann wagen wir den Schritt in die algebraische Geometrie, wo wir die Arithmetisierung der Gestalt in komplexerer Weise realisieren. Hier werfen wir dann auch einen kurzen Blick auf aktuelle Forschungsergebnisse. Entsprechend ist das Projekt in vier Teile von zunehmendem Abstraktionsgrad gegliedert:

TEIL A: Konkrete Beispiele

Ausgehend vom Möbius-Band, der Kleinschen Flasche und der projektiven Ebene erläutern wir das Phänomen der Orientierbarkeit von Flächen.

TEIL B: Der Schritt zum Konzept

Wir veranschaulichen das Konzept der Arithmetisierung der Gestalt am Beispiel der Orientierbarkeit von Flächen. Als weiteres Beispiel behandeln wir die Euler-Charakteristik.

TEIL C: Das Konzept in neuer Form

Wir betrachten projektive algebraische Varietäten und auf diesen sogenannte kohärente Garben. Diese neuen geometrischen Objekte werden arithmetisiert durch sogenannte kohomologische Hilbert-Funktionen.

TEIL D: Ein Blick in die Forschung

Wir stellen aktuelle Forschungsergebnisse vor, bei welchen es um kohomologische Hilbert-Funktionen geht. Dabei handelt es sich um sogenannte a-priori-Schranken für solche Funktionen sowie um Ergebnisse über sogenannte Standard-Aufblasungen.

Glossar:

Möbius-Band: Einfachste nicht orientierbare Fläche. Benannt nach A. F. Möbius (1790–1868).

Kleinsche Flasche: Einfachste geschlossene, nicht orientierbare Fläche. Im dreidimensionalen Raum nicht realisierbar. Benannt nach F. Klein (1849–1925).

projektive Ebene: Dient uns als weiteres Beispiel einer geschlossenen, nicht orientierbaren Fläche. Besitzt im dreidimensionalen Raum sehr verschiedenartige Bilder.

Kleeblatt-Knoten: Einfachster echter Knoten. Besitzt sehr verschiedenartige Projektionen.

Orientierbarkeit: Verschiebt man eine Figur längs eines geschlossenen Weges auf einer orientierbaren Fläche, so kehrt diese Figur nie seitenverkehrt zurück. Enthält eine Fläche ein Möbius-Band, so ist sie nicht orientierbar.

Euler-Charakteristik: Zerlegt man eine geschlossene Fläche vollständig in Vielecke, so ist die «alternierende Summe»: Flächenzahl – Kantenzahl + Eckenzahl unabhängig von der gewählten Zerlegung. Diese alternierende Summe heißt die Euler-Charakteristik der Fläche. Sie ist benannt nach L. Euler (1707–1785).

Arithmetisierung der Gestalt: Geometrischen Objekten werden arithmetische Objekte zugeordnet. Beispiele erhält man durch die Orientierbarkeit und die Euler-Charakteristik.

projektive algebraische Varietät: Nullstellengebilde eines homogenen algebraischen Gleichungssystems in einem komplexen projektiven Raum. Untersuchungsgegenstand der algebraischen Geometrie.

kohärente Garben: Zusatzstrukturen auf projektiven algebraischen Varietäten. Dienen uns als sogenannte Koeffizientensysteme für die Bildung von Kohomologiegruppen.

kohomologische Hilbert-Funktionen: Arithmetische Funktionen, welche einer projektiven Varietät und einer auf dieser definierten kohärenten Garbe zugeordnet werden. Weiteres Beispiel einer Arithmetisierung geometrischer Objekte. Können aus endlich vielen Daten zwar nicht berechnet, aber nach oben abgeschätzt werden (a-priori-Schranken). Benannt nach D. Hilbert (1864–1945).

Aufblasungen: Durch den Prozess der Aufblasung lassen sich aus algebraischen Varietäten neue gewinnen. Bei geeigneter Aufblasung lassen sich Eigenschaften erzwingen, welche die Ausgangsvarietät nicht besitzt. Wir betrachten speziell sogenannte Standard-Aufblasungen, deren Kohomologie wir berechnen können.

TEIL A

Konkrete Beispiele

Mathematische Theorien entspringen meist der Auseinandersetzung mit konkreten Einzelproblemen.

Wir gehen genauso vor und beginnen mit drei konkreten Beispielen. Es handelt sich um

- das Möbius-Band,
- die Kleinsche Flasche,
- die projektive Ebene.

Anhand dieser Beispiele wollen wir das Phänomen der Orientierbarkeit erläutern.

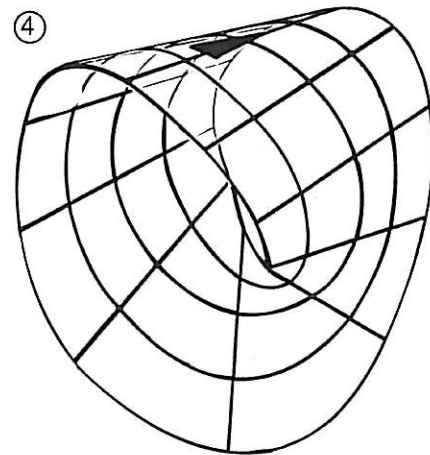
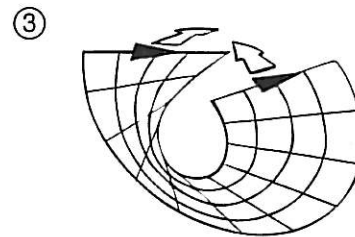
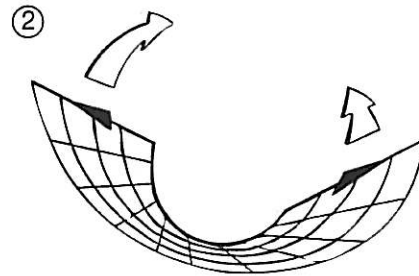
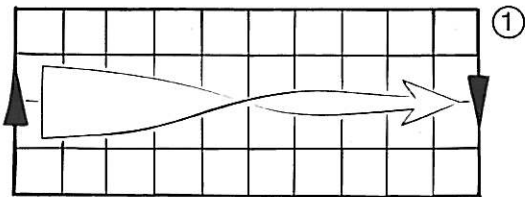
Das Möbius-Band

Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche

Das Möbius-Band wird so benannt nach dem Astronomen und Mathematiker A. F. Möbius (1790–1868)

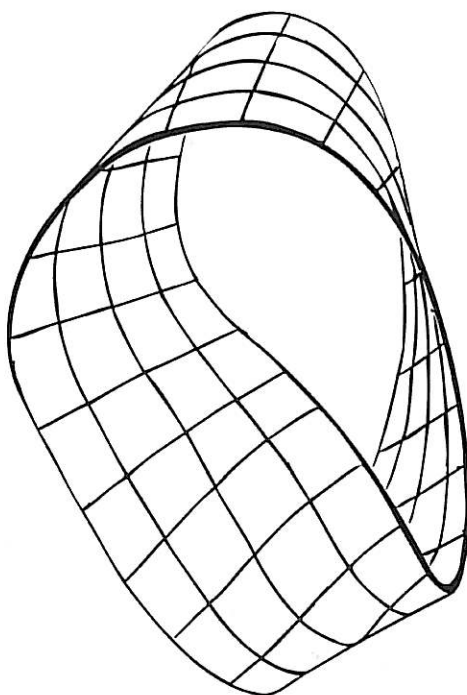
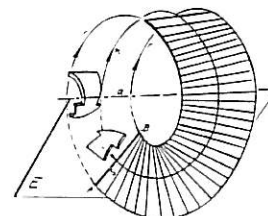
Wie entsteht ein Möbius-Band? (1–4)

Man verheftet die Schmalseiten eines Rechtecks, nachdem man eine dieser Seiten umgedreht hat. Die Pfeilsymbole \blacktriangle in der Skizze kommen dabei zur Deckung.



«Ideales» Möbius-Band (vgl. Plastik von F. Lenzinger)

Es entsteht, indem man eine Ebene E um eine Achse a dreht und gleichzeitig eine in E liegende Strecke s halb so schnell um ihren Mittelpunkt dreht.



«Reales» Möbius-Band (vgl. Modelle)

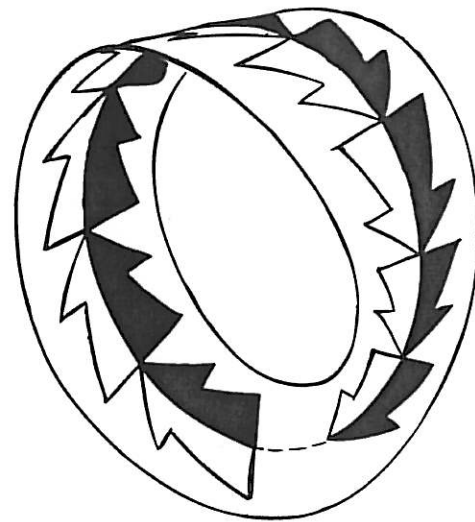
Es entsteht, wenn das Band aus einem geraden Streifen hergestellt wird.

Was interessiert den Mathematiker am Möbius-Band?

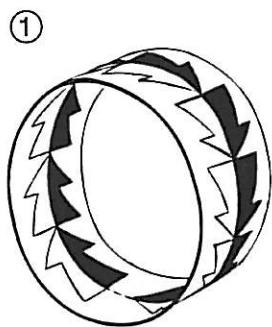
Verschiebt man eine Figur (in unserem Fall das Pfeil-Symbol \Rightarrow) längs des Zentralkreises eines Möbius-Bandes, so kehrt sie seitenverkehrt zurück. Dies bedeutet:

Das Möbius-Band ist nicht orientierbar!

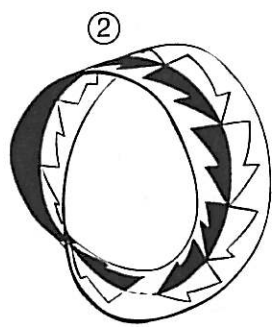
Auf einer orientierbaren Fläche kehrt eine Figur nach dem Verschieben längs eines geschlossenen Weges nie seitenverkehrt zurück.



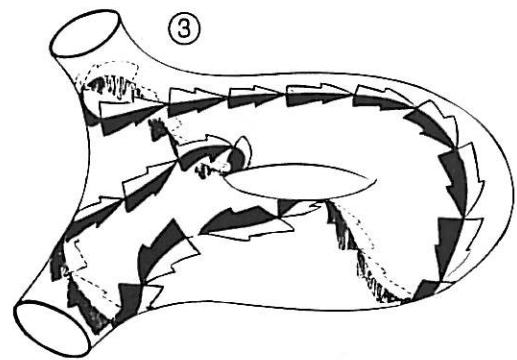
Beispiele:
Orientierbare Flächen:



1. Das einfache Band



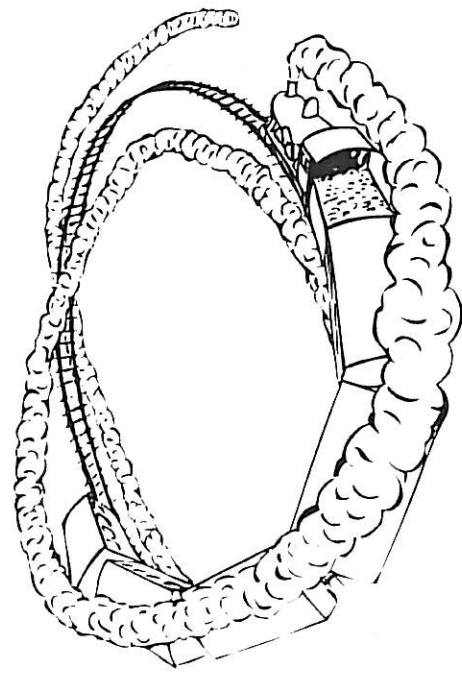
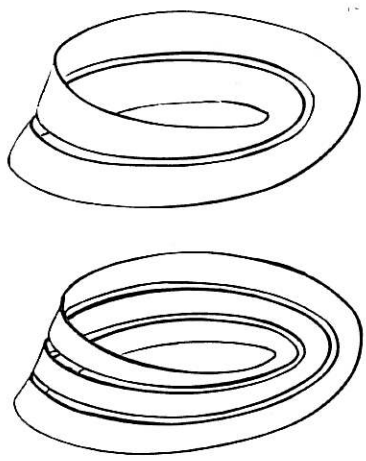
2. Das «voll verdrehte» Band



3. Eine weitere Fläche

Spielereien mit dem Möbius-Band

Was entsteht, wenn man ein Möbius-Band längs seiner Mittellinie zerschneidet?
Was entsteht bei einem «Drittelschnitt»?



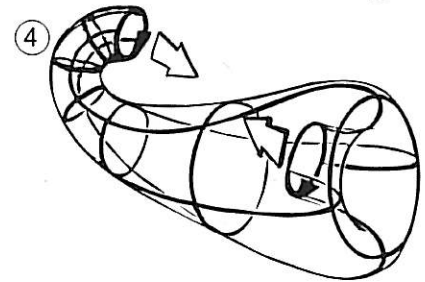
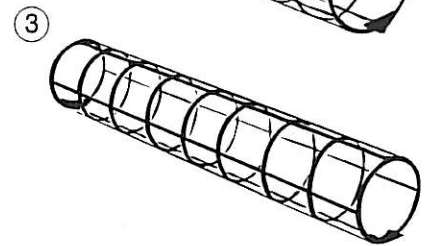
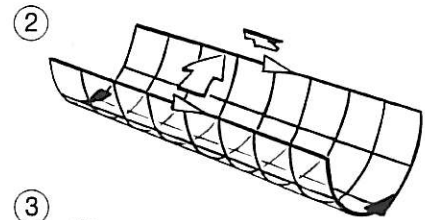
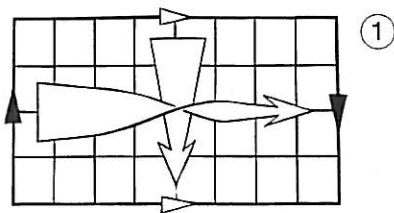
Die Kleinsche Flasche

Wir verlassen den dreidimensionalen Raum

Die Kleinsche Flasche wird so benannt nach dem Mathematiker F. Klein (1849–1925).

Wie entsteht die Kleinsche Flasche? (1–5)

Man verklebt die Längsseiten eines Rechtecks so, dass Punkte zur Deckung kommen, die sich direkt gegenüberliegen. Es entsteht so eine Röhre. Die Pfeilsymbole \triangleleft gelangen dabei zur Deckung. (1–3)



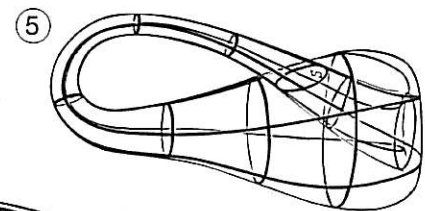
Dann verheften wir die beiden Schmalseiten wie beim Möbius-Band. So gelangen wieder die Pfeilsymbole \blacktriangleup zur Deckung. (4)

Wir geraten in Schwierigkeiten! (4)

Der beschriebene Entstehungsprozess lässt sich nicht durchführen, ohne dass eine Selbstdurchdringung entsteht!
Grund:

Die Kleinsche Flasche ist im vierdimensionalen Raum realisierbar, nicht aber im dreidimensionalen!

Nehmen wir eine Selbstdurchdringung in Kauf, so entsteht die folgende Fläche (5) (vgl. Modelle). Es handelt sich um ein Bild der Kleinschen Flasche im dreidimensionalen Raum.

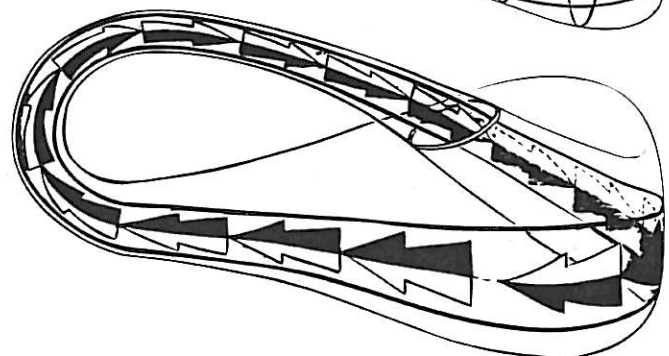


Die Kleinsche Flasche enthält ein Möbius-Band!

Dies bedeutet:

Die Kleinsche Flasche ist nicht orientierbar!

Die Kleinsche Flasche ist eine geschlossene, nicht orientierbare Fläche. Solche Flächen sind im dreidimensionalen Raum nicht realisierbar.



Die projektive Ebene

Eine weitere geschlossene, nicht orientierbare Fläche

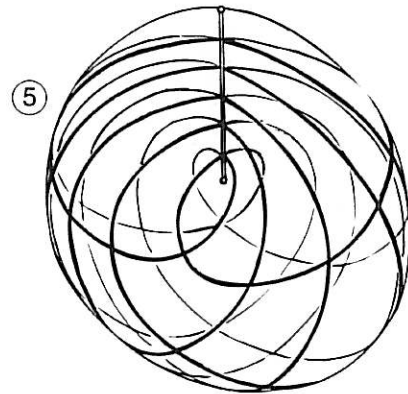
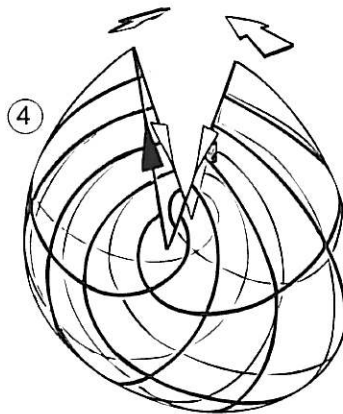
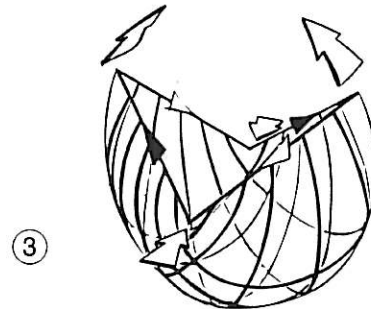
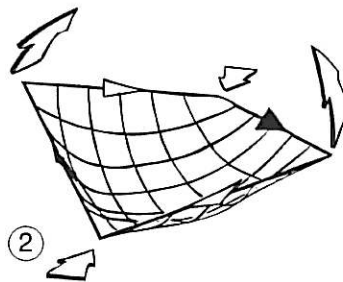
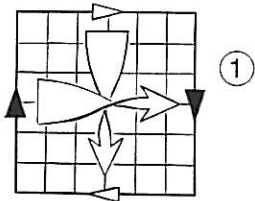
Eigentlich ist die projektive Ebene ein «geometrisches» Objekt.

Wir betrachten sie hier nur als «topologisches» Objekt.

Wie entsteht die projektive Ebene? (1-5)

Wir verkleben die sich gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats, nachdem wir jeweils eine dieser Seiten umgedreht haben.

Die Pfeilsymbole $\blacktriangle\blacktriangledown$ und $\blacktriangleright\blacktriangleleft$ kommen dabei zur Deckung.



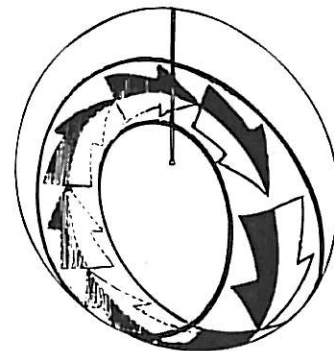
Das Kreuzhauben-Modell (5)

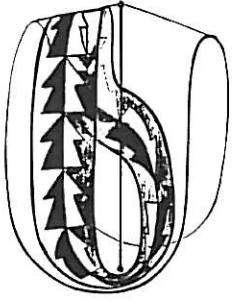
Wie bei der Kleinschen Flasche geraten wir auch hier in Schwierigkeiten. Die projektive Ebene lässt sich im dreidimensionalen Raum ebenfalls nicht realisieren. Nehmen wir eine Selbstdurchdringung in Kauf, so entsteht das sogenannte Kreuzhauben-Modell der projektiven Ebene.

Möbius-Bänder auf der projektiven Ebene

Die nebenstehende Skizze zeigt, dass die projektive Ebene ein Möbius-Band enthält. Also:

Die projektive Ebene ist nicht orientierbar!

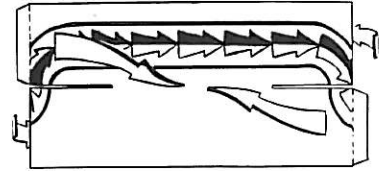




Whitney-Doppelschirm (vgl. Modell)

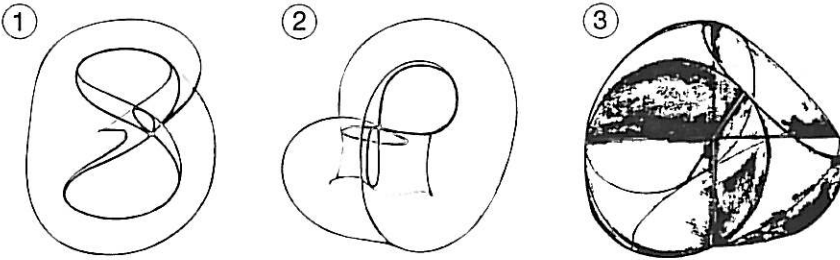
Entsteht, wenn man eine Umgebung der Selbstdurchdringung aus dem Kreuzhauben-Modell schneidet.

Der Whitney-Doppelschirm enthält ein Möbius-Band.



«Schnittmuster» zum Whitney-Doppelschirm

Weitere Bilder der projektiven Ebene (vgl. Modelle)



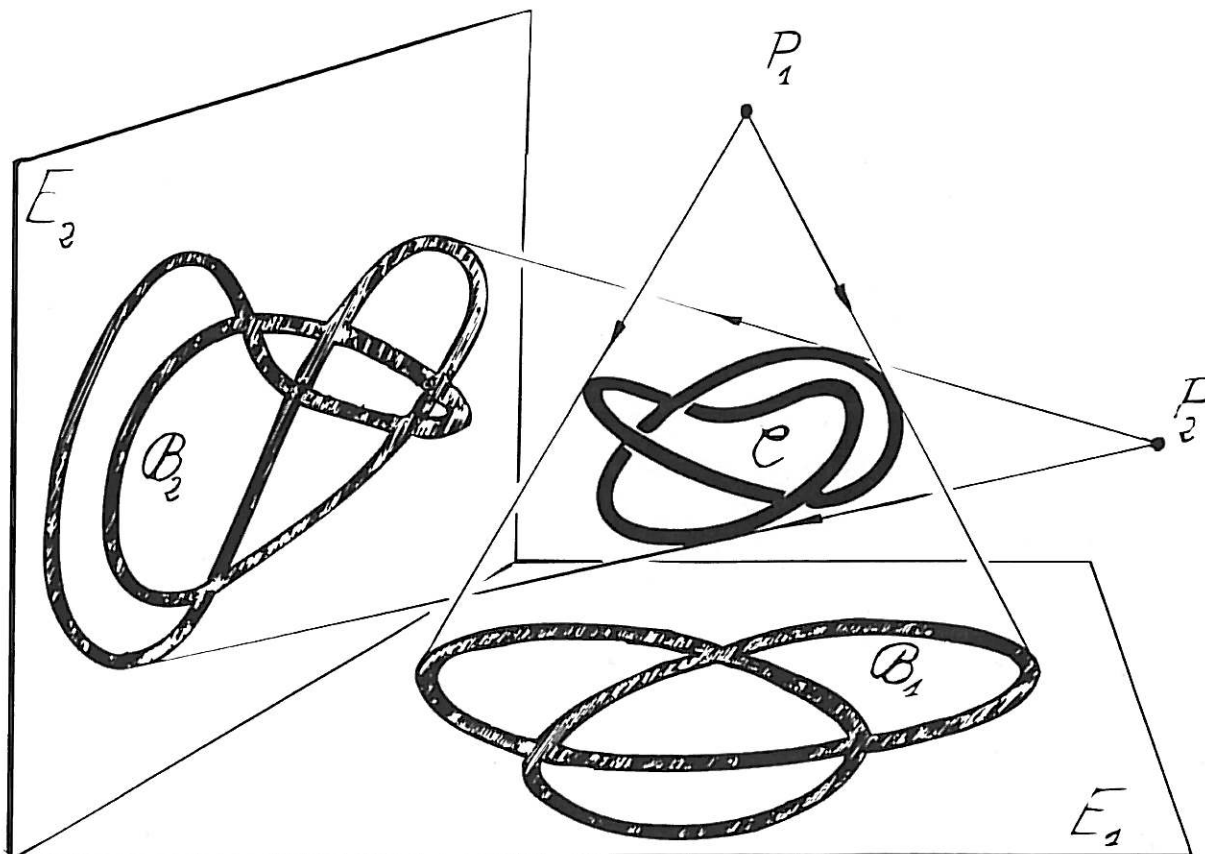
Nebst dem Kreuzhauben-Modell besitzt die projektive Ebene noch andere, sehr verschiedenartige Bilder im dreidimensionalen Raum.

- Wir zeigen drei Beispiele:
 1. Drei-Extremen-Modell
 2. Symmetrisches Modell
 3. Steinersche Römerfläche

Eine Analogie

Projiziert man ein Kurve C aus verschiedenen Punkten (P_1, P_2) auf geeignete Ebenen (E_1, E_2), so entstehen sehr verschiedenartige Bilder (B_1, B_2). Auf ähnliche Weise kommt die Verschiedenartigkeit der Bilder der projektiven Ebene im dreidimensionalen Raum zustande.

Die Kurve C ist ein sogenannter Kleeblatt-Knoten. Man beachte dazu die **Plastik von F. Lenzinger**. Zur Projektion des Kleeblatt-Knotens aus einem Punkt beachte man die **Projektionskuppel**.



TEIL B

Der Schritt zum Konzept

Aus der Suche nach dem Allgemeingültigen, das sich in den Spezialfällen manifestiert, entstehen die meisten Grundkonzepte der Mathematik.

Wir vollziehen den Schritt vom Speziellen zum Allgemeinen nach. Wir stellen nämlich das uns aus Teil A bereits vertraute Phänomen der Orientierbarkeit in den Rahmen eines allgemeinen Grundkonzepts. Es handelt sich dabei um

– die Arithmetisierung der Gestalt.

Als weiteres Beispiel zu diesem Konzept betrachten wir die Euler-Charakteristik.

Die Arithmetisierung der Gestalt

Geometrischen Objekten werden arithmetische Objekte zugeordnet

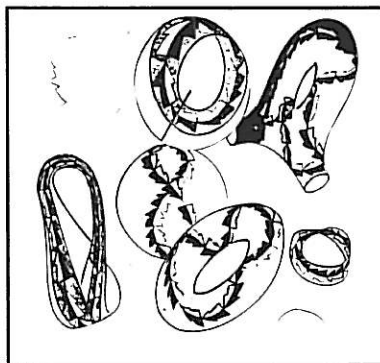
Was ist die Arithmetisierung der Gestalt?

Eine Arithmetisierung ordnet bestimmten geometrischen Objekten (wie z. B. Kurven, Flächen...) arithmetische Objekte zu. Ganze Zahlen etwa sind arithmetische Objekte.

Zweck der Arithmetisierung:

Anstelle der geometrischen Objekte werden die einfacheren arithmetischen Ersatzobjekte studiert.

geometrische Objekte



arithmetische Objekte

| | | |
|----|----|---|
| 1 | 3 | ± |
| 0 | -5 | |
| 28 | 6 | |
| 2 | 13 | 4 |




Die Orientierbarkeit liefert eine Arithmetisierung der Flächen!





Für eine Fläche X setzen wir:

$$\sigma(X) = \begin{cases} 0, & \text{falls } X \text{ orientierbar ist.} \\ 1, & \text{falls } X \text{ nicht orientierbar ist.} \end{cases}$$

Beispiele zur Arithmetisierung

$X \rightarrow \sigma(X)$:

| Fläche X | $\sigma(X)$ |
|---|-------------|
| Möbius-Band  | 1 |
| Kleinsche Flasche  | 1 |
| projektive Ebene  | 1 |

| Fläche X | $\sigma(X)$ |
|---|-------------|
| einfaches Band  | 0 |
| voll verdrehtes Band  | 0 |
| Kugel-fläche  | 0 |
| Torus-fläche  | 0 |

Die Euler-Charakteristik, eine weitere Arithmetisierung von Flächen

Die Euler-Charakteristik wird so benannt nach dem Mathematiker L. Euler (1707–1783).

Wir zerlegen eine geschlossene, orientierbare Fläche X vollständig in Vielecke. Dabei setzen wir:

s = Anzahl der Seitenflächen
 k = Anzahl der Kanten
 e = Anzahl der Ecken

Die Zahl

$$\chi(X) = s - k + e$$

hängt dann nicht von der gewählten Zerlegung ab! $\chi(X)$ ist die Euler-Charakteristik von X .

Die Zuordnung $X \mapsto \chi(X)$ definiert eine Arithmetisierung der geschlossenen (orientierbaren) Flächen.

Beispiel:

Für die Kugelfläche X gilt $\chi(X) = 2$.
 In der nebenan skizzierten Situation ist

$$s = 6, k = 9, e = 5$$

$$s - k + e = 2$$

Für den Fussball gilt (vgl. Modell)

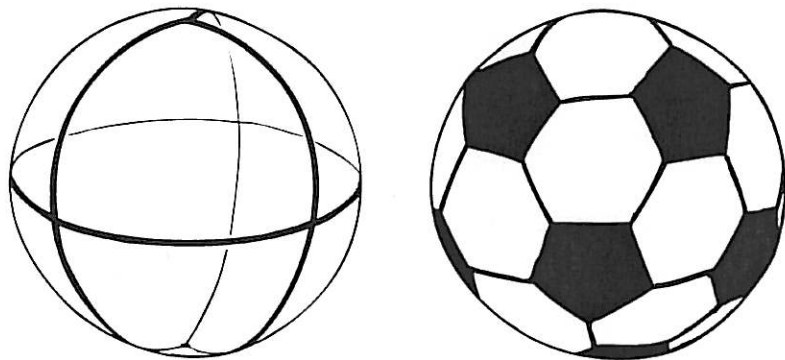
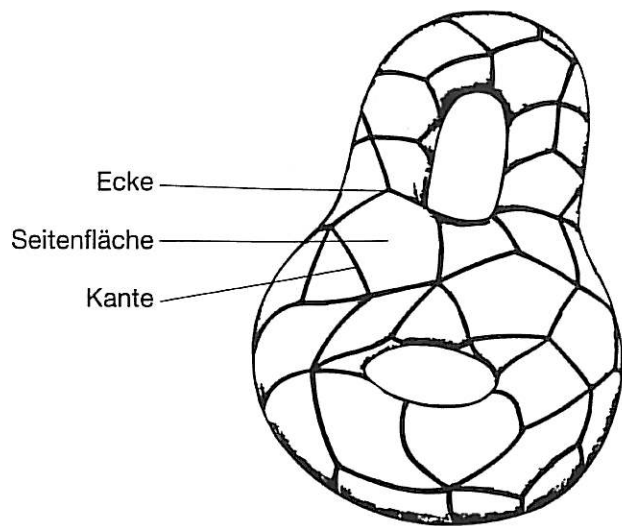
$$s = 12 + 20 = 32$$

(12 Fünfecke, 20 Sechsecke)

$$k = (12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) : 2 = 90$$

$$e = (12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) : 3 = 60$$

$$s - k + e = 32 - 90 + 60 = 2$$



Beispiel:

Reguläre Polyeder haben ebenfalls die Euler-Charakteristik 2.

| | | |
|------------|--|----------------------------------|
| Tetraeder | | $s = 4$ $k = 6$ $e = 4$ |
| Hexaeder | | $s = 6$ $k = 12$ $e = 8$ |
| Oktaeder | | $s = 8$ $k = 12$ $e = 6$ |
| Dodekaeder | | $s = 12$ $k = 30$ $e = 20$ |
| Ikosaeder | | $s = 20$ $k = 30$ $e = 12$ |

Weitere Beispiele:

| | |
|--|--|
| X $s = 6, k = 9, e = 3$ $\chi(X) = 6 - 9 + 3 = 0$ | X $s = 12, k = 24, e = 12$ $\chi(X) = 12 - 24 + 12 = 0$ |
| X $s = 12, k = 28, e = 14$ $\chi(X) = 12 - 28 + 14 = -2$ | X $s = 19, k = 51, e = 30$ $\chi(X) = 19 - 51 + 30 = -2$ |

TEIL C

Das Konzept in neuer Form

Eine Idee ist dann fundamental, wenn man in neuen Situationen immer wieder auf sie stösst.

Wir stellen jetzt die Idee der Arithmetisierung geometrischer Objekte in einer neuen Situation vor.
Als geometrische Objekte betrachten wir nicht mehr Flächen (wie in Teil B), sondern

– projektive algebraische Varietäten.

Diese Varietäten versehen wir mit einer Zusatzstruktur, mit sogenannten kohärenten Garben.
Diese neuen geometrischen Objekte sind Untersuchungsgegenstand der algebraischen Geometrie.
Wir arithmetisieren diese Objekte nicht durch Zahlen, sondern durch sogenannte

– kohomologische
Hilbert-Funktionen.

Projektive Varietäten

Wir wagen den Schritt in die algebraische Geometrie

Was untersucht die algebraische Geometrie?

Die algebraische Geometrie befasst sich mit den Lösungsräumen algebraischer Gleichungssysteme. Diese Lösungsräume nennt man

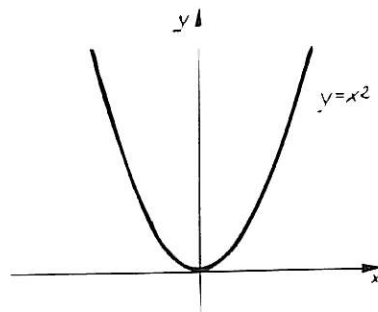
algebraische Varietäten.

Beispiel:

Die durch die Gleichung

$$y = x^2$$

definierte Parabel ist eine (reelle, affine) algebraische Varietät.



Der projektive Raum \mathbb{P}^r

Die Punkte des komplexen projektiven Raums \mathbb{P}^r der Dimension r lassen sich schreiben in der Form

$$p = (a_0 : a_1 : a_2 : \dots : a_r).$$

Dabei sind $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$ komplexe Zahlen, die nicht alle gleichzeitig 0 sind. Ist $\lambda \neq 0$ eine komplexe Zahl, so gilt auch $p = (\lambda a_0 : \lambda a_1 : \lambda a_2 : \dots : \lambda a_r)$.

Projektive Varietäten

Projektive algebraische Varietäten sind Lösungsgebilde von sogenannten homogenen algebraischen Gleichungssystemen. Beispiel eines solchen Gleichungssystems ist etwa:

$$\begin{aligned} z_1 z_4 - z_2 z_3 &= 0 \\ z_1^2 z_3 + z_0 z_1 z_2 - z_0 z_2^2 &= 0 \\ z_3^3 + z_0 z_3 z_4 - z_0 z_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

Das Lösungsgebilde X dieses Systems nennt man die durch das System definierte projektive Varietät. Dabei liegt X im projektiven Raum \mathbb{P}^4 und besteht aus allen Punkten $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4)$, für welche $z_0 = a_0, z_1 = a_1, z_2 = a_2, z_3 = a_3, z_4 = a_4$ eine Lösung des Gleichungssystems ist.

Beispiel:

Wir betrachten die projektive Varietät X , welche definiert wird durch

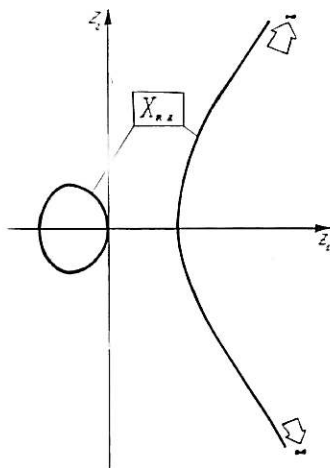
$$z_0 z_2^2 - z_1^3 + z_0^2 z_1 = 0.$$

Die Varietät X liegt in der komplexen projektiven Ebene \mathbb{P}^2 . Sie ist eine sogenannte ebene Kubik.

Setzen wir $z_0 = 1$, so erhalten wir die Gleichung

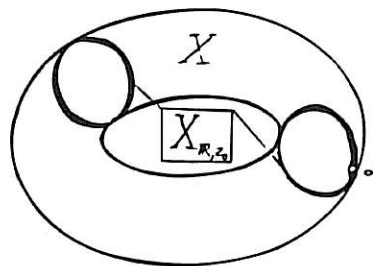
$$(*) \quad z_2^2 - z_1^3 + z_1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung entsprechen den Punkten $(a_0 : a_1 : a_2)$ von X , für welche $a_0 = 1$. Diese Punkte bilden den sogenannten affinen Teil X_{z_0} von X . Man erhält X aus X_{z_0} durch Hinzufügen des Punktes $\infty = (0 : 0 : 1)$.



Die reellen Lösungen der Gleichung (*) bilden den sogenannten

reellen affinen Teil X_{R, z_0} von X .



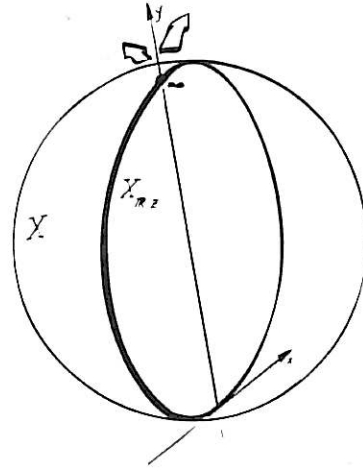
Dabei ist X selbst topologisch gesehen eine Torusfläche. Der reelle Teil X_R von X besteht aus zwei Kreisen. Entfernt man den Punkt ∞ aus X_R , so erhält man X_{R, z_0} .

Beispiel:

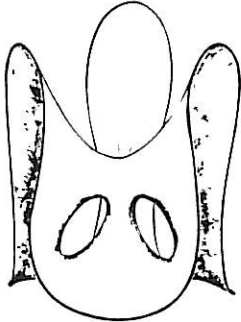
Die in \mathbb{P}^2 durch die Gleichung

$$z_0 z_2 - z_1^2 = 0$$

definierte projektive Varietät ist topologisch gesehen eine Kugelfläche. Der reelle affine Teil X_{R, z_0} dieser Varietät X ist die bereits erwähnte Parabel. Sie entsteht, indem man aus dem Kreis X_R den Punkt $\infty = (0 : 0 : 1)$ entfernt und den so geöffneten Kreis aufbiegt.

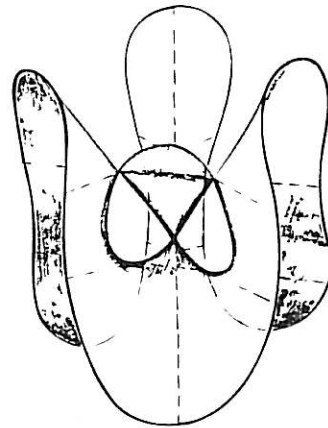


Beispiele: (vgl. Modelle)



reeller affiner Teil der Clebschen Diagonalfäche, welche definiert wird durch:

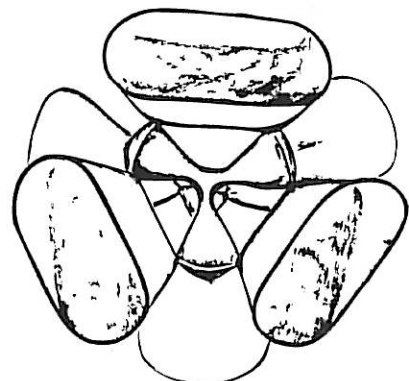
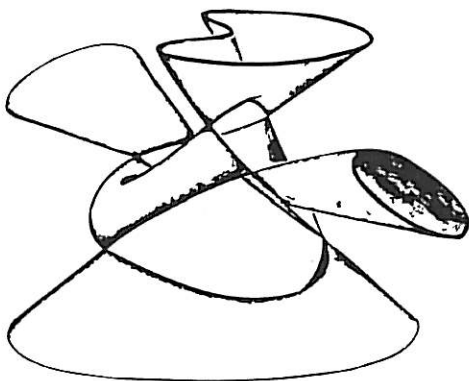
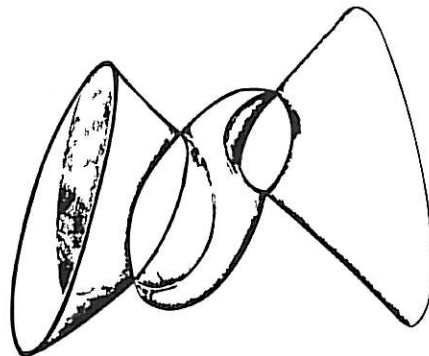
$$\begin{aligned} z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 &= 0 \\ z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= 0 \end{aligned}$$



reeller affiner Teil einer singulären kubischen Fläche. Diese Fläche entsteht aus der vorangehenden durch eine «algebraische» Deformation.

Beispiele: (vgl. Modelle)

reelle affine Teile dreier Kummer'scher Flächen. Diese Flächen werden so benannt nach dem Mathematiker E. Kummer (1856–1893).



TEIL D

Ein Blick in die Forschung

Eine Wissenschaft lebt nicht von den Antworten, die sie gibt, sondern von den Fragen, die sie stellt.

Wir werfen einen Blick dorthin, wo die Mathematik Fragen stellt und nach Antworten sucht: in die Forschung. Wir stellen dabei neue Resultate vor, bei welchen es um kohomologische Hilbert-Funktionen geht. Dabei handelt es sich um:

– a-priori-Schranken für kohomologische Hilbert-Funktionen

und um Ergebnisse über sogenannte

– Standard-Aufblasungen.

In beiden Gebieten bestehen zahlreiche offene Fragen, die von verschiedenen Mathematikern bearbeitet werden.

A-priori-Schranken für kohomologische Hilbert-Funktionen

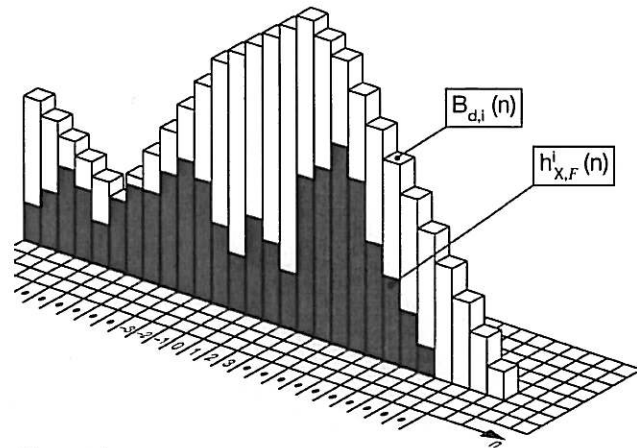
Ein aktuelles Forschungsprojekt

Zielsetzung:

Aus endlich vielen Daten des Paares (X, F) sollen die Funktionen $h^i_{X,F}$ abgeschätzt werden! Genauer: Sei X von der Dimension d und $0 \leq i \leq d$. Es soll aus den Ausgangsdaten für jede ganze Zahl n eine Zahl $B_{d,i}(n)$ berechnet werden, für welche gilt:

$$h^i_{X,F}(n) \leq B_{d,i}(n).$$

Die durch $n \mapsto B_{d,i}(n)$ definierte Funktion $B_{d,i}$ heisst eine Schrankenfunktion für $h^i_{X,F}$. Weil unsere Abschätzung für alle Paare (X, F) gelten soll, sprechen wir von a-priori-Schranken.



Schranken vom Diagonal-Typ

Wir gehen aus von den folgenden Daten des Paares (X, F) , die wir nicht weiter erklären wollen:

d = Dimension von X
 l = lineare Subdimension von F
 s = Subtiefe von X

Weiter setzen wir als bekannt voraus die Werte

$$c_0 = h^0_{X,F}(0), c_1 = h^1_{X,F}(-1), \\ c_2 = h^2_{X,F}(-2), \dots, c_d = h^d_{X,F}(-d)$$

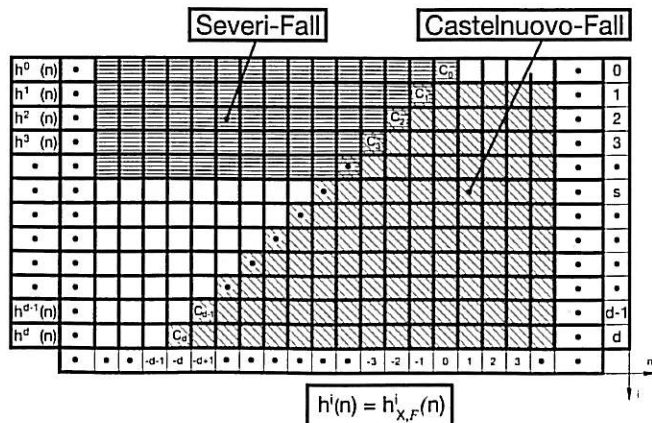
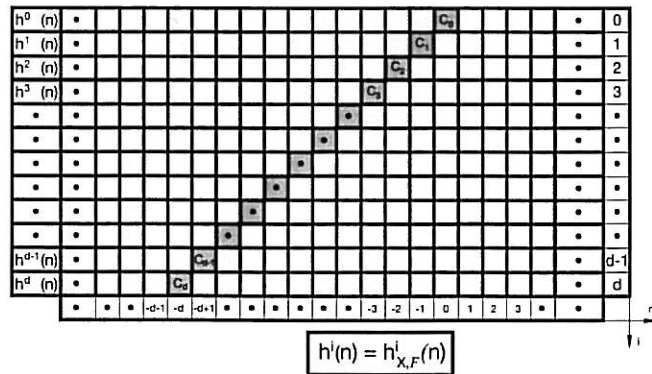
der Funktionen $h^i_{X,F}$ auf der Startdiagonalen. Aus den Werten d, l, s, c_0, \dots, c_d können nun Schrankenfunktionen $n \rightarrow B_{d,i}(n)$ berechnet werden.

Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

Castelnuovo-Fall: $0 \leq i \leq d, n \geq -i$
 Severi-Fall: $0 \leq i < s, n \leq -i$

Bemerkung:

Aus endlich vielen Daten des Paares (X, F) lassen sich die Funktionen $h^i_{X,F}$ im allgemeinen **nicht** genau berechnen.



Bemerkung:

Lange Zeit vor dem Bestehen der Kohomologietheorie bewiesen G. Castelnuovo (1865–1952) und F. Severi (1879–1961) Resultate, die man als Aussagen über die Funktionen $h^i_{X,F}$ für spezielle Paare (X, F) verstehen kann.

Der Castelnovo-Fall

In diesem Fall gilt

$$h_{X,F}^i(n) \leq B_{d,i}(l, s; c_1, \dots, c_d, n); \begin{matrix} 0 < i \leq d \\ n \geq -i \end{matrix}$$

Die gewählte Schreibweise deutet an, dass die Schrankenfunktion $B_{d,i}$ aus den Daten l, s, c_1, \dots, c_d berechnet wird. Dies geschieht mit Hilfe eines von uns entwickelten Algorithmus. Dieser Algorithmus ist für den Fall $i = 1$ nebenan festgehalten. (Wir schreiben \underline{c} für (c_1, c_2, \dots, c_d))

$$B_{d,i}(l, s; \underline{c}; n) := B^{(0)}(l, s; \underline{c}; n)$$

Für $r \geq d$: $B^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) = C^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) = 0$

Für $0 \leq r < d$: (Rekursions-Schritt)

$$B^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) := \begin{cases} t(n) := \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \binom{n}{s-j} + \sum_{m=0}^{n-s} B^{(r+1)}(l, s; \underline{c}; m) & \text{falls } \binom{n}{s} < C^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) \\ u(m) := [l(C^{(r+1)}(l, s; \underline{c}; 1) - 1) - n] \cdot C^{(r)}(l, s; \underline{c}; m) & \text{falls } C^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) \leq C^{(r+1)}(l, s; \underline{c}; n) \\ v(m) := [l(C^{(r+1)}(l, s; \underline{c}; 1) - (l-r) \binom{n+r}{s} - C^{(r+1)}(l, s; \underline{c}; n))]_{0,0} & \text{falls } C^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) > C^{(r+1)}(l, s; \underline{c}; n) \end{cases}$$

$$C^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid B^{(r)}(l, s; \underline{c}; n) = 0 \}$$

Bemerkung:

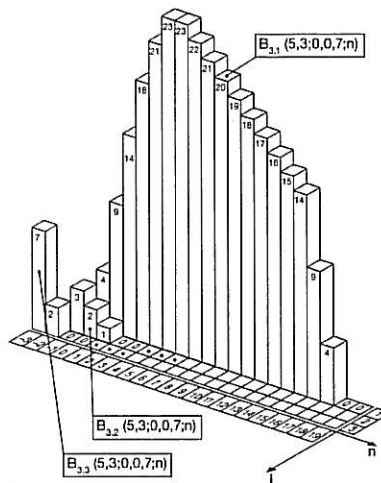
Im Severi-Fall bestehen ähnliche Algorithmen!

Beispiel:

Im Fall

$$\begin{matrix} d = 3, l = 5, s = 3 \\ c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 7 \\ i = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

erhält man die nebenan graphisch dargestellten Schrankenfunktionen.



Die Castelnovo-Regularität

Eine besonders wichtige Größe eines Paares (X, F) ist seine

$$\text{Castelnovo-Regularität } \text{reg}(X, F).$$

Es handelt sich um die kleinste ganze Zahl r mit

$$h_{X,F}^i(n-i) = 0; \quad \begin{matrix} \text{für alle } i > 0 \\ \text{für alle } n \geq r \end{matrix}$$

Eine anschauliche Beschreibung von $\text{reg}(X, F)$ ist in der nebenstehenden Graphik gegeben.

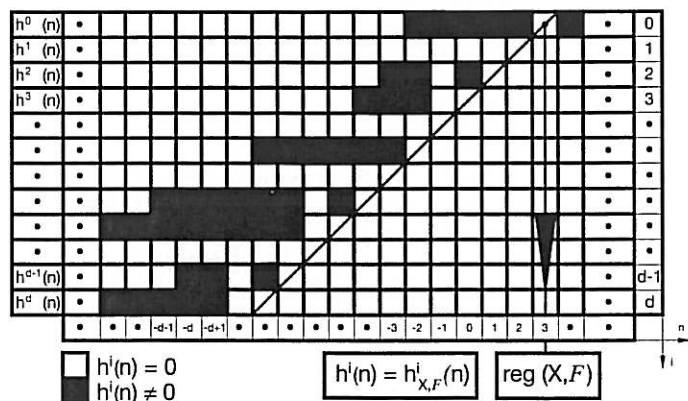
Eine a-priori-Schranke für die Castelnovo-Regularität

Unsere Berechnungen liefern eine Schranke für die Castelnovo-Regularität $\text{reg}(X, F)$ eines Paares (X, F)

$$\text{reg}(X, F) = C_d(l, s; c_1, \dots, c_d) + 1$$

wobei

$$C_d(l, s; c_1, \dots, c_d) := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid B_{d,1}(l, s; c_1, \dots, c_d; n) = 0 \}$$



Beispiel:

Im schon oben betrachteten Fall

$$d = 3, l = 5, s = 3, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 7$$

ergibt sich die Abschätzung

$$\text{reg}(X, F) \leq 19$$

Standard-Aufblasungen

Eine Klasse von Varietäten, deren Kohomologie exakt berechnet werden kann

Wie entsteht eine Aufblasung?

Aus einer algebraischen Varietät X entfernt man eine Teilvarietät Z und setzt an deren Stelle eine neue Varietät T ein.

Dabei heisst

Z das Zentrum der Aufblasung, T die Ausnahmevarietät.

Bemerkung:

Wie T anstelle von Z in X eingesetzt wird, beschreibt man auf algebraische Weise. Wir wollen hier darauf nicht weiter eingehen.

Aufblasungen der affinen Ebene

Um uns ein Bild davon zu machen, was Aufblasungen sind, betrachten wir den Spezialfall, wo X die affine Ebene A^2 ist. (Die Punkte von A^2 werden beschrieben durch Paare (a_1, a_2) komplexer Zahlen).

Wählt man zwei Polynome f und g in den zwei Variablen z_1, z_2 , so kann man eine Aufblasung

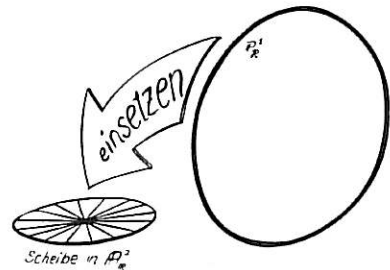
$$Bl_{A^2}(f,g)$$

von A^2 definieren.

Ist der Punkt $(0,0)$ die einzige gemeinsame Nullstelle von f und g , so ist er das Zentrum der Aufblasung. Die Ausnahmevarietät ist dann die projektive Gerade P^1 .

Der reelle Teil $P^1_{\mathbb{R}}$ ist ein Kreis! So erhält man ein Bild des reellen Teiles $Bl_{A^2}(f,g)_{\mathbb{R}}$ unserer Aufblasung, indem man den Mittelpunkt einer Kreisscheibe durch eine Kreislinie ersetzt.

Wie die Kreislinie in die Scheibe eingesetzt wird, hängt ab von den gewählten



Beispiele: (vgl. Modelle)

Wir betrachten $Bl_{A^2}(f,g)_{\mathbb{R}}$ für einige Paare (f,g) von Polynomen.

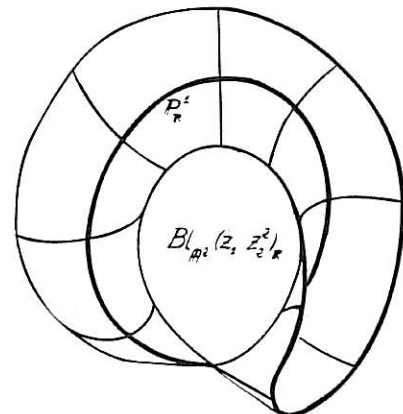
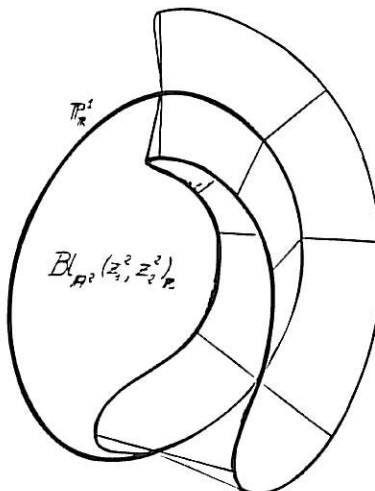
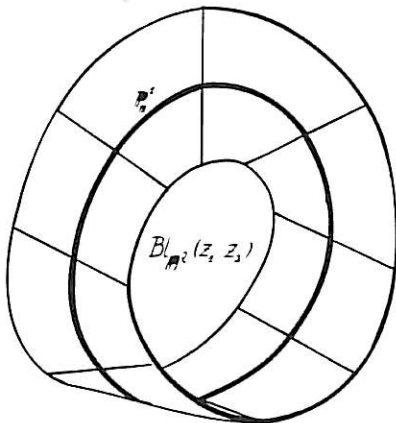
$$f = z_1, g = z_2$$

(vgl. Möbius-Band)

$$f = z_1^2, g = z_2^2$$

(vgl. Whitney-Doppelschirm)

$$f = z_1, g = z_2^2$$



Standard-Aufblasung

Wir betrachten eine Varietät X und eine auf X definierte kohärente Garbe F . Wir nehmen an, X sei von der Dimension $d > 1$.

Ist p ein Punkt von X , so lässt sich dem Paar (X, F) ein algebraisches Objekt $H_p^i(X, F)$ zuordnen, die sogenannte i -te lokale Kohomologie-Gruppe von X in p mit Koeffizienten in F ; ($i = 0, 1, 2, \dots$). Wir nehmen an die sogenannten

$$\text{Längen } \lambda_i \text{ von } H_p^i(X, F)$$

seien endlich für $i = 0, 1, \dots, d - 1$.

Berechnung der Kohomologie

Die Kohomologie der Standard-Aufblasungen lässt sich berechnen. Insbesondere lassen sich die kohomologischen Hilbert-Funktionen $h_{T, \tilde{F}}^i$ berechnen, und zwar aus den Größen

$$d, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, w$$

Dabei steht w für eine weitere Kennzahl von \tilde{X} , die sogenannte Länge von F auf dem Zentrums-Schema.

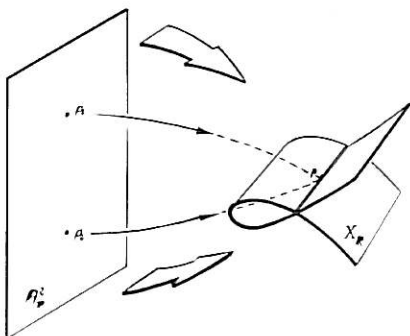
Es gelten die nebenstehenden Formeln.

Beispiel:

Wir betrachten die Varietät X , welche definiert wird durch

$$\begin{aligned} z_1 z_4 - z_2 z_3 &= 0 \\ z_1^2 z_3 + z_1 z_2 - z_2^2 &= 0 \\ z_3^3 + z_3 z_2 - z_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält X , indem man die Ebene A^2 so biegt, dass zwei Punkte p_1, p_2 zu einem Punkt p zusammenfallen. Dies geht nur im Vierdimensionalen!



In dieser Situation kann man spezielle Aufblasungen von X (mit dem Zentrum p) definieren, die

$$\text{Standard-Aufblasungen } \tilde{X} \text{ von } X \text{ bezüglich } F.$$

Auf \tilde{X} erhält man dann eine kohärente Garbe, die

$$\text{Modifikation } \tilde{F} \text{ von } F.$$

Auf der Ausnahmearietät T der Aufblasung erhält man eine weitere kohärente Garbe, die

$$\text{Ausnahmegarbe } \bar{F} \text{ von } F.$$

$$h_{T, \tilde{F}}^0(m) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m < -1. \\ \lambda_1 & , \text{ falls } m = -1. \\ w - \lambda_0 & , \text{ falls } m = 0. \\ \binom{m+d-1}{d-1} w - \sum_{j=0}^{d-1} \binom{m+d-1}{j} \lambda_j & , \text{ falls } m > 0. \end{cases}$$

$$h_{T, \tilde{F}}^i(m) = \begin{cases} \lambda_{i+1} & , \text{ falls } m = -i-1. \\ 0 & , \text{ falls } m \neq -i-1. \end{cases} \text{ für } i = 1, 2, 3, \dots, d-2.$$

$$h_{T, \tilde{F}}^{d-1}(m) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m > -d. \\ \binom{m+d-1}{d-1} w - \sum_{j=0}^{d-1} \binom{m+d-1}{j} \lambda_j & , \text{ falls } m \leq -d. \end{cases}$$

$$h_{T, \tilde{F}}^i(m) = 0, \text{ für } i \geq d.$$

Beispiel:

$$d = 3; \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1; w = 12$$

| n | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| $h_{T, \tilde{F}}^0(n)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 10 | 19 | 31 | 46 | 64 | 85 | 109 | 136 |
| $h_{T, \tilde{F}}^1(n)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $h_{T, \tilde{F}}^2(n)$ | 19 | 10 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Zu X gibt es eine Standardaufblasung \tilde{X} , deren reeller Teil im Dreidimensionalen das folgende Bild hat:

