

Markus Brodmann

# Algebraische Geometrie – eine Einführung

Basler Lehrbücher Band 1 (1989) Birkhäuser Verlag Basel-Boston-Berlin  
ISBN 3-7643-1779-5

Diese Einführung in die algebraische Geometrie richtet sich an Studierende mittlerer und höherer Semester. Vorausgesetzt werden lediglich die im ersten Studienjahr erworbenen Grundkenntnisse. Ausgehend von den affinen Hyperflächen werden beliebige affine und schliesslich projektive Varietäten untersucht. Die benötigte Algebra wird dabei laufend entwickelt. Schwerpunkte des Buches sind die Dimensions- und Morphismentheorie, die Multiplizitätstheorie sowie der Gradbegriff. Zahlreiche Beispiele sollen dem Leser helfen, sich über die konkrete Bedeutung des Stoffes klar zu werden.

470 Seiten, 79 Illustrationen.

Inhalt:

## ***I. Affine Hyperflächen***

- 1. Algebraische Mengen:* Nullstellengebilde von Polynomen. Der Kreis im Komplexen. Komplexe, reelle und rationale Nullstellen.
- 2. Elementare Eigenschaften von Polynomen:* Der Identitätssatz für Polynome. Homogene Teile von Polynomen. Taylor-Entwicklung und Vielfachheit. Zerlegung in Linearfaktoren. Stetigkeit der Nullstellen.
- 3. Vielfachheit und Singularitäten:* Vielfachheit von Punkten auf Hyperflächen. Die Neillsche Parabel. Zur Entstehung von Singularitäten. Die Schnittvielfachheit mit Geraden.
- 4. Tangentialkegel und Grad:* der Begriff der Tangente. Der Tangentialkegel. Die Vielfachheit von Tangenten. Einige Flächen im komplexen affinen Raum der Dimension drei. Tangentialkegel ebener Kurven. Grad und Schnittvielfachheit.

## ***II. Affine Varietäten***

- 5. Der Polynomring:* Ringe. Ideale. Noethersche Ringe. Der Nullstellensatz. Zerlegung in Primfaktoren.
- 6. Zariski-Topologie und Koordinatenringe:* Die Zariski-Topologie. Noethersche Räume. Zerlegung in irreduzible Komponenten. Reguläre Funktionen. Der Koordinatenring einer affinen algebraischen Menge. Der relative Standpunkt.
- 7. Morphismen:* Der Begriff des Morphismus. Quasiaffine und affine Varietäten. Dominante Morphismen. Beispiele von Morphismen. Nenneraufnahme. Reguläre Funktionen und elementare offene Mengen. Affine Morphismen.
- 8. Lokale Ringe, Produkte:* Funktionskeime und lokale Ringe. Lokalisierung von Ringen. Die lokale Struktur quasiaffiner Varietäten. Produkte von quasiaffinen Varietäten. Produkte von Morphismen. Die Diagonaleinbettung.

## ***III. Endliche Morphismen und Dimension***

- 9. Ganze Erweiterungen:* Ein Beispiel zur Problematik des Dimensionsbegriffs. Moduln.

Noethersche Moduln. Ganze Erweiterungen. Ideale und ganze Erweiterungen. Primidealketten und ganze Erweiterungen. Normale Ringe. Ganze Erweiterungen von normalen Ringen. Endliche Morphismen.

10. *Dimensionstheorie*: Der Transzendenzgrad. Das Normalisationslemma. Der Kettensatz. Die Dimension. Moduln endlicher Länge. Höhen und Kodimension. Zur Dimensionstheorie noetherscher Ringe.
11. *Topologische Eigenschaften von Morphismen*: Der Hauptsatz über Morphismen. Konstruierbare Mengen. Parametersysteme. Die Faserdimension. Normale Varietäten. Morphismen und starke Topologie.
12. *Quasiendliche und birationale Morphismen*: Quasiendliche Morphismen. Rationale Funktionenkörper. Der Grad eines quasiendlichen Morphismus. Die Diskriminante. Fasern von quasiendlichen Morphismen. Birationale Morphismen. Die Normalisierung einer Varietät. Der normale Ort einer Varietät. Reduziertheit von Fasern. Verzweigkeit von Morphismen.

#### ***IV. Tangentialraum und Multiplizität***

13. *Der Tangentialraum*: Tangentialvektoren und Richtungsableitungen. Tangentialraum und Differentiale. Die Einbettungsdimension. Die Rolle des lokalen Ringes. Tangentialräume von Fasern. Reguläre und singuläre Punkte. Normale und reguläre Punkte. Das Normalitätskriterium.
14. *Stratifikation*: Strata von Varietäten. Strata als analytische Mannigfaltigkeiten. Determinantenvarietäten.
15. *Hilbert-Samuel-Polynome*: Graduierte Ringe und Moduln. Homogene Ringe. Assoziierte Primideale. Torsionsmoduln und Quasi-Nichtnullteiler. Homogene  $K$ -Algebren. Das Hilbert-Polynom. Rees-Ringe und graduierte Ringe zu Idealen. Hilbert-Samuel-Polynome und Multiplizität. Dimension und Additivität.
16. *Multiplizität und Tangentialkegel*: Das Hilbert-Samuel-Polynom für einen Punkt. Der Multiplizitätsbegriff für Punkte. Multiplizität und Regularität. Affine algebraische Kegel. Tangentialkegel. Tangenten und deren Vielfachheit.

#### ***V. Projektive Varietäten***

17. *Der projektive Raum*: Der Begriff des projektiven Raums. Der kanonische affine Atlas. Zariski-Topologie und affine Kegel. Projektiver Abschluss und Fernpunkte. Homogener Koordinatenring und graduierte Verschwindungsideale. Homogenisierung und Dehomogenisierung. Dimensionstheorie im projektiven Raum.
18. *Morphismen*: Reguläre Funktionen. Quasiprojektive Varietäten und Morphismen. Topologische Eigenschaften quasiprojektiver Varietäten. Morphismen aus projektiven Varietäten. Die lokale Struktur quasiprojektiver Varietäten. Segre-Einbettungen und Produkte. Verones-Einbettungen. Elementare affine Teilmengen projektiver Varietäten. Lokale Ringe in irreduziblen Mengen. Endliche Morphismen und affine Kegel. Normalisierung Quasiprojektiver Varietäten.
19. *Grad und Schnittvielfachheit*: Der Grad einer projektiven Varietät. Das homogene Normalisationslemma, generische Projektionen. Grad und generische Projektionen. Der Begriff der Schnittvielfachheit. Der Zusammenhang zwischen Grad und Schnittvielfachheit.
20. *Ebene projektive Kurven*: Der Satz von Bézout für zwei homogene Polynome. Die Verzweigungsordnung. Eine ebene Kubik. Tangenten und Wendepunkte. Die Hesse-Form. Die Gruppenstruktur der kubischen Kurven.

## **VI. Garben**

21. *Grundbegriffe der Garbentheorie:* Der Garbengegriff. Halme. Homomorphismen. Untergarben und Restklassengarben. Exakte Sequenzen. Einschränkung auf offene Untermengen. Direkte Bilder.
22. *Kohärente Garben:* Moduln und Nenneraufnahme. Induzierte Garben über affinen Varietäten. Quasikoherente und kohärente Garben. Kriterien für die Kohärenz. Lokal freie Garben.
23. *Tangentialfelder und Kähler-Differentiale:* Homomorphismen-Garben. Duale Garben. Die Tangentialgarbe. Die Garbe der Kähler-Differentiale. Die Beziehung zur Tangentialgarbe.
24. *Die Picard-Gruppe:* Tensorprodukte von Moduln. Tensorprodukte von Garben. Invertierbare Garben und die Picard-Gruppe. Zur Picard-Gruppe affiner Varietäten.
25. *Kohärente Garben über projektiven Varietäten:* Verdrehte Strukturgarben. Einbettung in die Picard-Gruppe. Verdrehte kohärente Garben. Totale Schnittmoduln. Induzierte Garben. Schnittmoduln induzierter Garben. Der Endlichkeitssatz. Hilbertpolynom und Grad für kohärente Garben. Ein lokales Verschwingungskriterium für die globalen Schnitte hinreichend negativ verdrehter kohärenter Garben.