Vorkurs UZH 2020

Mathematik Rechenfertigkeiten

Lösungen zu den Übungen Freitag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich
Erstellt von Dr. Irmgard Bühler (Überarbeitung: Dr. Dominik Tasnady)

August 2020

Integration, Teil 1

1. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

   a) $\int 3x^2 \; dx$

   Lösung: $\int 3x^2 \; dx = x^3 + C$ □

   b) $\int x^2 + 3 \; dx$

   Lösung: $\int x^2 + 3 \; dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$ □

   c) $\int x^3 + ax \; dx$ für a konstant.

   Lösung: $\int x^3 + ax \; dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{2}x^2 + C$ □

2. Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

   a) $\int_{-2}^{1} x^4 - 5 \; dx$

   Lösung:

$$\int_{-2}^{1} x^4 - 5 \; dx = \frac{1}{5}x^5 - 5x \Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - 5 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - 5 \cdot (-2)\right) = -8.4$$

□

   b) $\int_{1}^{3} x^2 - 4x \; dx$

   Lösung:

$$\int_{1}^{3} x^2 - 4x \; dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \Bigg|_{1}^{3} = \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2\right) = -7.33$$

□

   c) $\int_{5}^{10} \frac{1}{x} \; dx$

   Lösung:

$$\int_{5}^{10} \frac{1}{x} \; dx = \ln(x) \Bigg|_{5}^{10} = \ln(10) - \ln(5) = \ln\left(\frac{10}{5}\right) = \ln(2) = 0.69$$

□

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\ dx$

Lösung:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\ dx = -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = 0$$

□

3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x(x^2+3)\, dx$

Lösung: $\int x(x^2+3)\, dx = \int x^3 + 3x\ dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$ □

b) $\int 3\sin(x)\, dx$

Lösung: $\int 3\sin(x)\, dx = 3\int \sin(x)\ dx = -3\cos(x) + C$ □

c) $\int \cos(x) + \frac{1}{x} + e^x\, dx$

Lösung:
$$\int \cos(x) + \frac{1}{x} + e^x\, dx = \int \cos(x)\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx + \int e^x\, dx = \sin(x) + \ln|x| + e^x + C$$

□

d) $\int \sqrt{x}\, dx$

Lösung: $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ □

e) $\int \frac{1}{x}\, dx$

Lösung: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$ □

f) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Lösung: $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$ □

4. Bestimmen Sie a, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

a) $\int_0^2 ax^2 - 2ax\, dx = -\frac{8}{3}$

Lösung: Zuerst berechnen wir das Integral auf der linken Seite:

$$\int_0^2 ax^2 - 2ax\,dx = \frac{ax^3}{3} - ax^2 \Big|_0^2 = \left(\frac{8a}{3} - 4a\right) - 0 = -\frac{4a}{3}$$

Damit erhalten wir folgende Gleichung:

$$-\frac{4a}{3} = -\frac{8}{3} \quad\Longrightarrow\quad a = 2$$

$\square$

b) $\displaystyle\int_1^a ax + 2\,dx = 16$

Lösung: Zuerst berechnen wir das Integral auf der linken Seite:

$$\int_1^a ax + 2\,dx = \frac{ax^2}{2} + 2x \Big|_1^a = \left(\frac{a^3}{2} + 2a\right) - \left(\frac{a}{2} + 2\right) = \frac{a^3}{2} + \frac{3a}{2} - 2$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{a^3}{2} + \frac{3a}{2} - 2 = 16 \quad\Longrightarrow\quad a^3 + 3a - 36 = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = 3$$

$\square$

5. Integrieren Sie ein allgemeines Polynom von der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen sind.

Lösung: Da $\displaystyle\int a_i x^i\,dx = \frac{a_i}{i+1}x^{i+1} + C$, erhalten wir

$$\int a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$$

$\square$

6. Zeichnen Sie die Kurve mit der Gleichung $y = 3x^2$ und betrachten Sie die Fläche, die begrenzt wird durch diese Kurve, die x-Achse und die Geraden $x = 0$ und $x = 1$. Zerlegen Sie die Fläche in n Streifen der Breite $\frac{1}{n}$ und berechnen Sie die Ober– und Untersummen O_n und U_n für $n = 1, 2$ und 3 sowie für ein allgemeines n. Was ist der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$, bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$?

a) *Lösung:* $U_1 = 0$, $O_1 = 3$; $U_2 = \frac{3}{4}$, $O_2 = \frac{9}{4}$; $U_3 = \frac{5}{9}$, $O_3 = \frac{14}{9}$
Eine ausführliche Berechnung geht analog (aber viel einfacher) wie in b). $\square$

b) *Lösung:*

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot 3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot 3\cdot\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{1}{n^3}\cdot 3\cdot\left(\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot 3\cdot\left(\frac{2n^3+3n^2+n)}{6}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} O_n=\lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=1.$$

Auf die gleiche Art und Weise erhalten wir für die innere Treppenfläche

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{1}{n}\cdot 3\cdot 0^2+\frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot 3\cdot\left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot 3\cdot\left(0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right)\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot 3\cdot\left(\frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)
\end{aligned}$$

und für den Limes

$$\lim_{n\to\infty} U_n=\lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=1.$$

Die zwei Grenzwerte stimmen überein, und somit erhalten wir $\displaystyle\int_0^1 3x^2\,dx=1.$

□

Integration, Teil 2

1. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen der Funktion f sowie der x-Achse eingeschlossen wird.

   a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

   Lösung. Berechne zuerst die Nullstellen: $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x-3)(x+1) = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$. Damit sind die beiden Integrale

   $$\int_{-1}^{0} x^3 - 2x^2 - 3x \, dx \quad \text{und} \quad \int_{0}^{3} x^3 - 2x^2 - 3x \, dx$$

   zu berechnen. Es gilt

   $$\int_{-1}^{0} x^3 - 2x^2 - 3x \, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \Big|_{-1}^{0} = \frac{7}{12}$$

   Ebenso:

   $$\int_{0}^{3} x^3 - 2x^2 - 3x \, dx = -11.25$$

   Das zweite Integral ist negativ, da der Graph dort unterhalb der x-Achse verläuft. Für die Flächenberechnung muss das Minuszeichen jedoch ignoriert werden. Die Gesamtfläche ist also $\frac{7}{12} + 11.25 = \frac{71}{6}$. □

   b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ Berechne zuerst die Nullstellen: $x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2 = 0$, also $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Diese Berechnung kann zum Beispiel mit Hilfe einer 'erratenen' Lösung und der Polynomdivision erfolgen. Damit ist folgendes Integral zu berechnen:

   $$\int_{-1}^{2} x^3 - 3x^2 + 4 \, dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \Big|_{-1}^{2} = 6.75$$

   Dieser Wert entspricht gerade der Fläche, welche vom Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird.

2. Berechnen Sie die Fläche, welche von den Graphen der beiden Funktionen f und g eingeschlossen wird.

   a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

   Lösung. Berechne zuerst die Schnittpunkte: $x = x^2$, also $x^2 - x = 0$ und somit $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Damit ist folgendes Integral zu berechnen:

   $$\int_{0}^{1} x - x^2 \, dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{6}$$

Der Grund, weshalb $x - x^2$ und nicht $x^2 - x$ integriert werden muss, ist, dass im Bereich $0 \leq x \leq 1$ die Funktion f oberhalb von g verläuft. Daher ist $f(x) - g(x) = x - x^2$ in diesem Bereich positiv. Würde man $x^2 - x$ integrieren, so erhielte man dasselbe Resultat, jedoch mit einem Minus davor. Dieses könnte man dann einfach weglassen, wenn man die Fläche berechnen möchte. Dies ist vor allem dann hilfreich, wenn man nicht genau weiss, wie die Kurven liegen. Es ist allerdings immer leicht herauszufinden, welche Kurve oberhalb verläuft, indem man einfach einen geeigneten Wert (im relevanten Bereich) in beide Funktionen einsetzt und die Werte vergleicht. □

b) $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^3 - 9x$

Lösung. Berechne zuerst die Schnittpunkte: $x^2 - 9 = x^3 - 9x$, also $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$ und somit $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$. Im Bereich $-3 \leq x \leq 1$ ist $g(x) \geq f(x)$. Dies sieht man, indem man zum Beispiel 0 einsetzt: $f(0) = -9$, $g(0) = 0$. Andererseits gilt $g(x) \leq f(x)$ im Bereich $1 \leq x \leq 3$. Damit sind folgende Integrale zu berechnen:

$$\int_{-3}^{1} (x^3 - 9x) - (x^2 - 9)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{1}^{3} (x^2 - 9) - (x^3 - 9x)\,dx$$

Es gilt

$$\int_{-3}^{1} (x^3 - 9x) - (x^2 - 9)\,dx = \int_{-3}^{1} x^3 - x^2 - 9x + 9\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x\,\bigg|_{-3}^{1} = \frac{128}{3}$$

Analog erhält man:

$$\int_{1}^{3} (x^2 - 9) - (x^3 - 9x)\,dx = \frac{20}{3}$$

Damit ist die Gesamtfläche $\frac{128}{3} + \frac{20}{3} = \frac{148}{3}$. □

3. Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche, welche durch den Graphen der Funktion, der x–Achse und den vertikalen Linien $x = a$ und $x = b$ beschränkt wird.

a) $f(x) = e^x, \quad a = -1, \quad b = 1$

Lösung. Die Funktion f hat keine Nullstellen (ist überall positiv). Daher können wir die Fläche berechnen, indem wir folgendes Integral bestimmen:

$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx = e^x \bigg|_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e} = 2.35$$

□

b) $g(x) = 2\cos(x), \quad a = -\pi, \quad b = \pi$

Lösung. Die Funktion g hat Nullstellen bei $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$. Daher können wir die Fläche berechnen, indem wir folgende Integrale bestimmen:

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -2\cos(x)\ dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -2\cos(x)\ dx$$

Jeweils dort, wo die Funktion g negativ ist, muss sie mit einem Minuszeichen davor versehen werden, damit das Integral positiv wird. Man könnte alternativ auch das Minuszeichen des Resultats weglassen. Es gilt nun:

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -2\cos(x)\ dx = -2\sin(x)\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(-\pi) = 2$$

Die anderen Integrale gehen analog. Insgesamt ist die Summe der Integrale und damit die gesuchte Fläche 8.

□

Integration, Teil 3

1. Berechnen Sie mit der partiellen Integration die folgenden Integrale:

a) $\int x\cos(x)\,dx$

Lösung.

Setze $f(x) = x$, $g'(x) = \cos(x)$. Dann folgen $f'(x) = 1$ und $g(x) = \sin(x)$. Somit folgt mit der Formel

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

□

b) $\int u\ln(|u|)\,du$

Lösung. Setze $f(u) = \ln|u|$, $g'(u) = u$. Dann folgen $f'(u) = \frac{1}{u}$ und $g(x) = 1/2 \cdot u^2$. Somit folgt mit der Formel

$$\int u\ln|u|\;du = \frac{1}{2}u^2\ln|u| - \int \frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}u^2\ln|u| - \frac{1}{4}u^2 + C$$

□

c) $\int \frac{(\ln(|x|))^2}{x}\,dx$

Lösung. Setze $f(x) = (\ln|x|)^2$, $g'(x) = \frac{1}{x}$. Dann folgen $f'(x) = 2\ln|x| \cdot \frac{1}{x}$ und $g(x) = \ln|x|$. Somit folgt mit der Formel

$$\int \frac{(\ln|x|)^2}{x}\,dx = (\ln|x|)^3 - \int 2\ln(|x|) \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln(|x|)\,dx$$

Die führt auf die Gleichung

$$3\int \frac{(\ln(|x|))^2}{x}\,dx = (\ln|x|)^3 \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{(\ln(|x|))^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln|x|)^3 + C$$

□

d) $\int \sin^3(t)\,dt$

Lösung. Setze $f(t) = \sin^2(t)$, $g'(t) = \sin(t)$. Dann folgen $f'(t) = 2\sin(t)\cos(t)$ und $g(t) = -\cos(t)$. Mit der Formel folgt dann

$$\int \sin^3(t)\,dt = -\cos(t)\sin^2(t) - \int -2\sin(t)\cos^2(t)\,dt = -\cos(t)\sin^2(t) + 2\int \sin(t)\cos^2(t)\,dt$$

Hier verwenden wir $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, also $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$. Dann wird das letzte Integral zu

$$\int \sin(t)(1 - \sin^2(t))\, dt = \int \sin(t) - \sin^3(t)\, dt = -\cos(t) - \int \sin^3(t)\, dt$$

Mit der obigen Rechnung zusammen ergibt dies

$$\int \sin^3(t)\, dt = -\cos(t)\sin^2(t) - 2\cos(t) - 2\int \sin^3(t)\, dt$$

Lösen wir diese Gleichung nach dem gesuchten Integral auf, so folgt

$$\int \sin^3(t)\, dt = -\cos(t) + \frac{1}{3}\cos^3(t) + C$$

□

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^7 \ln(t)\ dt$

Lösung. Mit partieller Integration und $f(t) = \ln(t)$, $g'(t) = 1$ und somit $f'(t) = \frac{1}{t}$, $g(t) = t$ folgt

$$\int_1^7 \ln(t)\, dt = t\ln(t)\Big|_1^7 - \int_1^7 1\, dt = t(\ln(t) - 1)\Big|_1^7 = 7\ln(7) - 6.$$

□

b) $\displaystyle\int_0^h e^x(x-h)\ dx$

Lösung. Mit partieller Integration und $f(x) = x - h$, $g'(x) = e^x$ und somit $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ folgt

$$\int_0^h e^x(x-h)\, dx = e^x(x-h)\Big|_0^h - \int_0^h e^x\, dx = e^x(x-h)\Big|_0^h - e^x\Big|_0^h = -e^h + 1 + h$$

□

c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\ dx$

Lösung. Mit partieller Integration und $f(x) = \sin(x), g'(x) = \cos(x)$ und somit $f'(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x)$ folgt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\, dx = \sin^2(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\, dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)\, dx$$

Da nun aber rechts und links des Gleichheitszeichens dasselbe Integral mit unterschiedlichen Vorzeichen steht, folgt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx = 0$$

□

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(t)\;dt$

Lösung. Mit partieller Integration und $f(t) = e^{-t}$, $g'(t) = \cos(t)$ und somit $f'(t) = -e^{-t}$, $g(t) = \sin(t)$ folgt

$$\int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt = e^{-t}\sin(t)\Big|_0^{2\pi} - \int -e^{-t}\sin(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-t}\sin(t)\,dt$$

Auf dieses Integral wenden wir nochmals partielle Integration an (mit $f(t) = e^{-t}$, $g'(t) = \sin(t)$ und somit $f'(t) = -e^{-t}$, $g(t) = -\cos(t)$)

$$\int_0^{2\pi} e^{-t}\sin(t)\,dt = -e^{-t}\cos(t)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -e^{-t}(-\cos(t))\,dt = -e^{-2\pi}+1-\int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt$$

Damit haben wir jetzt insgesamt folgende Rechnung durchgeführt:

$$\int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt = -e^{-2\pi}+1-\int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt$$

Diese Gleichung können wir nach dem gesuchten Integral auflösen und erhalten

$$\int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt = \frac{-e^{-2\pi}+1}{2}$$

□

3. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen von $f(x) = (x-1)\cdot\ln(x)$, der x-Achse und der Geraden $x = 4$ eingeschlossen wird.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Nullstellen: $(x-1)\ln(x) = 0$. Es folgt, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle ist. Wir müssen somit das folgende Integral berechnen:

$$\int_1^4 (x-1)\ln(x)\,dx$$

Dies tun wir mit partieller Integration. Dabei leiten wir $\ln(x)$ ab und integrieren $x-1$:

$$\int_1^4 (x-1)\ln(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln(x)\Big|_1^4 - \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

Das letzte Integral ist gleich

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_1^4 \frac{1}{2}x - 1\, dx = \frac{1}{4}x^2 - x \Big|_1^4 = \frac{3}{4}$$

Insgesamt folgt damit und der obigen Rechnung

$$\int_1^4 (x-1)\ln(x)\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln(x)\Big|_1^4 - \frac{3}{4} = 4\ln(4) - \frac{3}{4} = 4.80$$

□

4. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^2 e^x$ eingeschlossen wird.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Schnittpunkte: $e^x = x^2 e^x$. Es folgt, dass sich die Graphen bei $x = -1$ und $x = 1$ schneiden. Im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ist $f(x) \geq g(x)$ (es gelten zum Beispiel $f(0) = 1$ und $g(0) = 0$). Also müssen wir das folgende Integral berechnen:

$$\int_{-1}^1 e^x - x^2 e^x\, dx = \int_{-1}^1 e^x(1 - x^2)\, dx$$

Wir wenden zweimal partielle Integration an, wobei wir zuerst e^x integrieren und und $1 - x^2$ ableiten.

$$\int_{-1}^1 e^x(1-x^2)\, dx = e^x(1-x^2)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x \cdot (-2x)\, dx = \int_{-1}^1 2xe^x\, dx$$

Diesmal leiten wir $2x$ ab und integrieren e^x. Dann folgt

$$\int_{-1}^1 e^x(1-x^2)\, dx = \int_{-1}^1 2xe^x\, dx = 2xe^x\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x\, dx = 2e + 2e^{-1} - 2e^x\Big|_{-1}^1 = 4e^{-1} = 1.47$$

□

5. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Zusatzbedingung aus der Gleichung der ersten Ableitung einer Funktion diejenige der Funktion selber:

   a) $f'(x) = \sin(x)$, $f(-\pi) = 1$

   Lösung. Wir müssen die Stammfunktion von f' bestimmen, welchen die geforderte Bedingung erfüllt (diese Bedingung legt den Wert der Integrationskonstante fest).

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$$

Dann folgt mit der Bedingung

$$f(-\pi) = -\cos(-\pi) + C = 1 + C = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

Die gesuchte Funktion ist also $f(x) = -\cos(x)$. □

b) $g'(x) = x\sin(x)$, $g(\frac{\pi}{2}) = 2$

Lösung. Wir berechnen zuerst das unbestimmte Integral von g'. Dazu verwenden wir die partielle Integration, wobei wir x ableiten und $\sin(x)$ integrieren:

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Dann folgt mit der Bedingung

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 1 + C = 2 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$$

Die gesuchte Funktion ist also $g(x) = -x\cos(x) + \sin(x) + 1$. □

c) $h'(x) = x^2e^x$, $h(0) = 0$

Lösung. Wir berechnen zuerst das unbestimmte Integral von h'. Dazu verwenden wir (zweimal) die partielle Integration, wobei wir zuerst x^2 ableiten und e^x integrieren:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Bei der zweiten partiellen Integrationen haben wir x abgeleitet und e^x integriert. Mit der Bedingung folgt nun

$$h(0) = 0^2e^0 - 2\cdot 0e^0 + 2e^0 + C = 2 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -2$$

Die gesuchte Funktion ist also $h(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$. □

Integration, Teil 4

1. Berechnen Sie mit der Substitutionsregel die folgenden Integrale:

   a) $\int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx$

   Lösung. Setze $u = x^2 + x$. Dann ist $du = (2x+1)\,dx$, und es folgt

   $$\int (2x+1)e^{x^2+x}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2+x} + C$$

   □

   b) $\int \frac{e^{2t}}{e^{2t}+4}\,dt$

   Lösung. Setze $u = e^{2t} + 4$. Dann ist $du = 2e^{2t}\,dx$, und es folgt

   $$\int \frac{e^{2t}}{e^{2t}+4}\,dt = \int \frac{1}{2u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2t}+4\right| + C$$

   □

   c) $\int \frac{\sqrt{1+\ln(|x|)}}{x}\,dx$

   Lösung. Setze $u = 1 + \ln|x|$. Dann ist $du = \frac{1}{x}\,dx$, und es folgt

   $$\int \frac{\sqrt{1+\ln|x|}}{x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln|x|)^3} + C$$

   □

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Substitutionsregel:

   a) $\int_{-1}^{0} \frac{3t}{t^2+1}\,dt$

   Lösung. Setze $u = t^2 + 1$. Dann ist $du = 2t\,dt$, und es folgt

   $$\int_{-1}^{0} \frac{3t}{t^2+1}\,dt = \int_{2}^{1} \frac{3}{2}\frac{1}{u}\,du = \frac{3}{2}\ln(u)\Big|_{2}^{1} = -\frac{3}{2}\ln(2)$$

   □

   b) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3x^2-2)(x^3-2x)^5\,dx$

   Lösung. Setze $u = x^3 - 2x$. Dann ist $du = (3x^2-2)\,dx$, und es folgt

   $$\int (3x^2-2)(x^3-2x)^5\,dx = \int u^5\,du = \frac{u^6}{6} = \frac{(x^3-2x)^6}{6}$$

Somit erhalten wir

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3x^2-2)(x^3-2x)^5\,dx = \frac{1}{6}\left((\sqrt{3}^3-2\sqrt{3})^6-((-\sqrt{3})^3+2\sqrt{3})^6\right)=0$$

$\square$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)e^{\sin(2t)}\,dt$

Lösung. Setze $u=\sin(2t)$. Dann ist $du=2\cos(2t)\,dt$, und es folgt

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)e^{\sin(2t)}\,dt = \int_1^0 \frac{1}{2}e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_1^0 = \frac{1}{2}(1-e)$$

$\square$

d) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$

Lösung. Setze $u=1+x^2$. Dann ist $du=2x\,dx$, und es folgt

$$\int_3^5 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_{10}^{26}\frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\Big|_{10}^{26} = -\frac{1}{26}+\frac{1}{10}=\frac{4}{65}$$

$\square$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$

Lösung. Setze $u=\cos(x)$. Dann ist $du=-\sin(x)\,dx$, und es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{u}\,du = -\ln(u)\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln(\sqrt{2})$$

$\square$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\sin(x)\cos(x)\,dx$

Lösung. Setze $u=\sin(x)$. Dann ist $du=\cos(x)\,dx$, und es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\sin(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 6u\,du = 3u^2\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{2}$$

$\square$

3. Wann wird welche Methode angewandt? Bestimmen Sie die Integrale.

a) $\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$

Lösung. Substitution mit $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)\,dx$:

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$

Partielle Integration wäre auch möglich, in diesem Fall aber deutlich aufwändiger. □

b) $\int \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz$

Lösung. Substitution mit $u = \sqrt{z}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz$:

$$\int \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = \int 2\sin(u)\,du = -2\cos(u) + C = -2\cos(\sqrt{z}) + C$$

□

c) $\int \sin^4(x)\,dx$

Lösung. Partielle Integration mit $f(x) = \sin^3(x)$, $g'(x) = \sin(x)$, und somit $f'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$, $g(x) = -\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\int \sin^4(x)\,dx &= -\sin^3(x)\cos(x) + 3\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx \\ &= -\sin^3(x)\cos(x) + 3\int \sin^2(x)(1-\sin^2(x))\,dx \\ &= -\sin^3(x)\cos(x) + 3\int \sin^2(x)\,dx - 3\int \sin^4(x)\,dx\end{aligned}$$

Mit Partieller Integration ($f(x) = \sin(x), g'(x) = \sin(x)$), bekommt man

$$\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$$

Aus all diesem folgt

$$\int \sin^4(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin(x)\cos(x) + C$$

□

4. Bestimmen Sie die Integrale in der Tabelle.

   a) $y = \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

   Lösung. Wir verwenden die Substitutionsmethode. Setze $u = \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}$. Dann ist $du = \frac{3}{2}\,dx$, und es folgt

$$\int \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) dx = \int \frac{2}{3} \sin(u)\, du = -\frac{2}{3}\cos(u) + C = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + C$$

□

   b) $y = t\cos(t)$

   Lösung. Wir verwenden partielle Integration mit $f(t) = t$, $g'(t) = \cos(t)$ und somit $f'(t) = 1$, $g(t) = \sin(t)$.

$$\int t\cos(t)\, dt = t\sin(t) - \int \sin(t)\, dt = t\sin(t) + \cos(t) + C$$

□

   c) $y = e^x \cos(x)$

   Lösung. Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = e^x$, $g'(x) = \cos(x)$ und somit $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$.

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx$$

   Das letzte Integral integrieren wir nochmals partiell (mit $f(x) = e^x$, $g'(x) = \sin(x)$.

$$\int e^x \sin(x)\, dx = -e^x \cos(x) - \int e^x(-\cos(x))\, dx$$

   Insgesamt erhalten wir

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

   Lösen wir nun diese Gleichung nach dem gesuchten Integral auf, so ergibt dies

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

□

d) $y = a^{5x}$

Lösung. Zuerst schreiben wir die Funktion etwas um: $y = a^{5x} = e^{5x\ln(a)}$. Nun verwenden wir die Substitutionsmethode mit $u = 5x\ln(a)$. Dann ist $du = 5\ln(a)dx$, und es folgt

$$\int a^{5x}\,dx = \int \frac{1}{5\ln(a)}\,e^u\,du = \frac{1}{5\ln(a)}\,e^u + C = \frac{1}{5\ln(a)}\,e^{5x\ln(a)} + C = \frac{1}{5\ln(a)}\,a^{5x} + C$$

□

e) $y = \ln(x)$

Lösung. Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = 1$ und somit $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$.

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + C$$

□

f) $y = \ln\left(\frac{1}{8-3x}\right)$

Lösung. Wir schreiben die Funktion zuerst etwas um: $y = \ln\left(\frac{1}{8-3x}\right) = -\ln(8-3x)$. Nun verwenden wir die Substitutionsmethode mit $u = 8-3x$. Dann ist $du = -3\,dx$, und es folgt

$$\int \ln\left(\frac{1}{8-3x}\right)\,dx = \frac{1}{3}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{3}(u\ln(u)-u)+C = \frac{1}{3}(8-3x)(\ln(8-3x)-1)+C$$

Hierbei haben wir das Resultat von (e) benutzt. □

g) $y = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$

Lösung. Wir verwenden die Substitutionsmethode mit $u = \ln(x)$. Dann ist $du = \frac{1}{x}\,dx$, und es folgt

$$\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\ln(x)^{\frac{3}{2}} + C$$

□

h) $y = x^2\cos(x)$

Lösung. Wir verwenden partielle Integration mit $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos(x)$ und somit $f'(x) = 2x$, $g(x) = \sin(x)$.

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)\,dx$$

Auf das letzte Integral wenden wir nochmals partielle Integration an ($f(x) = 2x$, $g(x) = \sin(x)$).

$$\int 2x\sin(x)\,dx = -2x\cos(x) - \int 2(-\cos)\,dx = -2x\cos(x) + 2\sin(x) + C$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C$$

□

i) $y = (3x^2 - 5)^6$

Lösung. Wir können hier nicht direkt mit einer der beiden Methoden arbeiten. Es wäre zwar möglich, die Funktion als $y = (\sqrt{3}x - \sqrt{5})^6(\sqrt{3}x + \sqrt{5})^6$ zu schreiben und solange partiell zu integrieren, bis nur noch die Potenz einer Klammer übrig bleibt, welche dann integriert werden kann. Es bietet sich jedoch ein einfacherer Weg an. Wir multiplizieren zuerst (mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks) aus:

$$y = (3x^2 - 5)^6 = 729x^{12} - 7290x^{10} + 30375x^8 - 67500x^6 + 84375x^4 - 56250x^2 + 15625$$

Dieses Polynom kann nun leicht integriert werden.

$$\int (3x^2-5)^6\,dx = \frac{729}{13}x^{13} - \frac{7290}{11}x^{11} + 3375x^9 - \frac{67500}{7}x^7 + 16875x^5 - 18750x^3 + 15625x + C$$

□