Vorkurs UZH 2020

Mathematik Rechenfertigkeiten

Lösungen zu den Übungen Donnerstag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich
Erstellt von Dr. Irmgard Bühler (Überarbeitung: Dr. Dominik Tasnady)

August 2020

1 Kurvendiskussion I

1. Diskutieren Sie die Graphen (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Bild):

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

Lösung: Wir berechnen zuerst die Nullstellen.

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -1.$$

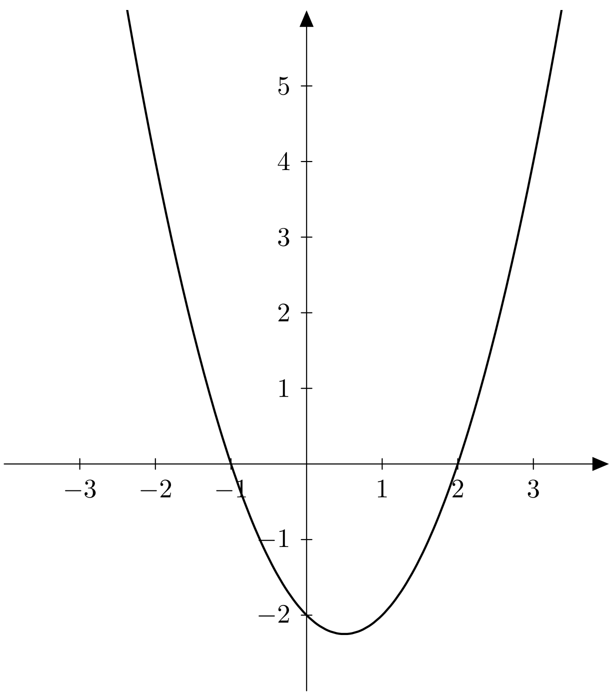
Für die Extremalstellen bestimmen wir die erste Ableitung und setzen diese gleich Null.

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_e = 0.5$$

Wir müssen nun mit der zweiten Ableitung überprüfen, ob es sich um ein (relatives) Maximum oder Minimum handelt.

$$f''(x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad f''(0.5) = 2 > 0$$

Also hat f bei $(0.5/-2.25)$ ein Minimum. Schliesslich hat die Funktion keinen Wendepunkt, da $f''(x) = 0$ keine Lösung hat.



□

b) $g(x) = x^3 - x^2$

Lösung. Wir berechnen zuerst die Nullstellen.

$$g(x) = x^3 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1$$

Für die Extremalstellen berechnen wir die erste Ableitung und setzen diese gleich Null.

$$g'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{e1} = 0,\ x_{e2} = \frac{2}{3}$$

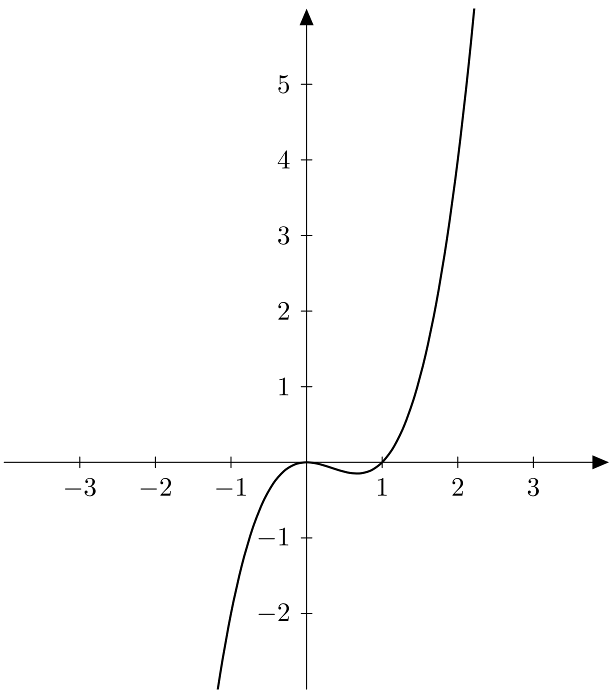
Wir müssen nun mit der zweiten Ableitung überprüfen, ob es sich um (relative) Maxima oder Minima handelt.

$$g''(x) = 6x - 2 \quad \Longrightarrow \quad g''(0) = -2 < 0,\ g''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$$

Somit hat die Funktion in $(0/0)$ ein (relatives) Maximum und in $(\frac{2}{3}/-\frac{4}{27})$ ein (relatives) Minimum. Weiter bestimmen wir den Wendepunkt.

$$g''(x) = 6x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Da $g'''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \neq 0$, ist der Punkt $(\frac{1}{3}/-\frac{2}{27})$ ein Wendepunkt.



$\square$

c) $h(x) = |x^2 + 9x - 36|$

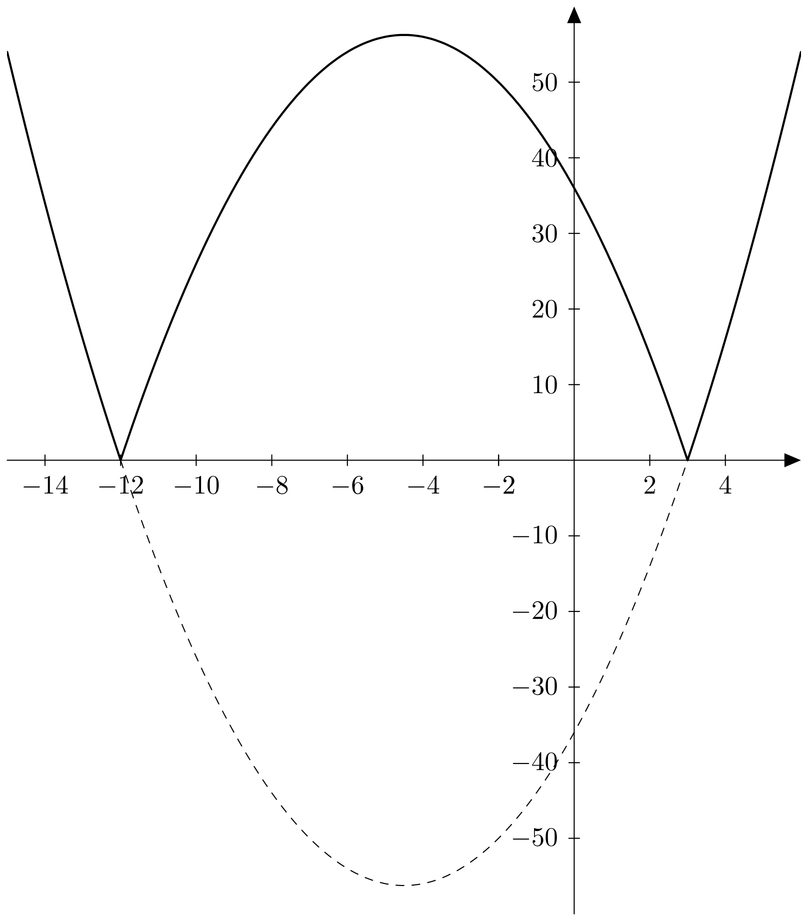
Lösung. Wir betrachten zuerst $f(x) = x^2 + 9x - 36$ und kümmern uns erst am Schluss um die Betragsstriche. Zuerst berechnen wir die Nullstellen von f.

$$f(x) = x^2 + 9x - 36 = (x + 12)(x - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 3, x_2 = -12$$

Für die Extremstellen berechnen wir die erste Ableitung und setzen diese gleich Null.

$$f'(x) = 2x + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_e = -4.5$$

Da es sich um eine nach oben geöffnete Parabel handelt, muss der Punkt $(-4.5/-56.25)$ ein Minimum sein. Ausserdem ist klar, dass eine Parabel keine Wendepunkte hat (wie auch eine zu (a) analoge Rechnung zeigt). Da $f(-4.5) = -56.25 < 0$, hat die Funktion $h(x) = |f(x)|$ im Punkt $(-4.5/56.25)$ ein Maximum. Da wir für $|f(x)|$ den negativen Teil an der x–Achse spiegeln, erhalten wir ausserdem bei den Nullstellen $x = 3$ und $x = -12$ je ein Minimum.



□

2. Bestimmen Sie die Extrema (zeigen Sie zudem, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt):

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Lösung. Wir berechnen die erste Ableitung und setzen sie gleich Null.

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_e = 1$$

Da die zweite Ableitung $f''(x) = 2 > 0$ ist, folgt, dass der Punkt $(1/2)$ ein Minimum ist. (Man könnte dies auch geometrisch begründen, indem man feststellt, dass es sich um eine nach oben geöffnete Parabel handelt.) □

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Lösung. Wir berechnen die erste Ableitung (mit der Quotientenregel) und setzen sie gleich Null.

$$g'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - x^2 = 0$$

Also sind $x_{e1} = 1$, $x_{e2} = -1$ die beiden Nullstellen der Ableitung. Nun berechnen wir die zweite Ableitung, um die Art der Extrema zu bestimmen.

$$g''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-2x) - 2(x^2+1) \cdot 2x(1 - x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

Schliesslich folgt wegen $g''(-1) > 0$ und $g''(1) < 0$, dass der Punkt $(-1/-0.5)$ ein (relatives) Minimum und der Punkt $(1/0.5)$ ein (relatives) Maximum ist. □

c) $h(x) = x \cdot e^x$.

Lösung. Wir berechnen die erste Ableitung (mit der Produktregel) und setzen sie gleich Null.

$$h'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_e = -1.$$

Wiederum mit der Produktregel folgt

$$h''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)\,.$$

Wegen $h''(-1) > 0$ folgt, dass der Punkt $(-1/-e^{-1})$ ein Minimum ist. □

3. Wo liegen bei nachfolgenden Funktionen die absoluten und die relativen Extrema?

a) $f(x) = 3x^2 - x^3$ auf dem Intervall $[-3, 5]$

Lösung. Zuerst berechnen wir die Funktionswerte bei den Intervallgrenzen.

$$f(-3) = 54\,, \quad f(5) = -50$$

Für die Extrema im Innern des Intervalls berechnen wir die erste Ableitung und setzen sie gleich Null.

$$f'(x) = 6x - 3x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0\,,\ x_2 = 2$$

Mit der zweiten Ableitung bestimmen wir die Art der Extrema. Es gilt $f''(x) = -6x + 6$, also ist wegen $f''(0) > 0$ und $f''(2) < 0$ bei $x = 0$ ein Minimum und bei $x = 2$ ein Maximum. Weiter berechnen wir $f(0) = 0$ und $f(2) = 4$. Der Vergleich mit den Randpunkten zeigt, dass die Funktion f im Intervall $[-3, 5]$ bei $x = 5$ ihr absolutes Minimum, bei $x = 2$ ein relatives Maximum, bei $x = 0$ ein relatives Minimum und bei $x = -3$ ihr absolutes Maximum hat. □

b) $g(t) = t(t-5)^2$ auf dem Intervall $[0, 4]$

Lösung. Zuerst berechnen wir die Funktionswerte bei den Intervallgrenzen.

$$g(0) = 0\,, \quad g(4) = 4$$

Für die Extrema im Innern des Intervalls berechnen wir die erste Ableitung und setzen sie gleich Null.

$$g'(t) = (t-5)^2 + 2t(t-5) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (t-5)(t-5+2t) = (t-5)(3t-5) = 0$$

Also sind die Nullstellen der ersten Ableitung $t_1 = 5$, $t_2 = \frac{5}{3}$. Mit der zweiten Ableitung bestimmen wir die Art der Extrema.

$$g''(t) = 3t - 5 + 3(t-5) = 6t - 20 \quad \Longrightarrow \quad g''(5) > 0\,, \quad g''\left(\frac{5}{3}\right) < 0$$

Damit hat g bei $x = 5$ ein Minimum und bei $x = \frac{5}{3}$ ein Maximum. Nun gilt $5 \notin [0, 4]$. Ausserdem ist $g(\frac{5}{3}) = 18.52$. Der Vergleich mit den Randpunkten zeigt, dass die Funktion g im Intervall $[0, 4]$ bei $x = 0$ ihr absolutes Minimum, bei $x = \frac{5}{3}$ ihr absolutes Maximum und bei $x = 4$ ein relatives Minimum hat. □

c) $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$ auf dem Intervall $(-1, 2)$

Lösung. Wir berechnen die erste Ableitung (mit der Quotientenregel) und setzen sie gleich Null, um die Extrema im Innern des Intervalls zu bestimmen.

$$h'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung. Also gibt es keine Extrema im Innern des Intervalls. Somit müssen die (absoluten) Extrema an den Randpunkten sein. Da aber die Randpunkte nicht zum Intervall gehören (das Intervall ist offen!), folgt, dass die Funktion h im Intervall $(-1, 2)$ weder relative noch absolute Extrema hat. □

d) $j(x) = \cos(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, 12]$

Lösung. Zuerst berechnen wir die Funktionswerte bei den Intervallgrenzen.

$$j(-\pi) = -1\,, \quad j(12) = 0.84$$

Für die Extrema im Innern des Intervalls berechnen wir die erste Ableitung und setzen sie gleich Null.

$$j'(x) = -\sin(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \{-\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$$

Mit der zweiten Ableitung bestimmen wir die Art der Extrema.

$$j''(x) = -\cos(x) \quad \Longrightarrow \quad j''(-\pi) = j''(\pi) = j''(3\pi) = 1\,, \quad j''(0) = j''(2\pi) = -1$$

Somit hat die Funktion j in $-\pi, \pi, 3\pi$ absolute Minima, in $0, 2\pi$ absolute Maxima und in 12 ein relatives Maximum. □

4. Welche Polynomfunktion dritten Grades besitzt einen Graphen, der symmetrisch bezüglich dem Ursprung ist und im Punkt $(-2/-4)$ ein (relatives) Minimum annimmt?

Lösung: Wir nehmen an, dass $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gilt und wir a, b, c, d bestimmen müssen. Da f symmetrisch bezüglich dem Ursprung und stetig ist, bedeutet dies, dass $f(0) = 0$. Es folgt bereits $d = 0$. Ausserdem folgt aus der Symmetrie $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das heisst, es gilt

$$ax^3 + bx^2 + cx = -a \cdot (-x)^3 - b \cdot (-x)^2 - c \cdot (-x) = ax^3 - bx^2 + cx\,.$$

Daraus schliessen wir $b = 0$. Da

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\,,$$

haben wir die Gleichung

$$3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) + c = 12 \cdot a + c = 0\,,$$

also $c = -12a$, da $(-2/-4)$ ein Minimum ist und somit $f'(-2) = 0$ gilt. Wegen $f(-2) = -4$ folgt ausserdem

$$-8a - 2c = -4$$

Zusammen mit $c = -12a$ erhalten wir $a = -\frac{1}{4}$, $c = 3$ und somit

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x\,.$$

□

5. Zeigen Sie, dass eine Polynomfunktion (vom Grad > 1), welche symmetrisch bezüglich dem Ursprung ist, im Ursprung einen Wendepunkt hat.

Lösung: Die Symmetrie bezüglich Ursprung bedeutet, dass das Polynom nur aus Termen mit ungeraden Exponenten besteht. Da bei der Ableitung der Exponent um eins kleiner wird, ist er bei der zweiten Ableitung um zwei kleiner. Also hat die zweite Ableitung ebenfalls nur Terme mit ungeraden Exponenten. Setzt man nun 0 ein, so erhält man $f''(0) = 0$. Um zu sehen, dass 0 wirklich ein Wendepunkt ist, überlegt man sich, dass $f''(-\varepsilon) = -f''(\varepsilon)$ (was folgt, da nur ungerade Exponenten vorkommen). f'' wechselt also im Nullpunkt das Vorzeichen. Also ist der Ursprung ein Wendepunkt. □

2 Kurvendiskussion II

1. Bestimmen Sie die folgenden Informationen zu den gegebenen Funktionen:

(1) Definitionsbereich

(2) Polstellen (Was passiert in den Definitionslücken?)

(3) Nullstellen

(4) asymptotisches Verhalten (d.h. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$)

(5) Extrema

Zeichnen Sie dann damit den Graphen auf.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Lösung. Da der Nenner immer positiv ist, ist der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Die Funktion hat also keine Polstellen. Weiter hat die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = 0$$

keine Lösungen und die Funktion damit keine Nullstellen. Für das asymptotische Verhalten berechnen wir

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

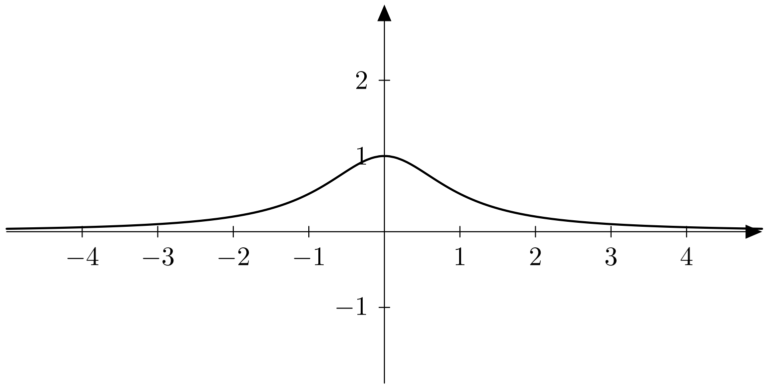
Für die Extremalstellen berechnen wir die erste Ableitung (mit der Quotientenregel) und setzen sie gleich Null.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Mit der zweiten Ableitung bestimmen wir die Art des Extremums.

$$f''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = -2$$

Der Punkt $(0/1)$ ist somit das absolute Maximum der Funktion f. (Dass es sich um das *absolute* Maximum handelt, sieht man daran, dass es nur ein relatives Maximum hat und keine relativen Minima. Ausserdem nähert sich die Funktion asymptotisch 0 an.)



$\square$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x}$

Lösung. Da der Nenner für $x = 0$ gleich 0 ist, ist der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Das Verhalten bei der Polstelle ist bestimmt durch die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x \to \pm 0} g(x) = \pm\infty$$

Das heisst, nähert man sich der Definitionslücke von rechts an, so konvergiert der Funktionswert gegen ∞. Nähert man sich hingegen von links an, so geht der Wert gegen $-\infty$. Dies sieht man daran, dass der Zähler immer positiv ist (binomische Formel!), während der Nenner das Vorzeichen je nach demjenigen von x ändert. Weiter ist das asymptotische Verhalten wie folgt.

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

Wir berechnen die Nullstellen, in dem wir den Zähler gleich Null setzen.

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1$$

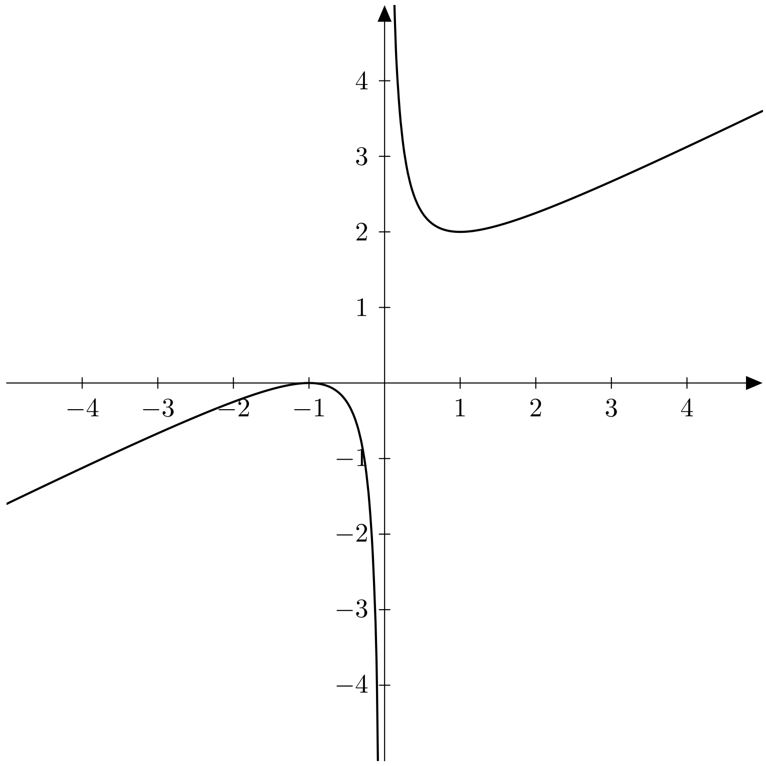
Da es sich um eine doppelte Nullstelle handelt, muss dort auch die erste Ableitung 0 sein, wie folgende Rechnung bestätigt.

$$g'(x) = \frac{(2x+2)2x - (x^2+2x+1)\cdot 2}{4x^2} = \frac{x^2-1}{2x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1\,,\; x_2 = -1$$

Um die Art der Extrema zu bestimmen, berechnen wir die zweite Ableitung.

$$g''(x) = \frac{2x\cdot 2x^2 - (x^2-1)4x}{4x^4} = \frac{4x}{4x^4} = \frac{1}{x^3}$$

Wegen $g''(1) > 0$ und $g''(-1) < 0$ hat die Funktion g im Punkt $(1/2)$ ein (relatives) Minimum und im Punkt $(-1/0)$ ein (relatives) Maximum.



□

c) $h(x) = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$

Lösung. Der Nenner ist gleich 0 für $x = -\frac{1}{2}$. Daher ist der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$. Das Verhalten bei der Polstelle ist gegeben durch den folgenden Grenzwert (Annäherung an die Definitionslücke von links und von rechts ergibt denselben Grenzwert, da der Bruch immer einen positiven Wert hat).

$$\lim_{x\to\ -\frac{1}{2}} h(x) = \infty$$

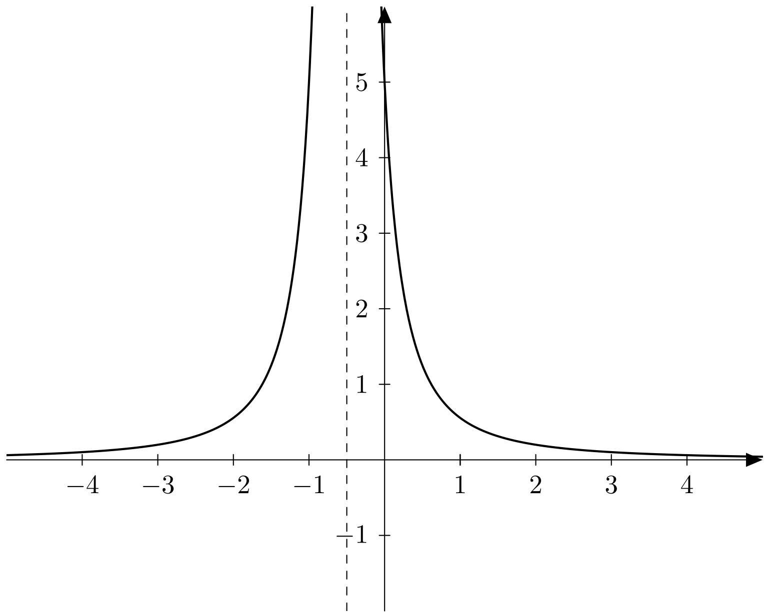
Da der Zähler konstant ist, hat h keine Nullstellen. Weiter ist das asymptotische Verhalten folgendes.

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$$

Für die Extrema berechnen wir die erste Ableitung und setzen sie gleich Null.

$$h'(x) = 5 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(2x+1)^3} \cdot 2 = 0$$

Offensichtlich hat diese Gleichung keine Lösung und die Funktion daher keine Extremalstellen.



□

d) $j(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Lösung. Da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist, ist der Definitionsbereich von j gleich $\mathbb{D} = \mathbb{R}^{+}$. Die Funktion hat keine eigentliche Polstelle, da 0 als einzige Nullstelle des Nenners nicht im Definitionsbereichs enthalten ist. Allerdings ist 0 gerade ein Randpunkt des Definitionsbereichs, sodass wir trotzdem berechnen müssen, was geschieht, wenn x sich (von rechts) 0 annähert.

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

Die Funktion hat als einzige Nullstelle die Lösung von $\ln(x) = 0$, also $x = 1$. Weiter berechnen wir das asymptotische Verhalten mit der Regel von de L'Hôptial.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

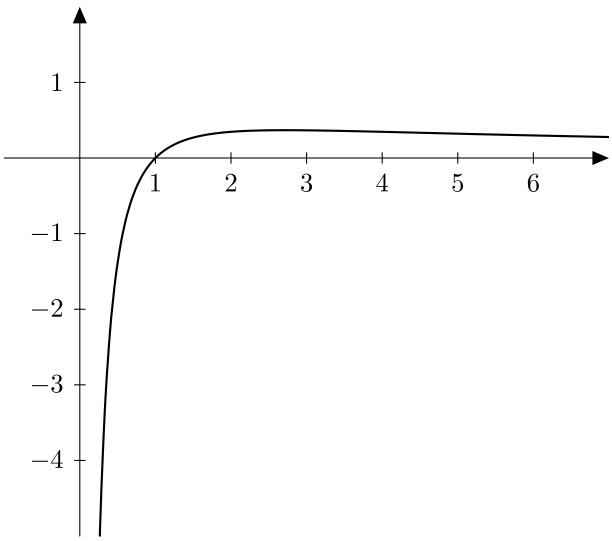
Für die Extremalstellen berechnen wir die erste Ableitung (mit der Quotientenregel) und setzen sie gleich Null.

$$j'(x) = \frac{x\frac{1}{x} - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = e$$

Mit der zweiten Ableitung bestimmen wir die Art des Extremums.

$$j''(x) = \frac{x^2(-\frac{1}{x}) - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad j''(e) < 0.$$

Somit hat die Funktion in (e/e^{-1}) ein absolutes Maximum. (Dass es sich um das *absolute* Maximum handelt, ist wiederum daraus ersichtlich, dass es das einzige Extremum ist, sowie aus dem asymptotischen Verhalten und dem Verhalten bei der 'Polstelle'.)



□

e) $k(x) = x \cdot e^x$

Lösung. Die Funktion ist überall definiert, also gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ (und es gibt daher offensichtlich keine Polstellen). Da e^x nie 0 ist, ist die einzige Nullstelle $x = 0$. Für das asymptotische Verhalten müssen wir zwei Grenzwerte berechnen.

$$\lim_{x\to\infty} k(x) = \infty$$

Dies ist klar, da beide Faktoren gegen ∞ konvergieren. Für den anderen Grenzwert verwenden wir die Regel von de L'Hôpital. Ausserdem schreiben wir $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

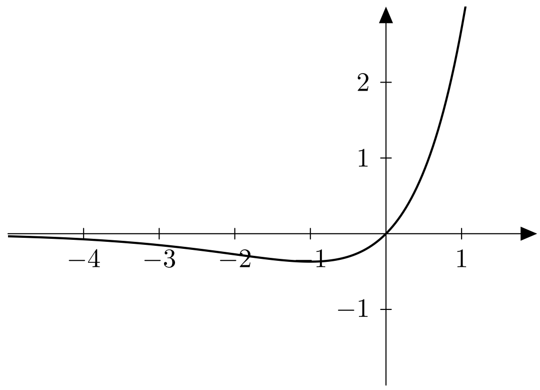
Für die Extremstellen berechnen wir die erste Ableitung (mit der Produktregel).

$$k'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1$$

Mit der zweiten Ableitung bestimmen wir die Art des Extremums.

$$k''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2) \quad \Longrightarrow \quad k''(-1) > 0$$

Somit hat die Funktion k in $(-1/-e^{-1})$ ihr absolutes Minimum.



$\square$

f) $l(x) = e^{-x^2}$

Lösung. Die Funktion ist überall definiert, also gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ (und es gibt daher offensichtlich keine Polstellen). Da e^x nie 0 ist, hat die Funktion zudem keine Nullstellen. Das asymptotische Verhalten ist gegeben durch

$$\lim_{x \to \pm\infty} l(x) = 0$$

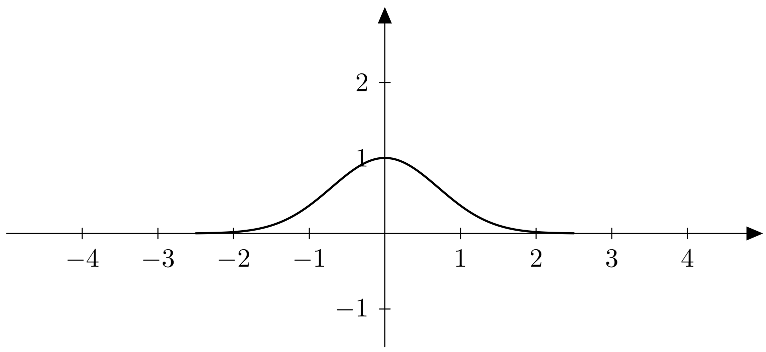
Für die Extremalstellen berechnen wir die ersten Ableitung (mit der Kettenregel).

$$l'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Wir bestimmen die Art des Extremums mit der zweiten Ableitung.

$$l''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)^2 + e^{-x^2} \cdot (-2) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) \quad \Longrightarrow \quad l''(0) < 0.$$

Somit hat die Funktion l in $(0/1)$ ihr absolutes Maximum.



$\square$

2. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}_0$

Lösung: Mit der Regel von de L'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{nx^{n-1}}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}.$$

$\square$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{1-\cos(x)}$

Lösung: Es gilt mit zweimaligem Anwenden der Regel von de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(2x)}{\cos(x)} = 4.$$

$\square$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3}$

Lösung: Es gilt mit der Regel von de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x^3} = 0.$$

$\square$

3 Optimierungsprobleme

1. Zerlegen Sie eine reelle Zahl a so in zwei Summanden x und y, dass deren Produkt möglichst gross wird!

Lösung: Sei $a = x + y$ und $p = x \cdot y$. Wir müssen p maximieren. Da

$$p = x \cdot (a - x) = xa - x^2 \,,$$

erhalten wir, indem wir ableiten von p nach x und gleich Null setzen,

$$y' = a - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{2} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{a}{2}.$$

□

2. Ein Quader mit dem Volumen $V = 25$ cm^3 und der einen Kante $a = 4$ cm soll eine möglichst kleine Oberfläche haben. Wie lang sind die anderen Kanten?

Lösung: Seien x und y bei beiden unbekannten Kanten. Dann ist die Oberfläche des Quaders

$$F = 2 \cdot 4x + 2 \cdot 4y + 2xy = 8x + 8y + 2xy$$

Mit dem bekannten Volumen können wir y durch x ausdrücken:

$$25 = 4xy \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{25}{4x}$$

Somit ist die zu minimierende Funktion

$$F = 8x + \frac{50}{x} + \frac{25}{2}$$

Die erste Ableitung ist

$$F' = 8 - \frac{50}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 6.25 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2.5$$

Offensichtlich ist nur die positive Lösung geometrisch möglich. Mit der zweiten Ableitung sieht man, dass es sich um ein Minimum handelt:

$$F'' = \frac{100}{x^3} \quad \Longrightarrow \quad F''(2.5) > 0$$

Die beiden gesuchten Kanten sind somit $x = 2.5$ cm, $y = 2.5$ cm. □

3. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die gegebene Hypothenuse 4.

 a) Wie sind die fehlenden Seiten zu wählen, damit das Dreieck maximalen Umfang hat?

 Lösung: Seien x und y die beiden Katheten. Dann ist der Umfang des Dreiecks $U = x + y + 4$. Da es ein rechtwinkliges Dreieck ist, gilt mit dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{16 - x^2}$$

 Damit ist folgende Funktion zu maximieren:

$$U = x + \sqrt{16 - x^2} + 4$$

 Wir berechnen die erste Ableitung (Kettenregel!)

$$U' = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{16 - x^2} = x \quad \Longrightarrow \quad 16 - x^2 = x^2$$

 Somit ist $x = \pm 2\sqrt{2}$. Offensichtlich ist nur die positive Lösung geometrisch möglich. Wir überprüfen, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt mit der zweiten Ableitung.

$$U'' = -\frac{\sqrt{16 - x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{16 - x^2}}}{16 - x^2} \quad \Longrightarrow \quad U''(2\sqrt{2}) < 0$$

 Es handelt sich also um ein Maximum. Die beiden Katheten sind $x = 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$. $\square$

 b) Wie sind die fehlenden Seiten zu wählen, damit das Dreieck maximale Fläche hat?

 Lösung: Seien x und y die beiden Katheten. Dann ist Fläche des Dreiecks $F = \frac{1}{2}xy$. Da es ein rechtwinkliges Dreieck ist, gilt mit dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{16 - x^2}$$

 Damit ist folgende Funktion zu maximieren:

$$F = \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2}$$

 Wir berechnen die erste Ableitung (Produkt- und Kettenregel!)

$$F' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{16 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{16 - x^2}}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 16 - x^2 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

 Offensichtlich ist nur die positive geometrisch möglich. Da die Berechnung der zweiten Ableitung eher aufwändig ist, überprüfen wir, dass es sich um ein Maximum handelt, indem wir jeweils einen Wert, der etwas grösser bzw. etwas kleiner ist als $2\sqrt{2}$, in F' einsetzen. (Welche Punkte wir einsetzen, ist nicht wirklich relevant. Wichtig ist nur, dass zwischen den eingesetzten Werten und $2\sqrt{2}$ keine Nullstellen der Ableitung liegen.)

$$F'(2) = 2.31\,,\ F'(3) = -0.76$$

Wir sehen somit, dass die Ableitung in $2\sqrt{2}$ von Plus nach Minus wechselt. Die Kurve steigt also zuerst und fällt danach. Dies zeigt, dass es sich um ein Maximum handelt.
Die Katheten des Dreiecks sind $x = 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$. □

4. Von einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen a und b wird an jeder Ecke ein Quadrat mit der Seitenlänge x weggeschnitten. Durch Auffalten der vorstehenden Rechtecke lässt sich aus dem Reststück eine oben offene Schachtel bilden. Für welches x hat die Schachtel maximales Volumen, wenn

a) $a = b = 12$ cm

b) $a = 15$ cm und $b = 24$ cm

Lösung: Volumen der Schachtel:

$$V(x) = (a-2x)(b-2x)x = abx - 2x^2(a+b) + 4x^3$$

Es folgt

$$V'(x) = ab - 4x(a+b) + 12x^2$$

und für die möglichen Extrema folgt

$$x_{e1,e2} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{16(a+b)^2 - 48ab}}{24} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Da $V''(x) = -4(a+b) + 24x$ und somit

$$\begin{aligned} V''\left(\frac{a+b \pm \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}\right) &= 24 \cdot \frac{a+b \pm \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} - 4(a+b) \\ &= \pm 4\sqrt{a^2-ab+b^2} \end{aligned}$$

erhalten wir in $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ ein Maximum. Wir erhalten somit

ad a): $x = 2$

ad b): $x = 3$.

□

5. Ein Stück Draht der Länge 1 wird in zwei Teile zerschnitten. Aus dem einen wird ein Quadrat, aus dem anderen ein Kreis geformt. Wie muss man schneiden, damit die Summe der Flächeninhalte der beiden Figuren

a) minimal

b) maximal

wird?

Lösung: a) Seien x, y die Längen der Teile. Es gilt $x + y = 1$. Ausserdem sind

$$F_{Quadrat} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}\,, \quad F_{Kreis} = \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{y^2}{4\pi}$$

Somit müssen wir die folgende Fläche minimieren:

$$F(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}$$

Wir berechnen die erste Ableitung (Kettenregel!)

$$F'(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2\pi}(1-x) = \frac{1}{8\pi}((\pi+4)x - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{4}{\pi+4}.$$

Weiter erhalten wir für die Randpunkte ($0 \leq x \leq 1$) $F(0) = \frac{1}{4\pi}$ und $F(1) = \frac{1}{16}$. Der Wert an der Extremalstelle x_e ist

$$F(x_e) = \frac{16}{16(\pi+4)^2} + \frac{\pi^2}{4\pi(\pi+4)^2} = \frac{1}{(\pi+4)^2}(1+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4(\pi+4)}$$

Daher ist die Fäche minimal für $x_e = \frac{4}{\pi+4}$, $y_e = 1 - x_e = \frac{\pi}{\pi+4}$. (Dass es ein Minimum ist, muss hier nicht zwingend mit der zweiten Ableitung überprüft werden. Denn es ist die einzige Extremalstelle im Intervall $[0, 1]$ und F ist an den Randpunkten grösser. Also muss die Extremalstelle ein Minimum sein.)

b) Aus den Rechnungen in a) folgt unmittelbar, dass die Fläche maximal ist für $x = 0$, $y = 1$.

□

6. Eine Strasse verläuft entlang dem Graphen von $y = x + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Wie weit von der Strasse ist das Haus $H(1/1)$ gelegen? (Einheit = km)

Lösung: Gesucht ist der kürzeste Abstand von $H(1/1)$ zu einem Punkt auf der Kurve $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Für einen beliebigen Punkt (x/y) auf der Kurve ist der Abstand wie folgt

$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)^2}$$

Dieser Ausdruck soll nun minimiert werden. Man kann das Problem noch etwas vereinfachen, indem man bemerkt, dass $d(x)$ für dasselbe x minimal wird wie auch $d^2(x)$. Wir können also folgendes Optimierungsproblem betrachten:

$$d^2(x) = (x-1)^2 + \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)^2 \quad \longrightarrow \quad \text{minimal}$$

Dazu bestimmen wir die Ableitung und setzen sie gleich 0:

$$\left(d^2(x)\right)' = 2(x-1) + 2\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Durch Ausmultiplizieren findet man dann

$$\left(d^2(x)\right)' = 4x - 4 - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^4 - 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

Eine erste Lösung kann man erraten: $x_1 = 1$. Nach Polynomdivision liefert dies:

$$4x^4 - 4x^2 + 2x - 2 = (x-1)(4x^3 + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Man sieht, dass x_2 nicht im Definitionsbereich liegt ($x > 0$). Der einzige Kandidat ist daher $x_1 = 1$. Zur Kontrolle bestimmen wir die zweite Ableitung.

$$\left(d^2(x)\right)'' = 4 + \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \left(d^2(x)\right)''(1) = 6 > 0$$

$x = 1$ ist also wirklich ein Minimum. Schliesslich folgt $d(1) = 1$ km. □

7. Ein einem Garten stehen 50 Apfelbäume, die jeweils 800 Äpfel pro Jahr tragen. Für jeden zusätzlichen Baum, der gepflanzt wird, nimmt die Anzahl Äpfel pro Jahr um 10 ab (weniger Platz, weniger Nährstoffe). Wie viele Bäume sollte man zusätzlich pflanzen, wenn man die jährliche Ausbeute maximieren will?

Lösung: Gesucht ist die maximale Anzahl Äpfel, die alle Bäume zusammen pro Jahr tragen. Es bezeichne x die Anzahl zusätzlich gepflanzter Bäume. Dann ist die gesamte Anzahl Äpfel pro Jahr gegeben durch:

$$A(x) = (50 + x) \cdot (800 - 10x) = -10x^2 + 300x + 4000$$

Diese Funktion soll nun maximiert werden. Wir berechnen dazu die erste Ableitung:

$$A'(x) = -20x + 300 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 15$$

Es müssen also 15 Bäume gepflanzt werden. Dass dies tatsächlich ein Maximum ist, ist klar, da der Graph der Funktion A eine nach unten geöffnete Parabel ist.

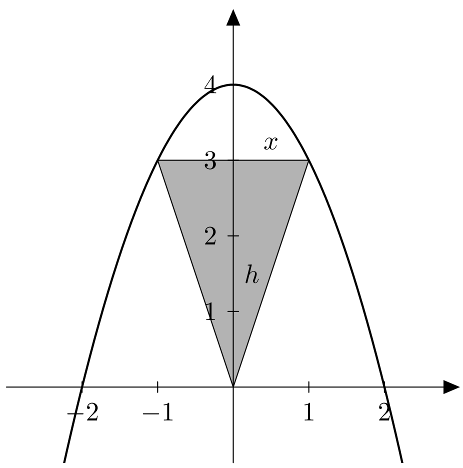
□

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$.

   a) Dem Graphen der Funktion f soll (in der oberen Hälfte des Koordinatensystems) ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze im Punkt $(0/0)$ einbeschrieben werden. Was ist die Höhe des Dreiecks, wenn der Flächeninhalt maximal ist?

   b) Der Graph von f wird um die y-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein Paraboloid. Diesem soll ein Kegel mit maximalem Volumen und Spitze im Punkt $(0/0)$ einbeschrieben werden (in der oberen Hälfte des Koordinatensystems). Bestimmen Sie den Radius dieses Zylinders.

Lösung: Die folgende Figur kann sowohl für a) als auch für b) verwendet werden.



a) Die Fläche des Dreiecks ist gegeben durch:

$$F = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{2xh}{h} = xh$$

Dies soll nun maximiert werden. Dazu verwenden wir die Nebenbedingung, dass das Dreieck dem Graphen einbeschrieben werde muss, d.h.

$$h = f(x) = -x^2 + 4 \quad \Longrightarrow \quad F = x(-x^2 + 4) = -x^3 + 4x$$

Wir müssen nun das Maximum dieser Funktion im Intervall $[0, 2]$ berechnen, wobei die beiden Randpunkte sicher nicht optimal sind, da für $x = 0$ das Dreieck zu einer vertikalen, für $x = 2$ hingegen zu einer horizontalen Strecke wird, welche beide keine Fläche haben.

$$F' = -3x^2 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Da x positiv sein muss, folgt

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \Longrightarrow \quad h = -x^2 + 4 = \frac{8}{3}$$

Die gesuchte Höhe ist also $h = \frac{8}{3}$.

b) Das Volumen des Kegels ist gegeben durch

$$V = \frac{\pi \cdot \text{Radius}^2 \cdot \text{Höhe}}{3} = \frac{\pi x^2 h}{3}$$

Dies soll nun maximiert werden. Dazu verwenden wir die Nebenbedingung, dass der Kegel dem rotierten Graphen einbeschrieben werde muss, d.h.

$$h = f(x) = -x^2 + 4 \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{\pi x^2(-x^2+4)}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(-x^4 + 4x^2\right)$$

Wir müssen nun das Maximum dieser Funktion im Intervall $[0, 2]$ berechnen, wobei die beiden Randpunkte sicher nicht optimal sind, da für $x = 0$ der Kegel zu einer vertikalen Strecke, für $x = 2$ hingegen zu einer flachen Kreisscheibe wird, welche beide kein Volumen haben.

$$V' = \frac{\pi}{3} \cdot \left(-4x^3 + 4x\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0,\, x_{2,3} = \pm 1$$

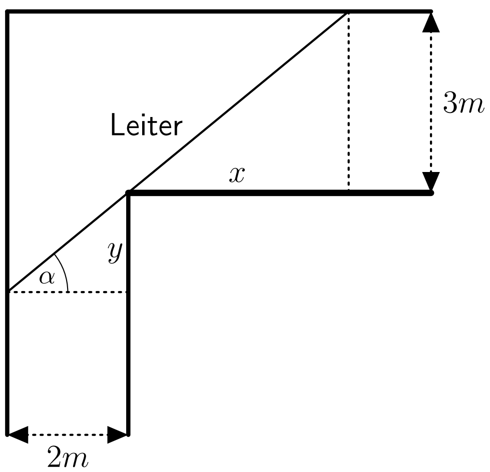
Der einzige Wert, der in Frage kommt, ist $x = 1$. Dass dies tatsächlich ein Maximum ist können wir leicht mit der zweiten Ableitung überprüfen:

$$V'' = \frac{\pi}{3} \cdot \left(-12x^2 + 4\right) \quad \Longrightarrow \quad V''(1) < 0$$

Der gesuchte Radius ist somit $x = 1$.

□

9. Eine Leiter soll in einem Gang um die Ecke getragen werden. Wie lang darf die Leiter höchstens sein, damit sie Platz hat?



Lösung: Erste Methode: Die Länge der Leiter ist

$$L = \sqrt{(2+x)^2 + (3+y)^2}$$

Da die beiden eingezeichneten Dreiecke ähnlich sind, folgt

$$\frac{3}{x} = \frac{y}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{6}{x}$$

Somit ist die Zielfunktion

$$L = \sqrt{(2+x)^2 + \left(3 + \frac{6}{x}\right)^2} \quad \rightarrow \quad \text{min.}$$

Wir müssen L minimieren, um herauszufinden, wie lang die Leiter an der engsten Stelle sein darf. Die Aufgabe wird erleichtert, wenn man die Zielfunktion quedriert:

$$L^2 = (2+x)^2 + \left(3 + \frac{6}{x}\right)^2$$

Es gilt:

$$(L^2)' = 4 + 2x - \frac{36}{x^2} - \frac{72}{x^3} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = -2\,,\ x_2 = \sqrt[3]{18} = 2.62$$

Wir verwenden ein Vorzeichendiagramm, um zu entscheiden, ob dies tatsächlich ein Minimum ist:

$$(L^2)' \; \overset{-}{\text{―――――}} \underset{2.62}{\bullet} \overset{+}{\text{―――――}}$$

Also ist $L_{\text{min}} = 7.023$ die Länge der engsten Stelle, d.h. die Leiter sollte kürzer sein.

Zweite Methode: Die Länge L als Funktion des Winkels α is:

$$L = \frac{3}{\sin(\alpha)} + \frac{2}{\cos(\alpha)}$$

Damit folgt:

$$L' = -\frac{3\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{2\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3\cos^3(\alpha) = 2\sin^3(\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \tan^3(\alpha) = 1.5$$

Es ist also $\alpha = 0.853$ (im Bogenmass!), d.h. $48.86°$. (Im letzten Schritt wurde verwendet, dass $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gilt.)Verwende erneut ein Vorzeichendiagramm, um zu zeigen, dass dies ein Minimum ist. Schliesslich führt dieser Winkel auf denselben minimalen Wert von L wie in der ersten Methode.

$\square$

10. * **'Maximum Likelihood' Schätzungen:** Man wirft einen unfairen Würfel n mal und wirft dabei m Mal eine Sechs. Aus diesem Ergebnis möchte man die Chance auf eine Sechs bei einmaligem Werfen schätzen. Ist diese Chance p, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Mal werfen m Sechsen zu werfen, gleich

$$\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

(die *Binomische Verteilung*). Bestimmen Sie p so, dass diese Wahrscheinlichkeit am grössten ist.

Lösung: Wir maximieren die Funktion $f(p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$.

$$\begin{aligned} f'(p) &= \binom{n}{m} \cdot m \cdot p^{m-1}(1-p)^{n-m} - \binom{n}{m} p^m \cdot (n-m) \cdot (1-p)^{n-m-1} \\ &= \binom{n}{m} p^{m-1}(1-p)^{n-m-1}(m(1-p) - (n-m)p) \\ &= \binom{n}{m} p^{m-1}(1-p)^{n-m-1}(m - np) = 0. \end{aligned}$$

Da $0 < p < 1$ folgt, dass $m - np = 0$, also $p = \frac{m}{n}$ sein muss. $\square$