Vorkurs Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaften, LÖSUNGEN

Mittwoch

Block 1

1. a) $(x^3 + 6x^2 + 9x + 4) : (x + 1) = \underline{\underline{x^2 + 5x + 4}}$

$-\underline{(x^3 + x^2)}$

$5x^2 + 9x$

$-\underline{(5x^2 + 5x)}$

$4x + 4$

$-\underline{(4x + 4)}$

0

b) $(3x^3 - x^2 - 16x + 12) : (x + 2) = ...$ Auf eine ausführliche Rechnung wird verzichtet, da analog zu a).

Diese Division geht nicht restlos auf. Es kommt noch ein Restterm vor: $\underline{\underline{3x^2 - 7x - 2 + \frac{16}{x+2}}}$

c) Schreiben Sie die Division folgendermassen auf (dieses "Auffüllen mit 0-Koeffizienten" bietet sich immer dann an, wenn Sie nicht genügend Summanden für das Divisionsverfahren haben):

$(k^5 + 0k^4 + 0k^3 + 0k^2 + 0k + 0) : (k^2 + k - 1) = \ldots$ Auch hier verzichten wir auf die Zwischenschritte.

$$\underline{\underline{k^3 - k^2 + 2k - 3 + \frac{5k-3}{k^2 + k - 1}}}$$

2. a) $(a^3 + b^3) : (a + b) = \underline{\underline{a^2 - ab + b^2}}$

$-\underline{(a^3 + a^2b)}$

$-a^2b + b^3$

$-\underline{(-a^2b - ab^2)}$

$ab^2 + b^3$

$-\underline{(ab^2 + b^3)}$

0

Auch hier könnten Sie zunächst 0-Koeffizienten einfügen. Wichtig dabei ist, dass Sie den Dividenden und den Divisor nach dem gleichen Gesichtspunkt ordnen, hier nach fallenden Potenzen von a:

$(a^3 + 0a^2b + 0ab^2 + b^3) : (a + b) = \underline{\underline{a^2 - ab + b^2}}$

$-\underline{(a^3 + a^2b)}$

$-a^2b + 0ab^2$

$-\underline{(-a^2b - ab^2)}$

$ab^2 + b^3$

$-\underline{(ab^2 + b^3)}$

0

b) Die Division von $(a^3 - b^3) : (a - b)$ wird analog zur Aufgabe a) gelöst.

Sollten Sie nicht $(a^2 + ab + b^2)$ erhalten haben, rechnen Sie bitte nochmals nach.

3. a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Die erste NST $x_1 = 1$ lässt sich leicht erraten. Kontrolle: f(1) = 0.

Nun führen wir die entsprechende Polynomdivision $(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1)$ durch. Man sagt dazu auch: "Wir spalten die NST $x_1 = 1$ ab."

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6 \\
-\underline{(x^3 - x^2)} \\
\qquad 5x^2 + x \\
\quad -\underline{(5x^2 - 5x)} \\
\qquad\qquad 6x - 6 \\
\qquad\quad -\underline{(6x - 6)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Somit gilt: $(x^3 + 4x^2 + x - 6) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$.
Mit einem Zwei-Klammeransatz können wir auch noch den quadratischen Faktor $(x^2 + 5x + 6)$ zerlegen und wir erhalten somit: $f(x) = (x^3 + 4x^2 + x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$.

Nun lassen sich die NST ablesen: $\underline{\underline{x_1 = 1}}$, $\underline{\underline{x_2 = -2}}$, $\underline{\underline{x_3 = -3}}$.

b) Vorsicht: Wenn Sie die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2 + 2$ einfach rechts mit 4 multiplizieren, erhalten Sie eine neue, veränderte Funktion (Streckung aller Werte mit dem Faktor 4, die Nullstellen bleiben allerdings erhalten, da $4 \cdot 0 = 0$ ist). Sie kriegen also zwar das richtige Resultat, **formal** ist aber der Ausdruck $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 8$ **falsch**, da $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2 + 2 \neq -3x^3 + 4x^2 + 8$ ist!

Abhilfe: 1) Formal korrekt als **Gleichung** ausdrücken: $-\frac{3}{4}x^3 + x^2 + 2 = 0 \overset{\bullet 4}{\Leftrightarrow} -3x^3 + 4x^2 + 8 = 0$.

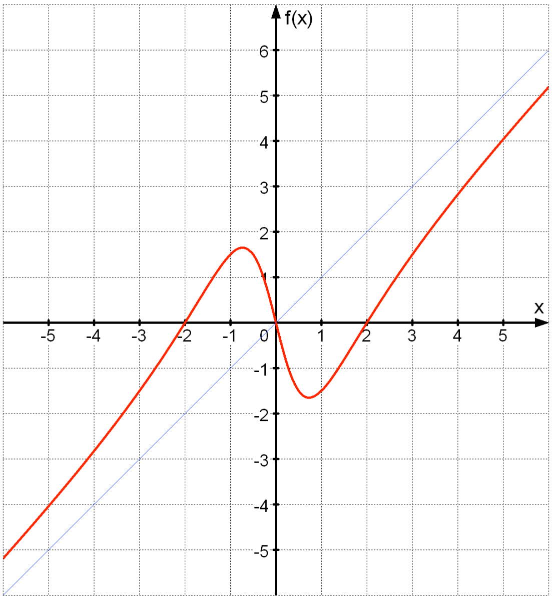
Abhilfe: 2) Wie folgt rechnen: Die erste NST $x_1 = 2$ lässt sich leicht erraten. Kontrolle: f(2) = 0.
Diese NST spalten wir mit Hilfe der Polynomdivision ab und wir erhalten:
$\left(-\frac{3}{4}x^3 + x^2 + 0x + 2\right) : (x - 2) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ Es gilt also:
$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2 + 2 = (x - 2)\left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right)$. Somit müssen weitere NST von f(x) auch Lösungen der quadratischen Gleichung $\left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) = 0$ sein. Da die Diskriminante negativ ist, können wir aber sicher sein, dass f(x) keine weiteren NST hat. Die einzige NST von f(x) lautet also: $\underline{\underline{x = 2}}$

c) Bekanntlich wird ein Produkt dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wir faktorisieren deshalb:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 = \left[x^2 - 1\right]^2 = \left[(x + 1)(x - 1)\right]^2 = (x + 1)^2(x - 1)^2 \\
&= (x + 1)(x + 1)(x - 1)(x - 1)
\end{aligned}
$$

Nun lassen sich die zwei NST (sog. doppelte NST) von f(x) ablesen: $\underline{\underline{x_1 = -1}}$ und $\underline{\underline{x_2 = 1}}$.

4. a)



$f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+1}$.

Nenner: $x^2+1\neq 0$ für alle x∈IR. Also: ID = IR.
Somit keine Definitionslücken!

Zähler: $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)$

Die NST lauten: $\underline{\underline{x_1=0}}$, $\underline{\underline{x_2=-2}}$ und $\underline{\underline{x_3=2}}$.

Schiefe Asymptote: Vermutung: y = x.

Nachweis: Die Polynomdivision führt zu:

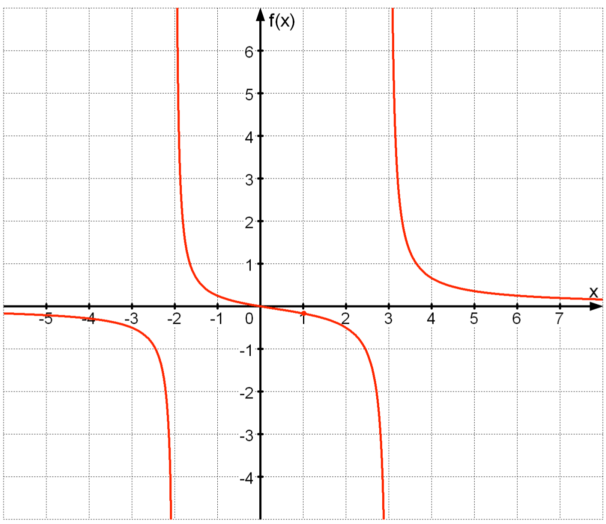
$$f(x)=(x^3-4x):(x^2+1)=x+\frac{-5x}{x^2+1}$$

Für $x\to\pm\infty$ strebt der zweite Summand gegen 0:

$$f(x)=(x^3-4x):(x^2+1)=x+\underbrace{\frac{-5x}{x^2+1}}_{\to 0}$$

Somit gilt für grosse x: $f(x)\approx x$

b)



$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^3-2x^2-5x+6}$

Wir faktorisieren den <u>Zähler</u>: $x^2-x=x(x-1)$

Dann den <u>Nenner</u>: Abspalten des Faktors (x – 1) mit Hilfe der Polynomdivision führt zu
$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x+6)$
$=(x-1)(x-3)(x+2)$

Somit gilt: $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)(x+2)}$.

x = 1 ist eine aufhebbare Definitionslücke.

x = 3 & x = -2 sind Polstellen.

x = 0 ist eine Nullstelle.

Grenzverhalten für $x\to\pm\infty$ (wir kürzen mit x^3):

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}=0$$

$\Rightarrow$ Die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote.

5. $\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+Bx}{x^2+3x}$

Ein Vergleich der Zähler führt zu: $3 = A(x+3)+Bx$ und somit zu: $3 = Ax+3A+Bx = 3A+x(A+B)$

A und B sind also so zu bestimmen, dass $3 = 3A + x(A+B)$ ist. Wir erkennen allerdings, dass auf der linken Seite dieser Gleichung kein x vorkommt.

Dies hat zur Folge, dass $(A+B)=0$ sein muss. Folglich gilt $3 = 3A$ und somit $\boxed{A=1}$.

Schliesslich folgt aus der Beziehung $(A+B)=0$,dass $\boxed{B=-1}$ ist.

Das Ganze könnte man auch so formulieren:

Die Beziehung $3 = 3A + x(A+B)$ führt zum Gleichungssystem: (1) $(A+B)=0$
(2) $3 = 3A$

Daraus resultieren die gesuchten Zahlen: $\boxed{A=1}$ und $\boxed{B=-1}$.

6. a) Der folgende Ansatz stammt von einem Assistenten. Besten Dank an Georgios Anthitsis.

$$g(x) = (x-[1+\sqrt{2}])\cdot(x-[1-\sqrt{2}]) = ([x-1]-\sqrt{2})\cdot([x-1]+\sqrt{2}) = [x-1]^2 - 2 = \underline{\underline{x^2-2x-1}}$$

Hier noch ein weiterer Ansatz meiner Assistenten (der für 6 b) leider nicht funktioniert):

Idee: Wir suchen zunächst ein Polynom mit $\sqrt{2}$ als NST. Ansatz: $(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2}) = x^2-2$
Nun betrachten wir den Graphen von $f(x) = x^2-2$ und verschieben ihn um 1 nach rechts.
Dann verschiebt sich natürlich auch die NST $\sqrt{2}$ um 1 nach rechts und wir erhalten die NST $\sqrt{2}+1$.
Somit: $f(x) = x^2-2 \xrightarrow{\text{Verschiebung um 1 nach rechts}} \underline{\underline{g(x) = (x-1)^2 - 2 = x^2-2x-1}}$

b) $(x-[\sqrt{2}+\sqrt{3}])\cdot(x+[\sqrt{2}+\sqrt{3}]) = x^2 - [\sqrt{2}+\sqrt{3}]^2 = x^2 - 5 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}$

Leider sind noch nicht alle Koeffizienten ganzzahlig. Also wiederholen wir den Ansatz:

$$f(x) = (x^2-5-2\sqrt{2}\sqrt{3})\cdot(x^2-5+2\sqrt{2}\sqrt{3}) = (x-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = \underline{\underline{x^4-10x^2+1}}$$

Block 2

1. a) Kürzen mit n ergibt $a_n = \dfrac{5n}{4n-2} = \dfrac{5}{4 - \dfrac{2}{n}}$.

   Da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{\dfrac{5}{4}}}$

   b) Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

   $$|\, a_n - a \,| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{5n}{4n-2} - \frac{5}{4}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{20n - 20n + 10}{16n-8}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{5}{8n-4}\right| < \varepsilon$$

   Die Betragsstriche können weggelassen werden da der Term im Betrag stets positiv bleibt (egal welche natürliche Zahl für n eingesetzt wird.) Somit gilt:

   $$\left|\frac{5}{8n-4}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{8n-4} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 5 < 8n\varepsilon - 4\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{5+4\varepsilon}{8\varepsilon} < n \qquad \text{q.e.d.}$$

   Zu jedem noch so kleinem $\varepsilon > 0$ finden wir also dank der Beziehung $\dfrac{5+4\varepsilon}{8\varepsilon} < n_\varepsilon$ stets ein passendes n_ε, so dass sämtliche Folgenglieder a_n ab diesem n_ε, vom Grenzwert $a = \dfrac{5}{4}$ weniger als $\varepsilon > 0$ entfernt sind.

   c) Wir setzen $\varepsilon = 0.0001$ in den Ausdruck $\dfrac{5+4\varepsilon}{8\varepsilon} < n$ ein und erhalten $6250.5 < n$.

   D.h., ab der Indexnummer n_0 = 6251 sind sämtliche Folgenglieder a_n vom Grenzwert $a = \dfrac{5}{4}$ weniger als 0,0001 entfernt.

2. a) Umformen und Anwendung der Grenzwertsätze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+12}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \dfrac{12}{n}}{3 - \dfrac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \dfrac{12}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \dfrac{2}{n}\right)} = \frac{5 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{12}{n}\right)}{3 - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}\right)} = \frac{5 + 12 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{3 - 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

   Natürlich könnte man auch ein paar Schritte überspringen und so rechnen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+12}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \overbrace{\dfrac{12}{n}}^{\to 0}}{3 - \underbrace{\dfrac{2}{n}}_{\to 0}} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-5}{n^2+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overbrace{\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}^{\to 0}}{1+\frac{4}{\underbrace{n^2}_{\to 0}}}=\dfrac{0}{1}=\underline{\underline{0}}$

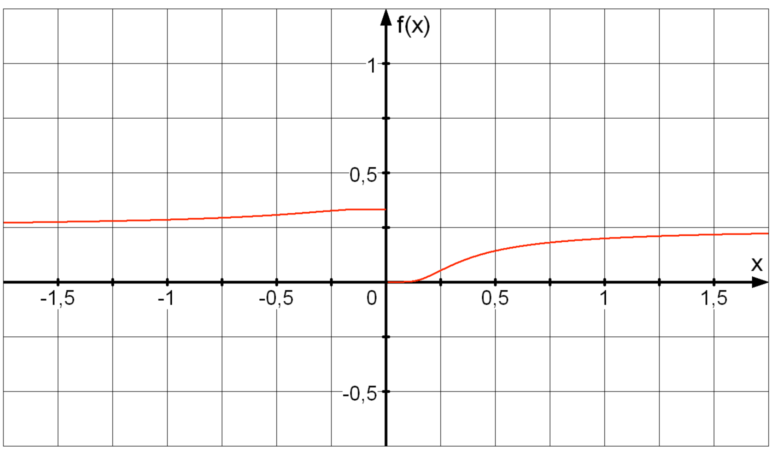
3. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{-x}+x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2^x}+x^2\right)=1+0=\underline{\underline{1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+4x-70}{3x-15}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x^2+2x-35)}{3(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x-5)(x+7)}{3(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2(x+7)}{3}=\underline{\underline{8}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{\underline{\underline{e}}}$

d) **Mit 3^x den Bruchterm kürzen**: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3^{-2x}}{1+3^{-2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\overbrace{\frac{1}{3^{2x}}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{3^{2x}}}_{\to 0}}=\dfrac{1}{1}=\underline{\underline{1}}$

4. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \text{von links}}}\left(\dfrac{1}{3+\underbrace{2^{\frac{1}{x}}}_{\to 0}}\right)=\underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \text{von rechts}}}\left(\dfrac{1}{3+\underbrace{2^{\frac{1}{x}}}_{\to\infty}}\right)=\underline{\underline{0}}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{3+\underbrace{2^{\frac{1}{x}}}_{\to 1}}\right)=\underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{3+\underbrace{2^{\frac{1}{x}}}_{\to 1}}\right)=\underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$



Fazit: Nicht aufhebbare Definitionslücke an der Stelle x=0. Waagrechte Asymptote y = 1/4

Tipp: Vertrauen Sie nicht zu sehr dem TR, wenn Sie hohe Exponenten eintippen. Bei sehr grossen (und sehr kleinen) Zahlen, kann es bald einmal zu "Rundungsfehlern" kommen. oder allenfalls zu einer sog. "Auslöschung". Merke: Ein TR ersetzt nicht den gesunden Menschenverstand!

5. a)

h	$\frac{e^h - 1}{h}$
1	1.71828
0.1	1.05171
0.01	1.00502
0.0001	1.00005

Offensichtlich gilt: $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

b) TR auf **Bogenmass** umstellen!

x	$\frac{\sin(x)}{x}$
1	0.84147
0.1	0.99833
0.01	0.99998
0.0001	0.99999

Offensichtlich gilt: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \underline{\underline{1}}$.

Algebraisch-rechnerische Herleitung:

Wir brauchen die Tatsache, dass folgendes gilt (siehe Dienstagsübungen, Block 2):

" $\tan(x) \geq x \geq \sin(x)$ für $x > 0$ klein".

Division durch $\sin(x)$ liefert: $\frac{1}{\cos(x)} \geq \frac{x}{\sin(x)} \geq 1$. Kehrwert bilden: $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

Den Limes bilden: $\overbrace{\lim_{x \to 0} \cos(x)}^{=1} \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$. Somit muss $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ gelten.

Block 3

1. Wir erinnern uns:

f ist an der Stelle x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$ die Linksableitung als auch die Rechtsableitung existieren, und die beiden Ableitungen sind gleich.

a) Da mit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ eine Polynomfunktion vorliegt, ist diese an jeder beliebigen Stelle x differenzierbar. Die Ableitung lautet: $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

b) Da $f(x) = \sqrt{x}$ für negative x nicht definiert ist, existiert an der Stelle x = 0 die Linksableitung nicht. Nähern wir uns von rechts an die Stelle x = 0 wird die Tangentensteigung "unendlich gross". Somit existiert an der Stelle x = 0 auch keine Rechtsableitung.

Zusammenfassung: $f(x) = \sqrt{x}$ ist für x > 0 differenzierbar. An der Stelle x = 0 existiert weder die Links-, noch die Rechtsableitung. Die Ableitung lautet: $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Da $f(x) = x\sqrt{x}$ für negative x nicht definiert ist, existiert an der Stelle x = 0 die Linksableitung nicht. Nähern wir uns von rechts an die Stelle x = 0 wird die Tangentensteigung Null. Somit ist f(x) an der Stelle x = 0 von rechts ableitbar.

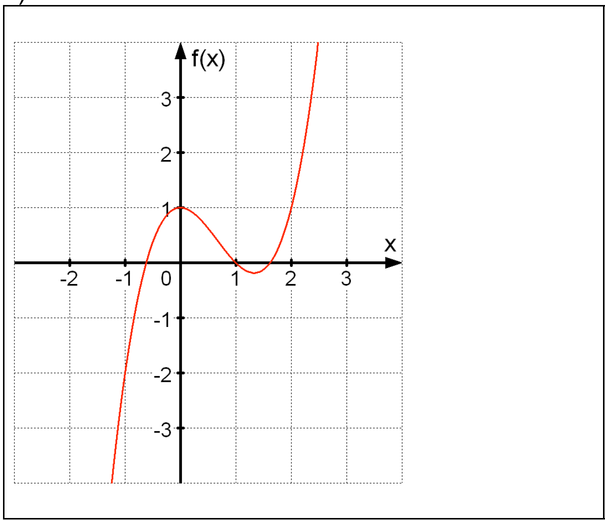
Zusammenfassung: $f(x) = x\sqrt{x}$ ist für x > 0 differenzierbar. An der Stelle x = 0 existiert nur die Rechtsableitung und sie beträgt 0.

$f(x) = x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Die Ableitung lautet: $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

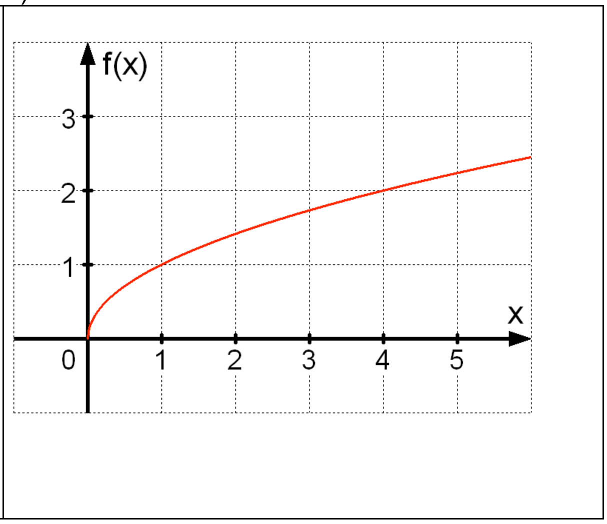
d) Die Rechtsableitung an der Stelle x = 0 beträgt 1, die Linksableitung hingegen (–1). Somit ist die Betragsfunktion an der Stelle x = 0 nicht differenzierbar. An allen anderen Stellen ist $f(x) = |x|$ hingegen differenzierbar.

Die vier Graphen zu den Aufgaben a), b), c) und d) sehen folgendermassen aus:

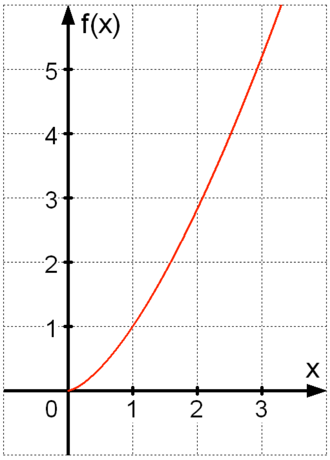
a)



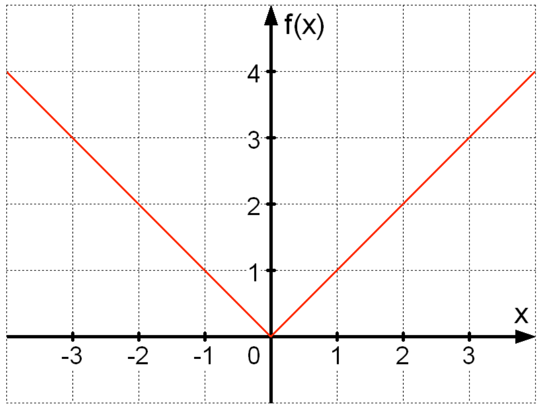
b)



c)



d)



2. a) $\underline{f'(x) = 3a^2x^2 - 2\sqrt{b}x + \frac{1}{2}c}$

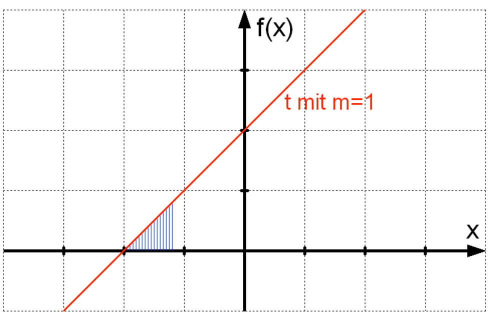
b) $f(x) = (\sqrt{x} - q) \cdot (1 + \sqrt{x}) = \sqrt{x} + x - q - q\sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot (1 - q) + x - q$,

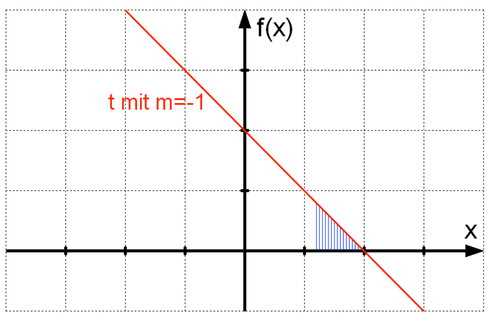
$\underline{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1 - q) + 1}$

c) $f(x) = (1 - x^{-4}) \cdot (x^{-1} + x^2) = x^{-1} + x^2 - x^{-5} - x^{-2}$,

$\underline{f'(x) = -x^{-2} + 2x + 5x^{-6} + 2x^{-3} = \frac{5}{x^6} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2x}$

3. a) Ein solcher Schnittwinkel von 45° mit der x-Achse entspricht einer Tangentensteigung von 1, oder von -1. Hier eine Zeichnung fürs bessere Verständnis:





Das heisst: Wir suchen alle Stellen x_0 in denen die Tangentensteigung im Kurvenpunkt $(x_0 / f(x_0))$ 1, oder -1 beträgt. Zu lösen ist somit die Gleichung: $f'(x_0) = \pm 1$:

$2x_0 = \pm 1 \;\Rightarrow\; x_0 = \pm\frac{1}{2}$. Somit in $P_1\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$ und in $P_2\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$.

b) Der Rechenweg ist analog zur Teilaufgabe a): $f'(x_0) = \pm 1 \Leftrightarrow 3(x_0)^2 = \pm 1$.

Im Fall $3(x_0)^2 = +1$ erhalten wir $x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Im Fall $3(x_0)^2 = -1$ gibt es keine weitere Lösungen.

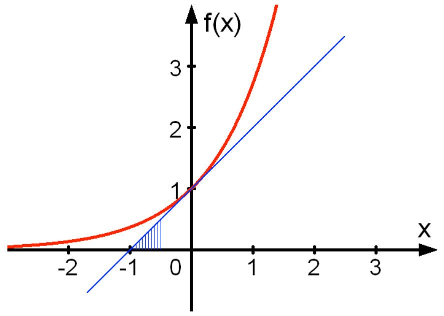
Somit in $P_1\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \,\middle|\, \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\right)$ und in $P_2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \,\middle|\, -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\right)$

c) $f'(x_0) = e^{x_0} = \pm 1$

Im Fall $e^{x_0} = -1$ erhalten wir keine Lösung, da e^x für alle Exponenten x stets grösser 0 ist.

Im Fall $e^{x_0} = +1$ folgt $x_0 = 0$. Somit in $P_1(0 \mid 1)$.

Interessant zu wissen: Unter allen Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$, ist die Basis $e = 2.718...$ die einzige, die in $(0 \mid 1)$ eine Tangente mit einem Steigungswinkel von 45° zur Folge hat!



4. a) Hier wäre es zwar möglich, aber unvorteilhaft, die Quotientenregel anzuwenden!

$$\boxed{\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^2} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{2x + 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}}}}$$

b) Hier muss die Produktregel und die Kettenregel angewendet werden:

$$\boxed{f'(x) = x \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 + 1 \cdot \sin(x^3) = \underline{\underline{3x^3 \cdot \cos(x^3) + \sin(x^3)}}}$$

5. Bei dieser Aufgabe brauchen wir die Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)\cdot(x^2+4) - (x-2)^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^3 + 8x - 4x^2 - 16 - 2x^3 + 8x^2 - 8x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 16}{\underline{\underline{(x^2+4)^2}}} = 4 \cdot \frac{x^2 - 4}{(x^2+4)^2}$$

6. Sei $f(x) = x^n$, (n ∈ IN).

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$ = ... Wir erinnern uns an das Pascal'sche Dreieck:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{[x^n + n \cdot x^{n-1}h^1 + \ldots \cdot x^{n-2}h^2 + \ldots \cdot x^{n-3}h^3 + \ldots \cdot + h^n]}^{(x+h)^n} - x^n}{h}$$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{n \cdot x^{n-1}h^1 + \ldots \cdot x^{n-2}h^2 + \ldots \cdot x^{n-3}h^3 + \ldots \cdot + h^n}{h}$ = ... Wir kürzen mit h und bestimmen dann den Limes:

$= \lim\limits_{h \to 0} n \cdot x^{n-1} + \underbrace{\ldots \cdot x^{n-2}h^1 + \ldots \cdot x^{n-3}h^2 + \ldots \cdot + h^{n-1}}_{\to 0} = n \cdot x^{n-1}$ q.e.d.

7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = (u \cdot v^{-1})'$ Die Produktregel (PR) und anschliessend die Kettenregel (KR) anwenden:

$$(u \cdot v^{-1})' \overset{PR}{=} u' \cdot v^{-1} + u \cdot (v^{-1})' \overset{KR}{=} u' \cdot v^{-1} + u \cdot (-1)v^{-2} \cdot v' = \frac{u'}{v} - \frac{u}{v^2} \cdot v' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Block 4

1. a) $(\log_2 x)^2 - \log_2(x^5) + 6 = 0 \Leftrightarrow [\log_2(x)]^2 - 5 \cdot [\log_2(x)] + 6 = 0$.

Substitution: $t = [\log_2(x)]$ führt zur quadratischen Gleichung $t^2 - 5 \cdot t + 6 = 0$, welche wir mit einem Zweiklammeransatz lösen: $(t-3)(t-2) = 0$. Die Lösungen lauten: $t_1 = 3$ und $t_2 = 2$.

Rücksubstitution: $t_1 = [\log_2(x)] = 3 \Leftrightarrow \underline{2^3 = x}$ und $t_2 = [\log_2(x)] = 2 \Leftrightarrow \underline{2^2 = x}$.

Die Lösungsmenge lautet somit: **IL = { 4; 8 }**.

b) Achtung: Logarithmieren ist nur für x > 0 erlaubt; also lieber einen anderen Weg suchen, denn sonst werden allfällige Lösungen x $\leq$ 0 einfach ignoriert.
Überhaupt sollte man hier beachten, dass der Ausdruck x^{2x+1} nicht für alle x $\in$ IR definiert ist!

*Ansatz: Wir vereinfachen die Gleichung durch die Division mit $x \neq 0$. <u>Der Fall **x = 0** erweist sich als erste Lösung der Gleichung</u>. Nun ist also die Gleichung $x^{2x} = 1$ zu lösen, was nach entsprechenden Umformungen $x^{2x} = 1 \Leftrightarrow (x^x)^2 = 1$ zum Problem $x^x = \pm 1$ führt.*
Dieses Problem gilt es nun sorgfältig zu analysieren und zu lösen. Etwa mit einer Fallunterscheidung:

*Sei x > 0, dann ist der Ausdruck x^x definiert und sicher positiv. Weiter kann man zeigen, dass x^x für 0 < x < 1 kleiner als 1 und für x > 1 grösser als 1 wird, und somit <u>**x = 1** sicher die einzige positive Lösung der Gleichung</u> sein kann.*
*Eine andere Möglichkeit im Fall x > 0 ist, die Gleichung $x^x = 1$ zu logarithmieren, was erlaubt ist, da hier ausschliesslich positive x angeschaut werden. Dies führt zur Gleichung $x \cdot \log(x) = 0$ und folglich ebenfalls zur Lösung **x = 1**, denn log (1) ist gleich 0 und zudem wird x > 0 vorausgesetzt.*

Sei nun x < 0, dann ist der Ausdruck x^x nur für x $\in$ {-1; -2; -3; ...} = Z^- definiert.
Wir gehen nun alle möglichen Lösungskandidaten x $\in$ {-1; -2; -3; ...} durch:
*<u>Zunächst stellt sich **x = -1** gleich als weitere Lösung heraus</u>!*

Danach untersuchen wir zuerst die noch verbleibenden geraden Zahlen -2; -4; -6; ...., und anschliessend die noch verbleibenden ungeraden Zahlen -3; -5; -7; ... :

$(-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^2}$; $(-4)^{-4} = \dfrac{1}{(-4)^4}$; ... Diese Werte liegen alle im Intervall $(0; \frac{1}{4}]$ und können also keine Lösungen der Gleichung $x^x = \pm 1$ sein.

$(-3)^{-3} = \dfrac{1}{(-3)^3}$; $(-5)^{-5} = \dfrac{1}{(-5)^5}$; ... Diese Werte liegen alle im Intervall $[-\frac{1}{27}; 0)$ und können ebenfalls keine Lösungen der Gleichung $x^x = \pm 1$ sein.

Unsere Problemanalyse ist nun abgeschlossen. Nach dieser Fallunterscheidung können wir folgern, dass nur -1; 0 und 1 zur Lösungsmenge gehören. Zum Abschluss nochmals die wichtigsten Schritte:

$x^{2x+1} = x \Leftrightarrow x^{2x} \cdot x^1 = x$ Beide Seiten durch $x \neq 0$ dividieren und sich die Lösung $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ vormerken

$x^{2x} = 1 \Leftrightarrow \left(x^x\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^x = \pm 1$. Aus den obigen Überlegungen folgt:

Für $\underline{\underline{x_2 = 1}}$ ist $x^x = +1$ erfüllt, für $\underline{\underline{x_3 = -1}}$ ist $x^x = -1$ erfüllt und es gibt keine weiteren Lösungen, da sämtliche noch in Frage kommenden Lösungskandidaten aus dem Definitionsbereich systematisch ausgeschlossen wurden.

Somit gilt: **IL = { -1, 0, 1 }**

2. a) $e^{\ln(x)} = x$ (Nach Definition.)

   Wir leiten beide Seiten der Gleichung ab und wenden auf der linken Seite die Kettenregel an.

   $$\underbrace{e^{\ln(x)}}_{x} \cdot \ln'(x) = 1 \Leftrightarrow x \cdot \ln'(x) = 1 \Leftrightarrow \underline{\ln'(x) = \frac{1}{x}}.$$

   b) $a^{\log_a(x)} = x$ (Nach Definition.)

   Wir leiten beide Seiten der Gleichung ab und wenden auf der linken Seite die Kettenregel an.

   $$\overbrace{\ln(a) \cdot \underbrace{a^{\log_a(x)}}_{x}}^{\text{äussere Ableitung}} \cdot \overbrace{\log_a{}'(x)}^{\text{innere Abl.}} = 1 \Leftrightarrow \ln(a) \cdot x \log_a{}'(x) = 1 \Leftrightarrow \underline{\log_a{}'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}}$$

   Beim ersten Schritt wurde zudem die Tatsache $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$ verwendet (siehe Skript).

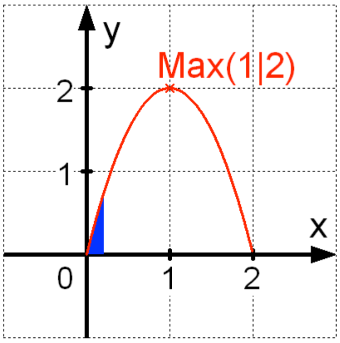
3. a) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $f'(1) = \frac{1}{2}$. Somit gilt: $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{26.565^\circ}$

   b) $f(x) = x\sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.

   $f'(3) = \frac{11}{4}$. Somit gilt: $\alpha = \arctan\left(\frac{11}{4}\right) = \underline{70.017^\circ}$

4. Zunächst stellen wir die Parabelgleichung auf. Die Kugel wird im Ursprung, also an der NST x=0 abgeschossen und erreicht das Maximum an der Stelle x=1. Aus Symmetriegründen lautet also die zweite NST x=2. Lediglich die Öffnung der Parabel ist noch unbekannt. Somit bietet sich der folgende Nullstellen-Ansatz für die Parabelgleichung P an (Vgl. auch die untenstehende Zeichnung):

   P: $y = a(x-0)(x-2) = ax^2 - 2ax$



Um a zu berechnen setzen wir den Punkt (1 ; 2) in die Parabelgleichung P ein,

$$2 = a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot x$$

$$2 = a - 2a$$

$$a = -2$$

und erhalten somit P: $y = -2x^2 + 4x$.

Weiter gilt: $y' = -4x + 4$ und folglich $y'(0) = 4$.

Nun lässt sich der gesuchte Steigungswinkel berechnen: $\arctan(4) = \underline{75.964^\circ}$

5. $$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\overbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}^{1}}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2(x)}}}$$

oder so:

$$\tan'(x) = \ldots = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{1 + \tan^2(x)}}$$

6. (1) Wir betrachten sämtliche Alters-Kombinationen der Kinder:

$$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = \underline{1 \cdot 6 \cdot 6} = \underline{2 \cdot 2 \cdot 9} = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4$$

(2) Mögliche Hausnummern sind somit: 38, 21, 16, 14, <u>13</u>, <u>13</u>, 11, 10.

(3) Baba braucht an dieser Stelle eine **weitere Information**. **Also** wissen wir, dass die Hausnummer 13 sein muss. Denn **nur dafür** gibt es **zwei** Kombinationen: $1 \cdot 6 \cdot 6$ und $2 \cdot 2 \cdot 9$

(4) „...das älteste..." also muss es sich um die Kombination $\underline{\underline{2 \cdot 2 \cdot 9}}$ handeln ☺.