Vorkurs Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaften, LÖSUNGEN

Dienstag

Block 1

1.

a)	(1) $-4x+3y=6$ (2) $3x-6y=3$	IL = { (-3 | -2) }
b)	(1) $5x-3y=24$ (2) $-2x+y=9$	IL = { (-51 | -93) }
c)	(1) $5x+y=10$ (2) $12.5x+2.5y=25$	Sämtliche Lösungsmethoden liefern hier wahre Aussagen. Zum Beispiel « 0 = 0 ». Bedeutung: Die zweite Gleichung ist das 2.5-fache der ersten Gleichung und liefert somit «keine neue Information». D.h.: Sämtliche Lösungspaare (x | y), welche die erste Gleichung erfüllen, erfüllen auch die zweite Gleichung: (1 | 5); (0 | 10); (4 | -10); ... usw. Die Lösungsmenge lässt sich schreiben als: IL = { (x | y) | y = 10 – 5x }

2. Mit der Additionsmethode sind die Lösungen schnell gefunden. Um etwa y herauszufinden, rechnet man $\boxed{a_2 \cdot (1) - a_1 \cdot (2)}$ und isoliert dann y. Analog berechnet man x.

3. Siehe Lösungen im Theorieskript! Hier sei nur das Beispiel Nr. 4 vorgerechnet:

Substitution: $u = \frac{1}{x}$ und $v = \frac{1}{3y}$. Führt zu:

(1) $\boxed{\frac{2}{5}u + 10v = 1}$ $\Leftrightarrow$ (1) $\boxed{2u + 50v = 5}$

(2) $\boxed{\frac{1}{2}u - v = -1}$ $\Leftrightarrow$ (2) $\boxed{u - 2v = -2 \Leftrightarrow u = 2v - 2}$ einsetzen in (1)

$\boxed{\Rightarrow v = \frac{1}{6} \Rightarrow u = -\frac{5}{3}}$, Somit $\underline{\underline{x = -\frac{3}{5}}}$ und $\underline{\underline{y = 2}}$

4. Behauptung: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Beweis: Es gilt: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ und $a^y = c \Leftrightarrow y = \log_a c$.

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c} \Rightarrow a^{x-y} = \frac{b}{c} \stackrel{Def.}{\Rightarrow} \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x - y \Leftrightarrow \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

5. a) $\boxed{\log_7(49) = x \Leftrightarrow 7^x = 49 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}}}$ b) $\boxed{\log_3(1) = x \Leftrightarrow 3^x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}}$

c) $\boxed{\log_5(\sqrt[6]{25}) = x \Leftrightarrow 5^x = 25^{1/6} \Leftrightarrow 5^x = (5^2)^{1/6} \Leftrightarrow 5^x = 5^{1/3} \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}}$

d) $\boxed{\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) = x \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{x = -1}}}$

6. a) $\boxed{\log_a(b+c) + \log_a\left[(b+c)^{-1}\right] = \log_a(b+c) - \log_a(b+c) = \underline{\underline{0}}}$

b) $\boxed{\log_{a-b}(a^2 - 2ab + b^2) = \log_{a-b}(a-b)^2 = 2 \cdot \underbrace{\log_{a-b}(a-b)}_{1} = \underline{\underline{2}}}$

c) $\boxed{\frac{\log_c(b^2)}{\log_c(a)} = \frac{\log_a(b^2)}{\log_a(a)} = \frac{\log_a(b^2)}{1} = \underline{\underline{2 \cdot \log_a(b)}}}$ (Beim ersten Schritt: Basiswechsel.)

Zweite Lösungsvariante: $\boxed{\frac{\log_c(b^2)}{\log_c(a)} = \frac{2 \cdot \log_c(b)}{\log_c(a)} = 2 \cdot \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = 2 \cdot \frac{\log_a(b)}{\underbrace{\log_a(a)}_{=1}} = \underline{\underline{2 \cdot \log_a(b)}}}$

d)
$$\log_c(a^4 - b^4) - \log_c(a^2 + b^2) - \log_c(a+b) = \log_c\left(\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)}\right) - \log_c(a+b)$$
$$= \log_c(a^2 - b^2) - \log_c(a+b) = \log_c\left(\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}\right) = \underline{\underline{\log_c(a-b)}}$$

7. a) $\boxed{\log_x 1024 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x^{10} = 1024 \quad \overset{\sqrt[10]{\ }}{\Rightarrow} \quad \underline{\underline{x = 2}}}$ b) $\boxed{\log_3 x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3^5 = x \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{243 = x}}}$

8. Vorüberlegung zur <u>Anzahl Stellen einer Zehnerpotenz</u>: $10^2 = 100$ hat 3 Stellen.

Ebenso 3 Stellen hat $10^{2.2304...} = 10^{\log(170)} = 170$

Diese Zahl kann auch so dargestellt werden: $10^{2.2304...} = 10^{0.2304...} \cdot 10^2 = 1.7 \cdot 10^2$

Mit $10^3 = 1'000$ erhalten wir erstmals 4 Stellen.

Dank diesen Überlegungen sieht man sofort ein: $10^{12'787.536...} = 10^{0.536...} \cdot 10^{12'787}$ hat 12'788 Stellen.

<u>Idee</u>: Wir schreiben $19^{10'000}$ als Zehnerpotenz 10^x.

$$19^{10'000} = 10^x \Rightarrow x = \log(19^{10'000}) = 10'000 \cdot \log(19) = 12'787.536...$$

Also gilt: $19^{10'000} = 10^{12'787.536...}$ und hat somit <u>12'788 Stellen</u>.

Zudem gilt: $19^{10'000} = \underline{10^{0.536...}} \cdot 10^{12'787} = \underline{3.43565...} \cdot 10^{12'787}$

Die vordersten Ziffern der Zahl $19^{10'000}$ lauten somit: $\underline{\underline{3\ 4\ 3\ 5}}$ ... usw.

Block 2

1. a) $2^x = 0.25 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-2}$; Exponentenvergleich: x = –2; **IL = { – 2 }**

   b) $3^{2x+1} = 81 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^4$; Exponentenvergleich: 2x + 1 = 4; **IL = { 1.5 }**

   c) $3^x \cdot 27 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^3 = 3^{-2} \Leftrightarrow 3^{x+3} = 3^{-2}$; Exponentenvergleich: x + 3 = –2; **IL = { – 5 }**

   d) $\sqrt[x+1]{16} = 8 \Leftrightarrow 16^{\frac{1}{x+1}} = 8 \Leftrightarrow (2^4)^{\frac{1}{x+1}} = 2^3$; Exponentenvergleich: $\frac{4}{x+1} = 3$; **IL = { 1/3 }**

2. $2 \cdot \log(x+3) - \log(x+1) = 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{10}\left[\frac{(x+3)^2}{x+1}\right] = 1 \overset{Def.}{\Leftrightarrow} 10^1 = \left[\frac{(x+3)^2}{x+1}\right] \;\Leftrightarrow\; 10x + 10 = x^2 + 6x + 9$

   $\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x - 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 4.2361}};\; \underline{\underline{x_2 = -0.2361}}$ (Mit der Lösungsformel für quadr. Gl. gelöst).

   oder so: $\log_{10}\left[\frac{(x+3)^2}{x+1}\right] = 1 \overset{\log_{10}(10)=1}{\Leftrightarrow} \log_{10}\left[\frac{(x+3)^2}{x+1}\right] = \log_{10}(10) \underset{\log(x)-Funktion}{\overset{Eineindeutigkeit}{\Leftrightarrow}} \left[\frac{(x+3)^2}{x+1}\right] = 10 \;\Leftrightarrow \ldots usw.$

3. a)

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 5.2^x &= 3 \cdot 0.75^x && \Big|\text{ logarithmieren} \\
\log 4 + x \cdot \log 5.2 &= \log 3 + x \cdot \log 0.75 && \Big| -\log 4 \;\Big|\; -x \cdot \log 0.75 \\
x \cdot \log 5.2 - x \cdot \log 0.75 &= \log 3 - \log 4 && \Big|\; x \text{ ausklammern} \\
x(\log 5.2 - \log 0.75) &= \log 3 - \log 4 && \Big|: (\log 5.2 - \log 0.75) \\
x &= \boxed{\frac{\log 3 - \log 4}{\log 5.2 - \log 0.75} = \underline{\underline{-0.1486}}}
\end{aligned}
$$

   b)

$$
\begin{aligned}
10^{\frac{x}{x+1}} &= 0.8 && \Big|\text{ logarithmieren} \\
\frac{x}{x+1} \cdot \log 10 &= \log 0.8 && \Big| \cdot (x+1) \\
x \cdot \log 10 &= \log 0.8 \cdot (x+1) && \Big|\text{ Man beachte: log10 = 1} \\
x &= x \cdot \log 0.8 + \log 0.8 && \Big| - x \cdot \log 0.8 \\
x - x \cdot \log 0.8 &= \log 0.8 && \Big|\; x \text{ ausklammern} \\
x(1 - \log 0.8) &= \log 0.8 && \Big|: (1 - \log 0.8) \\
x &= \boxed{\frac{\log 0.8}{1 - \log 0.8} = \underline{\underline{-0.0884}}}
\end{aligned}
$$

Beim Eintippen in den TR die nötigen Klammern setzen:
log (0.8) / **(**1 – log (0.8)**)**

c) Substitution: $5^x = a$

$$5^{2x} - 27 \cdot 5^x = 0 \;\Rightarrow\; a^2 - 27a = 0 \;\Leftrightarrow\; a(a-27) = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0;\; a_2 = 27$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow 5^x = 0 \Rightarrow \{\};\quad a_2 = 27 \Rightarrow 5^x = 27 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2.0478}}$$

d) $2^{4x} + 2^{4x+5} = 99$, Idee: 2^{4x} vorklammern! (Oder Substitution: $2^{4x} = a \;\Rightarrow\; a + a \cdot 2^5 = 99$)

$$\begin{array}{rcll} 2^{4x}(1+2^5) & = & 99 & \big|\; : (1+2^5) \\ 2^{4x} & = & 3 & \big|\; \text{logarithmieren und nach x auflösen} \\ x & = & \boxed{\dfrac{\log 3}{4 \cdot \log 2} = \underline{\underline{0.3962}}} & \end{array}$$

4. Hier ist nach dem „**Modell des exponentiellen Wachstums**“ zu rechnen:

$\boxed{\text{Endzustand = Anfangszustand} \cdot \text{b}^{\text{Dauer}}}$

Dabei ist **b** der sog. **Wachstums**faktor falls **b > 1**, respektive der sog. **Abnahme**faktor falls **b < 1** ist.

Modell: $N(t) = N(0) \cdot b^t$. Bei dieser Aufgabe gilt: $b = 2$ (…bedeckte Fläche jeden Tag verdoppelt)

"Kaufe ich ein Exemplar, so ist der Teich nach 20 Tagen völlig bedeckt": $N(t) = 1 \cdot 2^{20} = 2^{20}$
"Wie lange dauert das, falls ich gleich zwei Pflanzen kaufe?" $2^{20} = 2 \cdot 2^t$
$2^{20} = 2 \cdot 2^t \Leftrightarrow 2^{19} = 2^t \Rightarrow \underline{\underline{t = 19}}$. Antwort: **Es dauert 19 Tage**.

5. Modell: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. Somit gilt: $K_{10} = 100 \cdot (1 + 0.015)^{10} = \underline{\underline{116.05.-}}$

Verdreifachung des Kapitals:
$$\boxed{\begin{aligned} 100 \cdot (1+0.015)^n &= 3 \cdot 100 \\ (1.015)^n &= 3 \\ n \cdot \log(1.015) &= \log(3) \\ n &= \frac{\log(3)}{\log(1.015)} = 73.79 \end{aligned}}$$
Also erstmals nach 74 J.

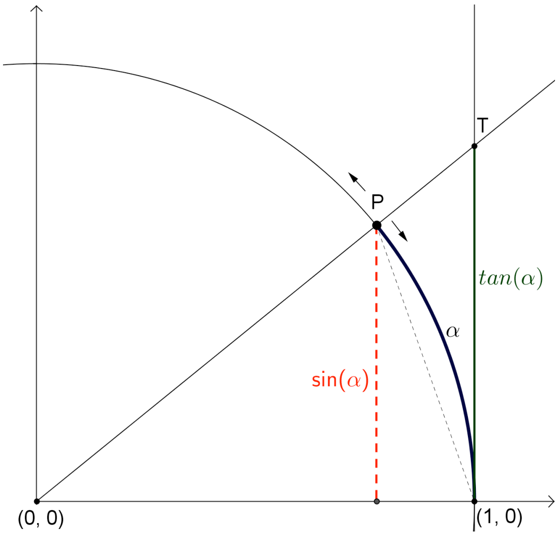
6. π entspricht 180°. Somit entspricht dem Winkel 1° das Bogenmass $\frac{\pi}{180}$. Es gilt also:

a) $15^\circ = \frac{15\pi}{180} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}$ b) $225^\circ = \frac{225\pi}{180} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{4}}}$ analog: c) $\underline{\underline{\frac{7\pi}{12}}}$ d) $\underline{\underline{\frac{37\pi}{24}}}$

7.
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\overset{Add.Theorem}{=}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}}\approx 0.9659...$$

Auf diese Weise kann man auch für weitere spezielle Winkel den Sinus- Cosinus- oder Tangenswert exakt bestimmen.

8.



Begründung:

Wir betrachten das <u>Dreieck (innerhalb des Kreissektors)</u> mit den Ecken (0, 0); (1, 0) und P.

Der Dreiecksflächeninhalt beträgt: $\frac{1\cdot\sin(\alpha)}{2}$ *(Grundlinie mal Höhe durch 2)*

Wir betrachten den <u>Kreissektor</u> begrenzt durch die Radien der Länge 1 und dem Bogen der Länge α.
Der Kreissektorflächeninhalt beträgt: $\frac{\alpha\cdot 1}{2}$ *(Bogenlänge mal Radius durch 2)*

Wir betrachten das etwas <u>grössere Dreieck</u> begrenzt durch die beiden Katheten der Länge $\tan(\alpha)$ und 1, also das Dreieck mit den Ecken (0, 0); (1, 0) und T.

Der Dreiecksflächeninhalt beträgt: $\frac{1\cdot\tan(\alpha)}{2}$ *(Kathete mal Kathete durch 2)*

Nun vergleichen wir diese drei Flächeninhalte!

Aus der obigen Zeichnung ist klar ersichtlich, dass die folgende Grössenrelation gilt:

$$\frac{1\cdot\tan(\alpha)}{2}\geq\frac{\alpha}{2}\geq\frac{1\cdot\sin(\alpha)}{2}\quad\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\quad\tan(\alpha)\geq\alpha\geq\sin(\alpha).$$

Block 3

1. a) Ansatz: " y = m · x + q ". m = -2 haben wir schon! Wir müssen also nur noch q berechnen:

C(2 / -3) liegt auf der Geraden. Es gilt deshalb: " -3 = m · 2 + q ".

Wir setzen m = - 2 ein: " -3 = -4 + q ". Nach q aufgelöst ergibt das q = 1. Lösung: y = -2 x + 1.

b) Da die Gerade " y = m · x + q " parallel zu " y = 2x – 3 " sein soll, bedeutet dies schon mal: m = 2

Die Aufgabe lautet also neu: Gesucht ist die Gerade " y = 2x + q " durch R(-2 / 1). Siehe Aufgabe a):

Wir setzen den Punkt R in die Geradengleichung ein und lösen dann nach q auf:

1 = 2 · (-2)+ q. Nach q aufgelöst ergibt sich der Wert q = 5. Lösung: y = 2x + 5.

c) **1. Idee** (aufwendig!): Mit der Steigungsformel zuerst m berechnen, dann durch Einsetzen eines Punktes wie bei der Aufgabe a) die Geradengleichung bestimmen, und schliesslich kontrollieren wir durch Einsetzen der Punkte...

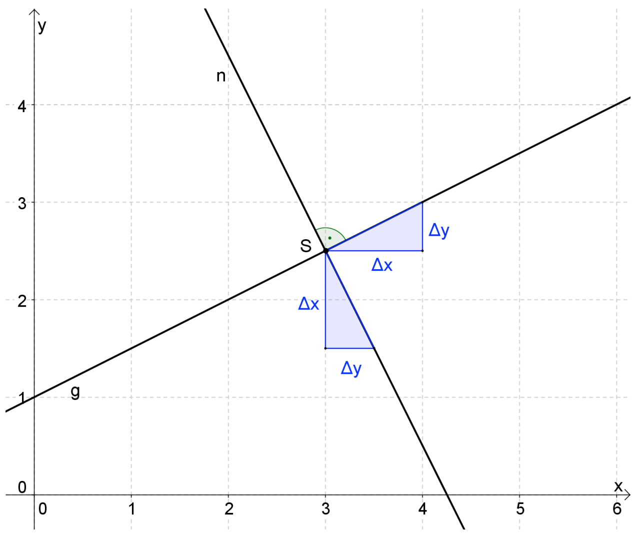
2. Idee: (Effizienter und eleganter!): Falls die 3 Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen, dann müssen die Steigungen von PQ und PR gleich sein! (Falls Sie diesen Gedanken nicht nachvollziehen können, fertigen Sie eine Skizze an!)

Steigung von PQ: $m_{PQ} = \frac{6-1}{-3-2} = -1$ Steigung von PR: $m_{PR} = \frac{-2-1}{5-2} = -1$

Gleiche Steigungen! Deshalb gilt: P, Q und R liegen tatsächlich auf einer Geraden!

d) Wir lassen die Gerade g mit der Steigung $m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ um einen beliebigen Punkt S, mit dem Winkel 90°, im Uhrzeigersinn rotieren.

So entsteht eine neue Gerade n, die zu g senkrecht steht, die sogenannte Normale n zu g durch S.



Natürlich wird das Steigungsdreieck mitgedreht. Die horizontale Strecke Δx wird nach der Drehung vertikal und die vertikale Strecke Δy wird nach der Drehung horizontal.

Nebst diesem "Rollentausch" beim Steigungsdreieck, gilt es noch folgendes zu beachten: Die neu entstandene Normale n hat eine negative Steigung, falls die ursprüngliche Gerade g eine positive Steigung hat und umgekehrt.

Das bedeutet: Zwei Geraden g und n stehen genau dann senkrecht zueinander, falls folgendes gilt:

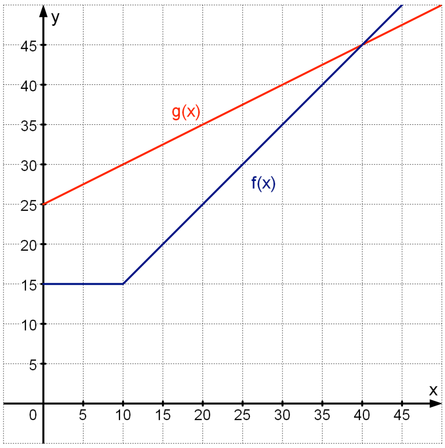
$$\boxed{\underline{\underline{m_g \cdot m_n}} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\cdot\left(-\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = \underline{\underline{-1}}}.$$

e) Die gesuchte Gerade " y = m · x + q " soll normal zu " y = 2x – 3 " sein. Das heisst: $\underline{m = -\frac{1}{2}}$.

Die Aufgabe lautet also neu: Gesucht ist die Gerade " y = $-\frac{1}{2}$x + q " durch R(-2 / 1): Wir setzen den Punkt R in die Geradengleichung ein und lösen dann nach q auf: 1 = $-\frac{1}{2}$ · (-2) + q.

Nach q aufgelöst ergibt sich der Wert q = 0. Somit lautet die Lösung: $\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x}}$

2. $f(x) = \begin{cases} 15 & \text{, für x} \le 10 \\ x+5 & \text{, für x} \ge 10 \end{cases}$; $g(x) = 0.5x + 25$

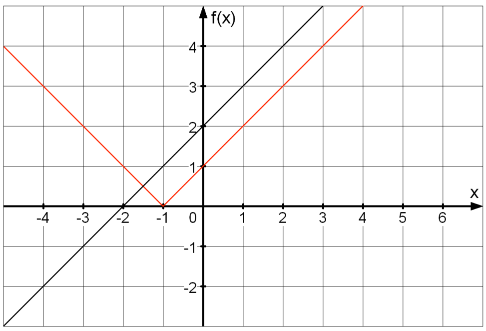


Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen:

$$0.5x + 25 = x + 5$$
$$20 = 0.5x$$
$$40 = x$$

Antwort: <u>Ab 40 Minuten</u> ist das zweite Angebot günstiger.

3. $|x+1| = x+2$;



$\underline{\underline{x = -1.5}}$

Zum rechnerischen Teil:

1. Fall: Sei $(x+1) > 0$.

Dann können die Betragsstriche weggelassen werden und es gilt: $\boxed{\begin{aligned} x+1 &= x+2 \\ 1 &= 2 \\ L &= \{\} \end{aligned}}$

2. Fall: Sei $(x+1) < 0$.

Die Betragsstriche können nur weggelassen werden wenn das Argument zwischen den Betragsstrichen positiv ist, dies erreichen wir indem wir den negativen Term $(x+1) < 0$ mit (-1) multiplizieren:

$$\boxed{\begin{aligned} -(x+1) &= x+2 \\ -x-1 &= x+2 \\ -3 &= 2x \\ -1.5 &= x \end{aligned}}$$

Die Lösung lautet $\underline{\underline{x = -1.5}}$.

4. Da die Parabel den Scheitel im Ursprung (0 / 0) hat, ergibt sich der Ansatz: $\boxed{y = a \cdot x^2}$.

   Wir **setzen** den Punkt **(2 / 3) ein**, um a zu bestimmen: $3 = a \cdot 2^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{3}{4}$.

   Wir erhalten somit: $\underline{\underline{\boxed{y = \frac{3}{4} \cdot x^2}}}$

5. Die Parabel $y = a \cdot x^2$ verläuft zwischen den Parabeln y = $1.2x^2$ und y = $-1.4x^2$, falls $-1.4 < a < 1.2$.

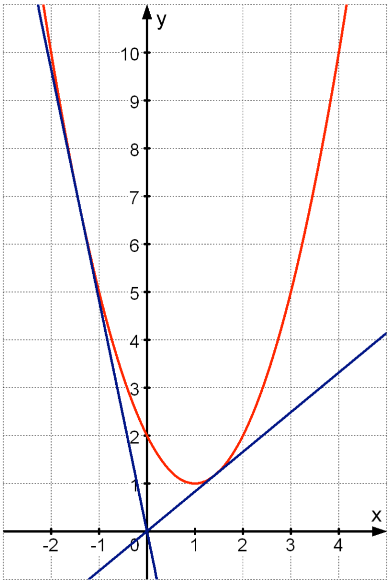
   Dies trifft zu bei den Parabeln: y = $0.1x^2$; y = $-\frac{5}{8}x^2$ und y = $-\frac{1}{3}x^2$.

6. Wir bringen die quadratische Gleichung für x zuerst in die Normalform und betrachten anschliessend die Diskriminante D. Damit diese Gleichung nur eine Lösung hat, muss D = 0 gelten.

$$(x-1)^2 + 1 = ax$$
$$x^2 - 2x + 1 + 1 = ax \;\| -ax$$
$$x^2 - x(2+a) + 2 = 0$$
$$D = (2+a)^2 - 8 = 4 + 4a + a^2 - 8 = a^2 + 4a - 4$$

Die Bedingung D = 0 führt erneut zu einer quadratischen Gleichung. Dieses Mal für den Parameter a.

$D = a^2 + 4a - 4 \overset{!}{=} 0$ Diese Gleichung hat die Lösungen: $\underline{\underline{a_1 = -2 + 2\sqrt{2}}}$ und $\underline{\underline{a_2 = -2 - 2\sqrt{2}}}$



Graphische Interpretation:

Die Geraden $g_1(x) = a_1 \cdot x$ und $g_2(x) = a_2 \cdot x$ besitzen nur einen gemeinsamen (Schnitt)punkt mit der Parabel $p(x) = (x-1)^2 + 1$ und sind somit Tangenten der Parabel und zwar die einzigen zwei die durch den Ursprung (0 / 0) gehen.

Die Berührpunkte lassen sich ebenfalls berechnen und lauten:

$B_1(-\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2}+4)$ und $B_2(\sqrt{2} \mid -2\sqrt{2}+4)$

Als Dezimalzahlen: $B_1(-1.14 \mid 6.83)$ und $B_2(1.14 \mid 1.17)$

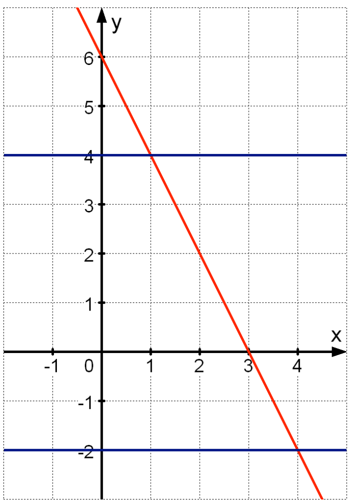
7. **Lösung**: Zünde das erste Seil an beiden Enden und das zweite an einem Ende an. Wenn das erste abgebrannt ist, ist eine halbe Stunde vorbei, zu diesem Zeitpunkt zünde das zweite Seil auch noch am anderen Ende an.

Block 4

1. a)

$$\begin{aligned} 3x+8 &\le 7-5x \quad \left| +5x \right| -8 \\ 8x &\le -1 \quad \left| :8 \right. \\ x &\le -\frac{1}{8} \\ x &\in \left(-\infty;\ -\frac{1}{8}\right] \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} -2 \le -2x+6 \le 4 &\quad \left| -6 \right. \\ -8 \le -2x \le -2 &\quad \left| :(-2) \right. \quad \le \text{ Zeichen umkehren} \\ 4 \ge x \ge 1 & \\ x \in [1;\ 4] & \end{aligned}$$

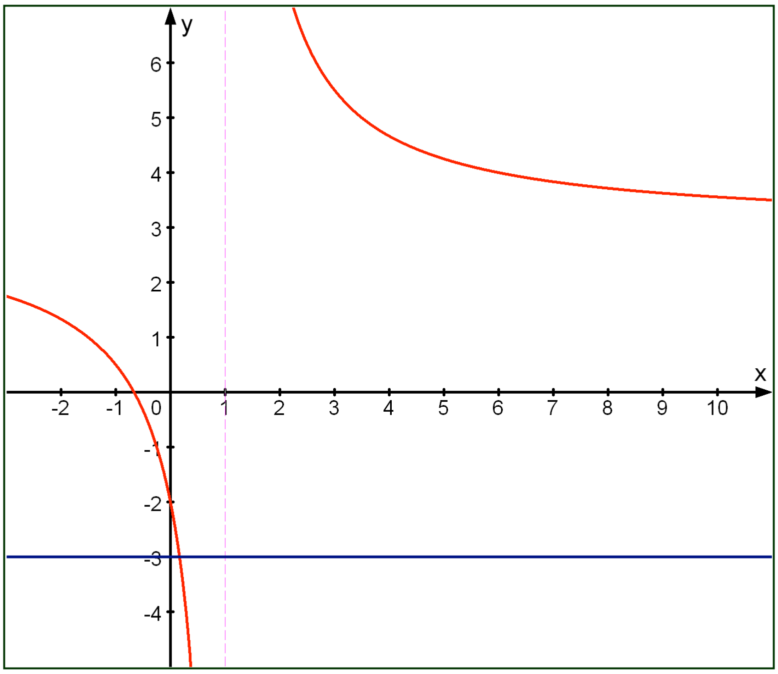
c) Variante 1: "Grafische Betrachtung im Koordinatensystem"

Idee: Wir zeichnen zunächst die Graphen der Funktionen

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1} \text{ und } g(x) = -3$$

Anschliessend schauen wir für welche x-Stellen der Graph von f(x) oberhalb des Graphes von g(x) verläuft und somit die gewünschte Bedingung $\frac{3x+2}{x-1} > -3$ erfüllt ist.

Die Lösung der Gleichung f(x) = g(x) führt zur Schnittstelle x = 1/6. Nun kann die Lösungsmenge abgelesen werden: IL $= (-\infty,\ \frac{1}{6}) \cup (1,\ +\infty)$.



Variante 2: "Fallunterscheidung"

Fall 1: Für x > 1 ist der HN = (x – 1) positiv.

$\frac{3x+2}{x-1} > -3$ | $\cdot$HN = (x – 1)

3x + 2 **>** –3(x – 1)

3 x + 2 > –3x + 3

6x > 1

x > 1/6

Fall 2: Für x < 1 ist der HN = (x – 1) negativ.

$\frac{3x+2}{x-1} > -3$ | $\cdot$HN = (x – 1)

3x + 2 **<** –3(x – 1)

3 x + 2 < –3x + 3

6x < 1

x < 1/6

Im Fall 1 haben wir: x > 1 **und** x > 1/6. Dies ergibt das Intervall: $IL_1 = \{ x \in IR \mid x > 1 \}$

Im Fall 2 haben wir: x < 1 **und** x < 1/6. Dies ergibt das Intervall: $IL_2 = \{ x \in IR \mid x < 1/6 \}$

Die Gesamtlösung ergibt sich als Vereinigung der beiden Teillösungen:

$$IL = IL_1 \cup IL_2 = \{x \in IR \mid x < \frac{1}{6} \text{ oder } x > 1\} = (-\infty, \frac{1}{6}) \cup (1, +\infty) = IR \setminus [\frac{1}{6}; 1]$$

Variante 3: "Vorzeichentabelle erstellen"

Es gilt: $\frac{3x+2}{x-1} > -3 \Leftrightarrow \boxed{\frac{6x-1}{x-1} > 0}$

			$\frac{1}{6}$	1
Zähler	$6x-1$	–	+	+
Nenner	$x-1$	–	–	+
Bruch	$\frac{6x-1}{x-1}$	+	–	+

Aus der untersten Zeile können wir nun die Lösungsmenge ablesen:

Die Ungleichung $\frac{6x-1}{x-1} > 0$ wird für die folgenden Zahlen x erfüllt:

$$IL = \{x \in IR \mid x < \frac{1}{6} \text{ oder } x > 1\} = (-\infty, \frac{1}{6}) \cup (1, +\infty) = IR \setminus [\frac{1}{6}; 1]$$

2. $(\cos x)^{\sin x} = 1$. Vorüberlegung: Allgemein gilt $a^b = 1 \Rightarrow a = 1$, oder $b = 0$.

   Also betrachten wir: $\cos x = 1$, oder $\sin x = 0$.

   Beides ist für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nur für x = 0 erfüllt (was man am Einheitskreis schnell konstatieren kann).

   Somit gilt: IL = { 0 }.

3. Vorwissen: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, respektive äquivalent dazu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

   Somit lässt sich die gegebene Gleichung folgendermassen umformen:

$$
\begin{aligned}
2\cos^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\
2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 &= 0 \\
2 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\
0 &= 2\sin^2 x - \sin x - 1
\end{aligned}
$$

   Nun liegt eine quadratische Gleichung für sin(x) vor. Diese lösen wir wie gewohnt mit Hilfe der Lösungsformel: $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$. $\sin(x) = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -0.5 \end{cases}$

   Es gilt nun also zwei Fälle zu unterscheiden: 1.Fall: $\sin(x) = 1$ und 2.Fall: $\sin(x) = -0.5$

   1.Fall: $\sin(x) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}}$ mit k eine ganze Zahl.

   Bemerkung: Die Addition des Terms $k \cdot 2\pi$ besagt lediglich, dass folgendes gilt:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right) = \ldots = 1.$$

   In Gradmass ausgedrückt: $\sin(90^\circ) = \sin(90^\circ + 360^\circ) = \sin(90^\circ + 720^\circ) = \ldots = 1.$

   Anders formuliert: Den Sinuswert 1 erhält man erstmals nach 90° und anschliessend nach jeder vollen Umdrehung auf dem Einheitskreis. Wenn wir die Lösungsmenge in Gradmass angeben möchten, können wir also folgendes schreiben:

   IL_1 = { ..., -270°, 90°, 450°, 810°, ... } = { $90^\circ + k \cdot 360^\circ$, mit k eine beliebige ganze Zahl }.

   Für die Gesamtlösungsmenge müssen wir, zu all diesen Lösungen die aus dem 1. Fall resultieren, noch alle Lösungen die wir im 2. Fall gleich berechnen werden, hinzufügen. Kommen wir also zum 2. Fall:

   2. Fall: $\sin(x) = -0.5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi}}$ oder $\underline{\underline{x = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi}}$ mit k jeweils eine ganze Zahl.

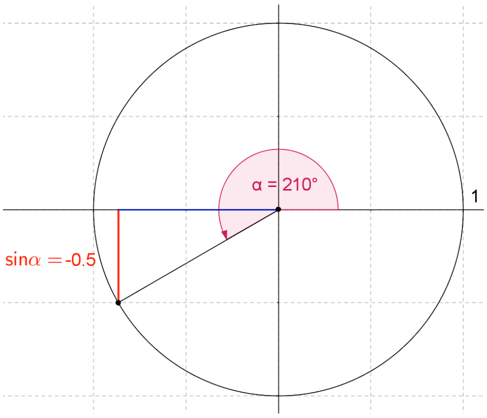
   In Gradmass ausgedrückt: $\underline{\underline{x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ}}$ oder $\underline{\underline{x = -150^\circ + k \cdot 360^\circ}}$ mit k jeweils eine ganze Zahl.

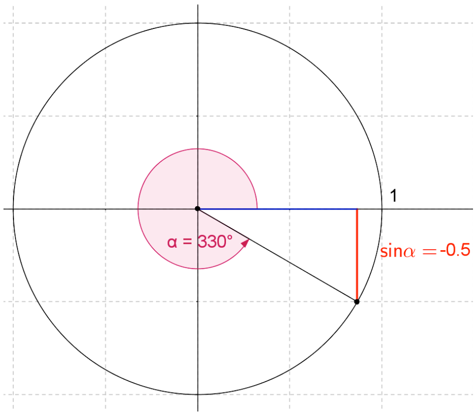
Selbstverständlich könnte man die Lösungen auch durch positive Winkel ausdrücken:

$\underline{\underline{x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi}}$ oder $\underline{\underline{x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi}}$. In Gradmass: $\underline{\underline{x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ}}$ oder $\underline{\underline{x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ}}$

jeweils mit k eine beliebige ganze Zahl.

Die Tatsache, dass es im Intervall von 0 bis 2π zwei Winkel α_1 und α_2 mit dem Wert -0.5 gibt, führt man sich am Besten am Einheitskreis vor Augen (siehe Abbildung unten):





Allgemein gilt:
Zu einem Sinuswert (bzw. Cosinuswert) zwischen -1 und 1 gibt es immer zwei Winkel aus $[0^\circ; 360^\circ[$

Merke: Der TR liefert nur den Winkel $-\frac{\pi}{6}$, respektive falls der TR in Gradmass eingestellt ist: -30°.

Der zweite Winkel $-\frac{5\pi}{6}$ (respektive in Gradmass ausgedrückt -150°) lässt sich anschliessend durch Symmetrieüberlegungen am Einheitskreis bestimmen.

Der 2. Fall hat uns somit zur folgenden Lösungsmenge geführt:

$IL_2 = \{ -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \; -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \}$, in Gradmass:

$IL_2 = \{ -30^\circ + k \cdot 360^\circ, \; -150^\circ + k \cdot 360^\circ \} = \{ \ldots, -390^\circ, -150^\circ, -30^\circ, 210^\circ, 330^\circ, 570^\circ \ldots \}$

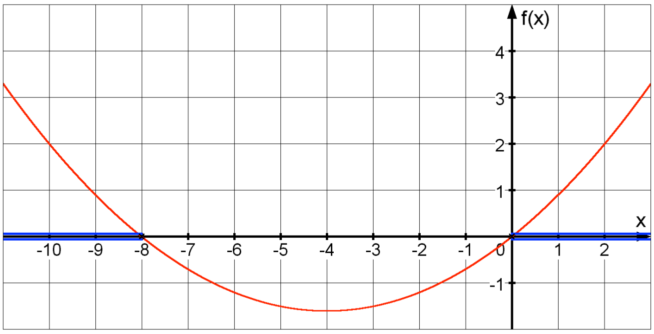
Die **Gesamtlösungsmenge** lautet somit: $IL = \{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \; -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \; -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \}$, respektive in Gradmass ausgedrückt: $IL = \{ 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \; -30^\circ + k \cdot 360^\circ, \; -150^\circ + k \cdot 360^\circ \}$, mit k jeweils eine beliebige ganze Zahl.

Mögliche Lösungen sind also zum Beispiel: $x = 450^\circ$, $x = -270^\circ$, $x = 690^\circ$, $x = -510^\circ$, ... usw.

4. Vorbemerkung: Bei den Abbildungen in den Teilaufgaben a) und b) handelt es sich lediglich um eine Skizze und nicht um den exakten Verlauf des Funktionsgraphen. Für die Bestimmung der Lösungsmenge sind lediglich die Nullstellen und die Öffnung der Parabel wichtig.

a) $0.5x^2 + 4x > 0$.

Dank der Faktorzerlegung $x\,(0.5x + 4) = 0$ erhält man die Nullstellen $x_1 = -8$; $x_2 = 0$ der Funktion $f(x) = 0.5x^2 + 4x$. Wegen $a = 0.5 > 0$ ergibt sich die folgende Skizze des Graphen:



Für alle x-Stellen grösser als 0, sowie für alle x-Stellen kleiner als -8 erhalten wir Funktionswerte f(x), die grösser sind als Null. An den Stellen $x = 0$ und $x = -8$ erhalten wir exakt den Wert Null.
Diese Zwei Werte sind also auszuschliessen da sie nicht grösser als Null sind.

$0.5x^2 + 4x > 0$ hat also die Lösungsmenge: **IL =] $-\infty$; -8 [$\cup$] 0; $+\infty$ [= IR \ [-8 ; 0].**

b) $4x^2 - 3x - 27 \le 0$.

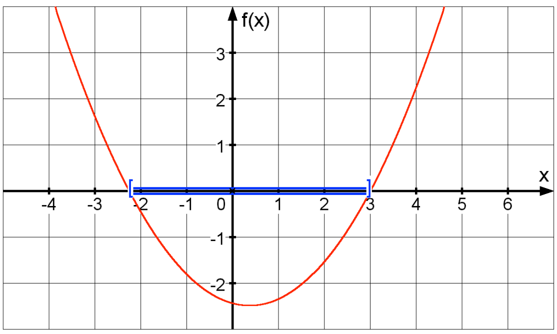
Bestimmung der Nullstellen von $f(x) = 4x^2 - 3x - 27$: D = 441; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{441}}{8} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2.25 \end{cases}$

$f(x) = 4x^2 - 3x - 27$ ist somit eine nach oben geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -2.25$ schneidet. An diesen Stellen ist $f(x) = 0$; zwischen diesen Stellen ist $f(x) < 0$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung lautet somit **IL = [- 2.25 ; 3]**.

Die Intervallgrenzen gehören selbstverständlich dazu, da bei dieser Ungleichung "kleiner oder gleich null" verlangt wird.

Zur Veranschaulichung sei hier die Skizze des Graphen von $f(x) = 4x^2 - 3x - 27$ gegeben:



c) **$-3x^2 + 5x - 7 < 0$.**

Die Berechnung der Diskriminante ergibt: $D = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-7) = 25 - 84 < 0$.

Die Parabel f(x) = – $3x^2$ + 5x – 7 ist nach unten geöffnet und schneidet die x-Achse wegen D < 0 nicht, da keine Nullstellen existieren. Sie verläuft ganz unterhalb der x-Achse; an allen Stellen x ist f(x) < 0.

Anders formuliert: Jede Zahl x erfüllt die Ungleichung – $3x^2$ + 5x – 7 < 0.
Die Lösungsmenge der Ungleichung ist somit **IL = IR**

5. Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

Fall 1: Sei x > 0

$$|x| = ax+1 \qquad \Big|\ da\ \ x>0 \Rightarrow |x| = x$$

$$x = ax+1 \qquad \Big|\ -ax$$

$$x(1-a) = 1 \qquad \Big|\ :(1-a)$$

$$x = \frac{1}{(1-a)}$$

Für jedes beliebige $a<1$ erhalten wir eine positive Lösung x > 0.

Für $a>1$ gibt es im Fall 1 sicher keine Lösung, da x > 0 nicht erfüllt ist.

Fall 2: Sei x < 0

$$|x| = ax+1 \qquad \Big|\ da\ \ x<0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$-x = ax+1 \qquad \Big|\ +x \quad \Big|\ -1$$

$$-1 = x(a+1) \qquad \Big|\ :(a+1)$$

$$\frac{-1}{(a+1)} = x$$

Für jedes beliebige $a>-1$ erhalten wir eine negative Lösung x < 0.

Für $a<-1$ gibt es im Fall 2 sicher keine Lösung, da x < 0 nicht erfüllt ist.

Wenn wir also einen Wert a wählen, der grösser als –1 und kleiner als 1 ist, werden wir in beiden Fällen eine Lösung erhalten. Und diese Lösungen sind sicher verschieden, da es sich im Fall 1 um eine positive und im Fall 2 um eine negative Lösung handeln wird.

Schlussfazit:

Somit erhalten wir für jedes beliebige $\boxed{a\in(-1;\ \ 1)}$ $\Leftrightarrow$ $-1<a<1$ zwei verschiedene Lösungen; und zwar eine positive Lösung $x_1 = \frac{1}{(1-a)}$ und eine negative Lösung $x_2 = \frac{-1}{(a+1)}$.

Zum Beispiel lauten für $a=0$ die zwei Lösungen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Oder etwa für $a=0.5$ lauten die zwei Lösungen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$.