Vorkurs Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaften, LÖSUNGEN

MONTAG

Block 1

1. $\underline{\underline{\dfrac{233}{30}}}$ *Bemerkungen: Klammern von innen nach aussen auflösen; „Punkt vor Strich"*

2. a) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{(3/4)}\right)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{8}{3}} = \underline{\underline{\dfrac{3}{8}}}$ b) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{(2/3)}{4}\right)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{6}\right)} = \underline{\underline{6}}$

3. a) $\pi \in$ IR b) $\sqrt{2} \in$ IR c) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \in \mathrm{Q} \subset$ IR d) $\dfrac{(-100)\cdot(-99)\cdot(-98)\cdot(-97)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \in$ IN

   Bemerkung zu d) Geht auch ohne TR! Kürzen $\Rightarrow$ Nenner: 1 und Zähler: Produkt $\in$ IN

4. $x = 0.7\overline{3}$:

$$\begin{array}{rcr} 100x & = & 73.333... \\ -\ 10x & = & 7.333... \\ \hline 90x & = & 66 \end{array}$$

   Somit ist $x = \dfrac{66}{90} = \underline{\underline{\dfrac{11}{15}}}$.

5. a) (4a – 3b)(a + 2b)(5a + 6b) = $(4a^2 + 8ab - 3ab - 6b^2)(5a + 6b)$
   $= (4a^2 + 5ab - 6b^2)(5a + 6b)$
   $= 20a^3 + 24a^2b + 25a^2b + 30ab^2 - 30ab^2 - 36b^3$
   $= \underline{\underline{20a^3 + 49a^2b - 36b^3}}$

   b) $\boxed{\begin{array}{l} 1-x(1-x(1-x(1-x(1-x+x^2) = 1-x(1-x(1-x(1-x+x^2-x^3) \\ = 1-x(1-x(1-x+x^2-x^3+x^4) = 1-x(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5) \\ \underline{\underline{= 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6}} \end{array}}$

   c) $(4ax - 3by)(4ax + 3by) - 16(ax + by)^2 = 16a^2x^2 - 9b^2y^2 - 16(a^2x^2 + 2axby + b^2y^2)$
   $= 16a^2x^2 - 9b^2y^2 - 16a^2x^2 - 32axby - 16b^2y^2$
   $= \underline{\underline{-25b^2y^2 - 32axby}}$

6. a) $\boxed{(x+y)^7 = \underline{\underline{x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7}}}$

   b) $(-m + 10)^5 = (10 - m)^5 = \underline{\underline{100'000 - 50'000m + 10'000m^2 - 1'000m^3 + 50m^4 - m^5}}$

7. a) $\boxed{\begin{array}{l} 42ab - 56bd - 48ac + 64cd = 2\cdot(21ab - 28bd - 24ac + 32cd) \\ = 2\cdot[7b(3a-4d) - 8c(3a-4d)] = \underline{\underline{2(3a-4d)(7b-8c)}} \end{array}}$

   b) $\boxed{x^4 - x^3 - 12x^2 = x^2(x^2 - x - 12) = \underline{\underline{x^2(x+3)(x-4)}}}$

c) $\boxed{2(r+2)(3r+1)-5(r+2)^2 = (r+2)[2(3r+1)-5(r+2)] = (r+2)[6r+2-5r-10] = \underline{\underline{(r+2)(r-8)}}}$

d) $\boxed{256n^3-4 = 4(64n^3-1) = 4[(4n)^3-1] = \underline{\underline{4(4n-1)(16n^2+4n+1)}}}$

Hier wurde $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ verwendet.

e) $\boxed{r^4-3r^2+1 = r^4-3r^2\underline{+r^2}+1\underline{-r^2} = r^4-2r^2+1-r^2 = (r^2-1)^2-r^2 = \underline{\underline{(r^2-1+r)(r^2-1-r)}}}$

Bei diesen Aufgaben wollen wir vorerst auf Wurzelausdrücke in den Klammern verzichten.
Später (als Anwendung der allgemeinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen) werden wir sehen, dass sich der Term r^4-3r^2+1 noch weiter zerlegen lässt:

$$r^4-3r^2+1=(r^2-1+r)(r^2-1-r)=\underline{\left(r-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(r+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(r-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(r+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

8. a) $\dfrac{a-5}{5-a}$ *((–1) im Zähler ausklammern!)* $\dfrac{(-1)(5-a)}{5-a}=\underline{\underline{-1}}$

b) $\dfrac{4xy-20}{30-6xy}=\dfrac{-4(5-xy)}{6(5-xy)}=\underline{\underline{-\dfrac{2}{3}}}$

c) $\dfrac{9x^2-12xy+4y^2}{12x^2-11xy+2y^2}=\dfrac{(3x-2y)^2}{12x^2-11xy+2y^2}=\dfrac{(3x-2y)^2}{(3x-2y)(4x-y)}=\underline{\underline{\dfrac{3x-2y}{4x-y}}}$

Beginnen Sie mit der Zerlegung des einfacheren Terms, also hier mit dem Zählerterm. Dann haben Sie einen Ansatz für einen möglichen Zweiklammeransatz im Nenner: $(3x-2y)\cdot(\ \ldots\ )$

9. a) $\dfrac{2a}{3b}=\dfrac{10a^2}{15ab}$ *(Erweiterungsfaktor: 5a)*

b) $\dfrac{9x}{7y}=\dfrac{?}{7ay-7by}=\dfrac{?}{7y(a-b)}=\dfrac{9x(a-b)}{7y(a-b)}$ *(Erweiterungsfaktor: (a–b))*

c) $\dfrac{a-3b}{3x-1}=\dfrac{?}{2-6x}=\dfrac{?}{(-2)(3x-1)}=\dfrac{-2a+6b}{(-2)(3x-1)}=\dfrac{-2a+6b}{2-6x}$ *(Erweiterungsfaktor: (–2))*

10. * Zeigen Sie: Für alle m ∈ IN ist $\dfrac{m^3}{6}+\dfrac{m^2}{2}+\dfrac{m}{3}$ eine ganze Zahl. Hinweis: Klammern Sie aus!

$\dfrac{m^3}{6}+\dfrac{m^2}{2}+\dfrac{m}{3}=\dfrac{m^3+3m^2+2m}{6}=\dfrac{m(m^2+3m+2)}{6}=\dfrac{m(m+1)(m+2)}{6}$. Im Zähler steht ein Produkt von drei *aufeinanderfolgenden* Zahlen ∈ IN $\Rightarrow$ Der Zähler ist durch 2 und 3 teilbar, also auch durch 6.

Achtung! Der letzte Schritt war nur erlaubt weil 2 und 3 teilerfremd sind (d.h.: ggT(2, 3) = 1).

Ein Gegenbeispiel: 36 ist durch 4 und 6 teilbar, aber nicht durch 24.

Block 2

1. Brüche addieren und subtrahieren

a) $\dfrac{4x-5y}{2x}-\dfrac{5x-5y}{2x}=\dfrac{4x-5y-5x+5y}{2x}=\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{a}{a+b}-1=\dfrac{a-(a+b)}{a+b}=\dfrac{a-a-b}{a+b}=\dfrac{-b}{a+b}$

c) $\dfrac{5a-b}{a^2b}-\dfrac{3a+b}{ab^2}-\dfrac{4a^2-7ab-b^2}{a^2b^2}=\dfrac{b(5a-b)-a(3a+b)-(4a^2-7ab-b^2)}{a^2b^2}$

$=\dfrac{5ab-b^2-3a^2-ab-4a^2+7ab+b^2}{a^2b^2}=\dfrac{11ab-7a^2}{a^2b^2}=\dfrac{a(11b-7a)}{a^2b^2}=\dfrac{11b-7a}{ab^2}$

d) Den zweiten Bruch mit (–1) erweitern:

$\dfrac{2x}{x^2-y^2}-\dfrac{2y}{y^2-x^2}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}-\dfrac{-2y}{x^2-y^2}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}+\dfrac{2y}{x^2-y^2}=\dfrac{2x+2y}{x^2-y^2}=\dfrac{2(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{2}{x-y}$

e) $\dfrac{a-2}{(a-4)^2}-\dfrac{a-2}{a^2-7a+12}=\dfrac{a-2}{(a-4)^2}-\dfrac{a-2}{(a-4)(a-3)}=\dfrac{(a-2)(a-3)-(a-2)(a-4)}{(a-4)^2(a-3)}=$

anstatt an dieser Stelle alles auszumultiplizieren:

$=\dfrac{a^2-3a-2a+6-(a^2-4a-2a+8)}{(a-4)^2(a-3)}=\dfrac{a^2-3a-2a+6-a^2+4a+2a-8}{(a-4)^2(a-3)}=\dfrac{a-2}{(a-4)^2(a-3)}$

klammert man lieber (a - 2) vor und rechnet so:

$\dfrac{(a-2)(a-3)-(a-2)(a-4)}{(a-4)^2(a-3)}=\dfrac{(a-2)[\overbrace{(a-3)-(a-4)}^{=1}]}{(a-4)^2(a-3)}=\dfrac{(a-2)}{(a-4)^2(a-3)}$

2. Brüche multiplizieren und dividieren

a) $\dfrac{4m-8n}{ax+3ay}\bullet\dfrac{2bx+6by}{6n-3m}=\dfrac{4(m-2n)}{a(x+3y)}\bullet\dfrac{2b(x+3y)}{(-3)(m-2n)}=\dfrac{4\cdot 2b}{-3a}=-\dfrac{8b}{3a}$

b) $(5a+5b):\dfrac{a^2-b^2}{15xy}=\dfrac{5(a+b)}{1}\bullet\dfrac{15xy}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{75xy}{a-b}$

c) $\dfrac{c-2d}{5x}:(2d-c)=\dfrac{c-2d}{5x}\bullet\dfrac{1}{(-1)(c-2d)}=-\dfrac{1}{5x}$

3. Vermischtes

a) $\left(x-\dfrac{y}{x}\right)\bullet\left(x+\dfrac{y}{x}\right)=x^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=x^2-\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{x^4-y^2}{x^2}$ 3.Binomische Formel anwenden.

b) $$\frac{21a^2b}{10c^2}:\left(\frac{5ab}{3c}+\frac{ab}{5c}\right)=\frac{21a^2b}{10c^2}:\left(\frac{25ab+3ab}{15c}\right)=\frac{21a^2b}{10c^2}\bullet\frac{15c}{28ab}=\underline{\underline{\frac{9a}{8c}}}$$

c) $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(x-y)+(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\left(\frac{y+x}{xy}\right)\cdot(x-y)+(x+y)\cdot\left(\frac{y-x}{xy}\right)$$

$$=\left(\frac{(x+y)(x-y)}{xy}\right)+\left(\frac{(y+x)(y-x)}{xy}\right)=\frac{x^2-y^2}{xy}+\frac{y^2-x^2}{xy}=\frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{xy}=\frac{0}{xy}=\underline{\underline{0}}$$

4. Doppelbrüche

a) $$\frac{a}{a-\frac{a}{1+\frac{1}{a}}}=\frac{a}{a-\frac{a}{\frac{a+1}{a}}}=\frac{a}{a-\frac{\frac{a}{1}}{\frac{a+1}{a}}}=\frac{a}{a-\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{a+1}}=\frac{a}{a-\frac{a^2}{a+1}}=\frac{a}{\frac{a(a+1)-a^2}{a+1}}=$$

$$=\frac{a}{\frac{a^2+a-a^2}{a+1}}=\frac{a}{\frac{a}{a+1}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{a}{a+1}}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a+1}{a}=\underline{\underline{a+1}}$$

b) $$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{(x-y)^2}{4xy}+1}$$ Idee: Den gesamten Doppelbruch mit "4xy" erweitern

$$\frac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\cdot 4xy}{\left(\frac{(x-y)^2}{4xy}+1\right)\cdot 4xy}=\frac{4x^2-4y^2}{(x-y)^2+4xy}=\frac{4(x^2-y^2)}{x^2+2xy+y^2}=\frac{4(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\underline{\underline{\frac{4x-4y}{x+y}}}$$

5. Machen Sie den Nenner wurzelfrei und vereinfachen Sie anschliessend den Term.

a) $$\frac{6}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}=\frac{6\cdot(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}=\frac{6\cdot(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{5-8}=\frac{6\cdot(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}{-3}=\underline{\underline{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}}$$

b) $$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}}$$ geschicktes Erweitern (Anwendung der 3. Bin. Formel im Nenner):

$$\frac{\left[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\right]}{\left[(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\right]}\cdot\frac{\left[(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\right]}{\left[(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\right]}=\frac{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-3}=$$

$$=\frac{1-2+\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{2}\;+3}{1-2\sqrt{2}+2-3}=\frac{2+2\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{2}}=\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}}$$

Weitere Lösungsvariante:

$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$ geschicktes Erweitern und Anwendung der Binomischen Formeln:

$$\frac{\left[1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]}{\left[1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]}\cdot\frac{\left[1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]}{\left[1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]} = \frac{1+2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2+2\sqrt{6}+3}{1-(2+2\sqrt{6}+3)} =$$

$$= \frac{6+2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+2\sqrt{6}}{-4-2\sqrt{6}} = \left[\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{-(2+\sqrt{6})}\right]\cdot\frac{(2-\sqrt{6})}{(2-\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{6+2\sqrt{2}+\sqrt{12}+2\sqrt{6}-3\sqrt{6}-\sqrt{12}-\overbrace{\sqrt{18}}^{3\sqrt{2}}-6}{-(4-6)} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}}}$$

Das Endresultat wurde hier auf verschiedene Weisen dargestellt. In der Mathematik gilt die Konvention, ein solches Ergebnis in der sogenannten **Normalform eines Wurzelterms** anzugeben. Im obigen Beispiel wäre das: $-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}$. Es wird also allgemein die folgende Form angestrebt:

$$\boxed{q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + q_3\sqrt{n_3} + \ldots}$$

Mit q_0, q_1, q_2, q_3 etc. rationale Zahlen. Weiter sind alle Wurzeln soweit als möglich gezogen (und nicht im Nenner) und die einzelnen Terme soweit als möglich zusammengezogen. Weitere Beispiele sind:

$\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \underline{\underline{2\cdot\sqrt{3}}}$, $\quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}}$, $\quad \sqrt{80}+\sqrt{27} = \underline{\underline{4\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{3}}}$

Diese Normalform ermöglicht einheitliche Endresultate, welche man auf einem Blick vergleichen kann.

6. a) $(\underbrace{5}_{a} - \underbrace{\sqrt{5x+9}}_{b})^2 = \underbrace{5^2}_{a^2} - \underbrace{2\cdot 5\cdot\sqrt{5x+9}}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{5x+9}_{b^2} = \underline{\underline{34-10\cdot\sqrt{5x+9}+5x}}$

b) $(c\cdot\sqrt{x-1})^2 = c^2\cdot(x-1) = \underline{\underline{c^2x-c^2}}$

Zu a) und zu b): Einmal mehr gilt: Quadriert man eine Summe, ist es falsch einfach die einzelnen Summanden zu quadrieren. Man muss jeweils die entsprechende binomische Formel anwenden:

$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$. Respektive bei einer Differenz: $\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$.

Bei einem Produkt hingegen ist das Quadrieren der einzelnen Faktoren korrekt: $\boxed{(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2}$

c) $\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} \overset{3.B.F}{=} \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$

Block 3

1. a) Achtung: $\frac{a^{-3}}{\cancel{a}} = a^{-2}$ ist falsch! So darf nicht gekürzt werden! Die folgenden zwei Rechenwege sind hingegen korrekt: $\boxed{\frac{a^{-3}}{a} = \frac{\frac{1}{a^3}}{a} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^4} = \underline{\underline{a^{-4}}}}$, oder besser: $\boxed{\frac{a^{-3}}{a} = \frac{a^{-3}}{a^1} = a^{-3-1} = \underline{\underline{a^{-4}}}}$

b) $\boxed{\frac{b}{b^{-3}} = b^{1-(-3)} = \underline{\underline{b^4}}}$

c) $\boxed{b^{x-1} \cdot b^{x-2} \cdot b^{x} = \underline{\underline{b^{3x-3}}}}$

d) $\boxed{\left(\frac{3^{1+\sqrt{2}}}{3^{1-\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \frac{3^{\sqrt{2}+2}}{3^{\sqrt{2}-2}} = 3^4 = \underline{\underline{81}}}$

2. a) $\boxed{\frac{xz^n}{y^n} = x \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^n}$

b) $\boxed{\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n}$

c) $\boxed{x^{(m+n)} = x^m \cdot x^n}$

d) $\boxed{\frac{1}{y^n} = y^{-n}}$

e) $\boxed{x^n y^n = (xy)^n}$

f) $\boxed{y^0 = 1, \ \textit{für } y \neq 0}$

3. Idee: Wir formen alles in 2er-Potenzen um. Mit einem Exponentenvergleich findet man die Lösung:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\left(2^3\right)^{1-x} \cdot \left(2^2\right)^{5x+3} \cdot \left(2^1\right)^{3x+1}}{\left(2^1\right)^{2x+3} \cdot \left(2^3\right)^{x-1} \cdot \left(2^2\right)^{x+3}} = 16 \Leftrightarrow \frac{2^{3-3x} \cdot 2^{10x+6} \cdot 2^{3x+1}}{2^{2x+3} \cdot 2^{3x-3} \cdot 2^{2x+6}} = 2^4 \\ \Leftrightarrow \frac{2^{3-3x+10x+6+3x+1}}{2^{2x+3+3x-3+2x+6}} = 2^4 \Leftrightarrow \frac{2^{10x+10}}{2^{7x+6}} = 2^4 \Leftrightarrow 2^{3x+4} = 2^4 \Rightarrow 3x+4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}\end{gathered}}$$

4. $$\boxed{\frac{\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt[10]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}} = \frac{\sqrt[3]{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[10]{x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{\sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[10]{x^{\frac{5}{3}}}} = \frac{(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(x^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{10}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{x}}}}$$

5. a) Zunächst die ausführliche Lösung, Schritt für Schritt berechnet:

$$\boxed{\frac{(a^3 \cdot b^3)^2}{(b^2)^2} \cdot \frac{(a \cdot b^2)^3}{(a^2)^3} = \frac{a^{3\cdot 2} \cdot b^{3\cdot 2}}{b^{2\cdot 2}} \cdot \frac{a^{1\cdot 3} \cdot b^{2\cdot 3}}{a^{2\cdot 3}} = \frac{a^6 \cdot b^6}{b^4} \cdot \frac{a^3 \cdot b^6}{a^6} = a^3 \cdot b^6 \cdot b^6 \cdot b^{-4} = a^3 \cdot b^{6+6-4} = \underline{\underline{a^3 b^8}}}.$$

Das ganze etwas knapper:

$$\boxed{\left(\frac{a^3 \cdot b^3}{b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b^2}{a^2}\right)^3 = \frac{a^6 \cdot b^6}{b^4} \cdot \frac{a^3 \cdot b^6}{a^6} = a^3 \cdot b^{12} \cdot b^{-4} = \underline{\underline{a^3 b^8}}}.$$

Viele Wege führen zur korrekten Lösung (*zuerst in den Klammern vereinfachen*):

$$\boxed{\left(\frac{a^3 \cdot b^3}{b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b^2}{a^2}\right)^3 = (a^3 \cdot b)^2 \cdot (a^{-1} \cdot b^2)^3 = a^6 \cdot b^2 \cdot a^{-3} \cdot b^6 = \underline{\underline{a^3 b^8}}}$$

b) $\left(\dfrac{a^5 \cdot a^6 \cdot b}{3 \cdot a^8 \cdot b^2 \cdot a^4}\right)^{-1} = \left(\dfrac{a^{11} \cdot b}{3 \cdot a^{12} \cdot b^2}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1 \cdot}{3 \cdot a \cdot b}\right)^{-1} = \underline{\underline{3ab}}$

c) $\dfrac{b^{m+1}}{b^{m-1}} - b = b^{m+1-(m-1)} - b = b^{m+1-m+1} - b = \underline{\underline{b^2 - b}}$

6. a)

$\dfrac{7x+5}{8} + \dfrac{4x+1}{3}$	=	$7x - \dfrac{1+9x}{2}$	· 24	
$24 \cdot \left(\dfrac{7x+5}{8} + \dfrac{4x+1}{3}\right)$	=	$24 \cdot \left(7x - \dfrac{1+9x}{2}\right)$	ausmultiplizieren	
$3 \cdot (7x+5) + 8 \cdot (4x+1)$	=	$168x - 12 \cdot (1+9x)$	Die Klammern sind notwendig!	
21x + 15 + 32x + 8	=	168x – 12 – 108x	zusammenfassen	
53x + 23	=	60x – 12	– 53x	+ 12
35	=	7x	: 7	
5	=	x **IL = { 5 }**		

b)

$$\frac{x(a^2+1)}{2} + 1 = a(x+1) \quad \Big| \cdot 2$$
$$x(a^2+1) + 2 = 2a(x+1)$$
$$a^2x + x + 2 = 2ax + 2a \quad \Big| -2ax \;\Big| -2$$
$$a^2x - 2ax + x = 2a - 2 \quad \Big| \; vorklammern$$
$$x(a^2 - 2a + 1) = 2(a-1) \quad \Big| :(a^2 - 2a + 1)$$
$$x = \frac{2(a-1)}{(a^2 - 2a + 1)}$$
$$x = \frac{2(a-1)}{(a-1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{a-1}}}$$

dies gilt nur solange a $\neq$ 1 ist! Für den Sonderfall a = 1 ergibt sich x + 1 = x + 1 und somit IL = IR.

7. a) $x^2 - 4 > (x-5) \cdot (x+5)$ führt zur wahren Aussage: - 4 > - 25; Somit gilt: **IL = IN**

b)

$$1 - 3(x-4) \geq 2(5-x)$$
$$1 - 3x + 12 \geq 10 - 2x$$
$$13 - 3x \geq 10 - 2x$$
$$3 \geq x$$

; Somit gilt: **IL = { 3; 2; 1 }**

8. Antwort: Es hat gleichviel Weisswein im ersten Glas wie Rotwein im zweiten Glas!

Inhalt Rotwein im 1. Glas: **x**
Inhalt Weisswein im 2. Glas: **y**
Fassungsvermögen des Löffels: **z** (jeweils in Volumeneinheiten)

	1. Glas		2. Glas	
	Rotwein	Weisswein	Rotwein	Weisswein
Ausgangssituation	x	0	0	y
Ein Löffel voll Rotwein vom 1. Glas ins 2. Glas schütten	x – z	0	z	y

Im 2. Glas befindet sich nun insgesamt $z + y$ (Volumeneinheiten) Flüssigkeit. Anteilsmässig besteht diese aus $\frac{z}{z+y}$ Rotwein und $\frac{y}{z+y}$ Weisswein.

Ein Löffel dieser Flüssigkeit beinhaltet also $\left(\frac{z}{z+y}\right)\cdot z$ Rotwein und $\left(\frac{y}{z+y}\right)\cdot z$ Weisswein.

	1. Glas		2. Glas	
	Rotwein	Weisswein	Rotwein	Weisswein
Ein Löffel Flüssigkeit vom 2. Glas ins 1. Glas schütten	$x - z + \frac{z^2}{z+y}$	$\frac{z \cdot y}{z+y}$	$z - \frac{z^2}{z+y}$	$y - \frac{z \cdot y}{z+y}$
Endsituation (nach Vereinfachung der Bruchterme)	$x - \frac{z \cdot y}{z+y}$	$\frac{z \cdot y}{z+y}$	$\frac{z \cdot y}{z+y}$	$y - \frac{z \cdot y}{z+y}$

Wir sehen: Es hat durch diese Operationen ein Austausch von $\frac{z \cdot y}{z+y}$ Volumeneinheiten Wein stattgefunden. Es befindet sich gleich viel Rotwein im 2. Glas wie Weisswein im 1. Glas.

Eine weitere Lösungsvariante:

V: Glasvolumeninhalt zu beginn, x: ausgetauschtes Volumen (entspricht dem Löffelvolumeninhalt)

Nach dem ersten Umschütten (x Rotweinflüssigkeit wird ins 2. Glas gebracht):
Konzentration von Rotwein in Glas2 = x / (V+x) => Konzentration von Weisswein in Glas2 = V / (V+x)

Während des zweiten Umschüttens:
Volumen der Weissweinflüssigkeit die nach Glas1 gebracht wird = x* (V / (V+x)) = xV / (V+x),
(Erklärung: "Löffelvolumen * Weisswein-Konzentration aus Glas2")

Nach dem zweiten Umschütten:
Konzentration von Weisswein in Glas1
= "Volumen der Weissweinflüssigkeit die nach Glas 1 gebracht wird" / "Gesamtvolumen in Glas1"
= [xV / (V+x)] / V = **x / (V+x)**

Die Konzentration von Weisswein in Glas 1 entspricht also der Konzentration von Rotwein in Glas 2 und das Glasvolumen beider Gläser ist nach der Prozedur wieder identisch.

Also hat es gleichviel Weisswein im ersten Glas wie Rotwein im zweiten Glas.

Block 4

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Grundmenge IR und geben Sie jeweils die Definitionsmenge ID an.

a) ID = IR \ {0; -1; 1}

$\frac{5}{x+1} = \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1}$	$\Vert \cdot x(x+1)(x-1)$
$5x(x-1) = 8(x+1)(x-1) - 3x(x+1)$	‖ ausmultiplizieren
$5x^2 - 5x = 8x^2 - 8 - 3x^2 - 3x$	‖ zusammenfassen und ordnen
$5x^2 - 5x = 5x^2 - 3x - 8$	$\Vert -5x^2 + 5x$
$0 = 2x - 8 \Rightarrow \underline{\underline{IL = \{4\}}}$	

b) ID = IR \ {4}

$\frac{x+2}{x-4} - \frac{14}{3(x-4)} - \frac{3}{2(x-4)} = \frac{5}{6}$	$\Vert \cdot 6(x-4)$
$6(x+2) - 28 - 9 = 5(x-4)$	‖ ausmultiplizieren
$6x + 12 - 37 = 5x - 20$	$\Vert -5x \quad \Vert -12+37$
$x = 5 \Rightarrow \underline{\underline{IL = \{5\}}}$	

c) ID = IR \ {5; -5}

$\frac{2x+60}{(x+5)(x-5)} = \frac{6}{x+5} + \frac{7}{x-5}$	$\Vert \cdot (x+5)(x-5)$
$2x + 60 = 6(x-5) + 7(x+5)$	‖ ausmultiplizieren
$2x + 60 = 6x - 30 + 7x + 35$	‖ zusammenfassen und ordnen
$2x + 60 = 13x + 5$	$\Vert -2x \quad \Vert -5$
$55 = 11x$	$\Vert :11$
$5 = x \;,\; 5 \notin ID \Rightarrow \underline{\underline{IL = \{\}}}$	

d) ID = IR \ {2; -2}

Durch Erweitern des Bruches auf der rechten Seite mit (–1) erkennt man den Hauptnenner!

$\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{(x+3)}{(4-x^2)} \cdot \frac{(-1)}{(-1)}$	‖ den Bruch rechts mit (-1) erweitern
$\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{-x-3}{x^2-4}$	$\Vert \cdot (x+2)(x-2)$
$2(x-2) - 2(x+2) = -x - 3$	‖ zusammenfassen und ordnen
$2x - 4 - 2x - 4 = -x - 3$	$\Vert +x \quad \Vert +8$
$x = 5 \Rightarrow \underline{\underline{IL = \{5\}}}$	

2. Behauptung: "x gerade $\Rightarrow$ x^2 gerade", (mit x $\in$ Z). (Kontraposition von "x^2 ungerade $\Rightarrow$ x ungerade")

   Beweis: Sei x $\in$ Z eine gerade Zahl. Dann gibt es eine Zahl k $\in$ Z so, dass x = 2 · k ist.

   Nun berechnen wir x^2: $x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Daher ist auch x^2 eine gerade Zahl.

   Somit gilt auch die Kontraposition "x^2 ungerade $\Rightarrow$ x ungerade".

3. $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{2}$

   Damit der Bruch eine ganze Zahl sein kann, muss der Zähler durch 2 teilbar sein, d.h., der Zähler muss geradzahlig sein. Damit der Zähler geradzahlig sein kann, muss $\left(x^2 + 2x\right)$ ungeradzahlig sein, weil 3 ungerade ist (die Summe zweier ungeraden Zahlen ergibt eine gerade Zahl.) Nun ist $2x$ sicher geradzahlig (da Vielfaches von 2). Also muss x^2 ungeradzahlig sein, damit die Summe $\left(x^2 + 2x\right)$ eine ungerade Zahl darstellt. In der Aufgabe 2 haben wir aber gezeigt, dass daraus folgt, dass <u>x eine ungerade ganze Zahl sein muss</u>.

4. ID = IR \ {1/3}, $x \neq p$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3x+p}{3x-1} = \frac{x+1}{x-p} && \| \cdot (x-p)(3x-1) \\
&(3x+p)(x-p) = (x+1)(3x-1) && \| \cdot (x+2)(x-2) \\
&3x^2 - 3px + px - p^2 = 3x^2 - x + 3x - 1 && \| \; -3x^2 \\
&-2px - p^2 = 2x - 1 && \| \; +1 \quad \| \; +2px \\
&1 - p^2 = 2x + 2px && \| \; :(1+p),\; p \neq -1 \quad \| \; :2 \\
&(1+p)(1-p) = 2x(1+p) && \\
&\frac{1-p}{2} = x \Rightarrow \underline{\underline{IL = \left\{\frac{1-p}{2}\right\}}} &&
\end{aligned}
$$

5. Es wird darauf verzichtet, vorab die Definitionsmengen zu bestimmen. Die Schlusskontrolle ist also Pflicht!

   a) $\sqrt{13-4x} + x + 2 = 0$ Isolieren der Wurzel (*Wurzel auf die rechte Seite nehmen*):

   $x + 2 = -\sqrt{13-4x}$ Quadrieren (*das* "–" *vor der Wurzel wird somit zu* "+") liefert:

   $x^2 + 4x + 4 = 13 - 4x$ Nach x auflösen ergibt eine quadratische Gleichung:

   $x^2 + 8x - 9 = 0$ Faktorzerlegung um die Lösungen zu bestimmen:

   $(x-1)(x+9) = 0$ ein Produkt ist dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist

   $x_1 = 1;\; x_2 = -9$ Kontrolle: Für $x_1 = 1$: $6 \neq 0$ also liegt eine Scheinlösung vor!

   Für $x_2 = -9$: $0 = 0$ o.k.! **IL = {-9}**

b) $\sqrt{3x+4} = \underbrace{5}_{a} - \underbrace{\sqrt{5x+9}}_{b}$ Quadrieren *(rechts <u>Binomische Formel</u> anwenden!)*

$3x+4 = \underbrace{5^2}_{a^2} - \underbrace{2\cdot 5\cdot\sqrt{5x+9}}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{5x+9}_{b^2}$ Zusammenfassen und isolieren der Wurzel:

$10\sqrt{5x+9} = 2x+30$ Nochmaliges Quadrieren Liefert:

$100(5x+9) = 4x^2+120x+900$ Vereinfachen ergibt die quadratische Gleichung:

$0 = 4x^2 - 380x$ x ausklammern um die Lösungen zu bestimmen:

$0 = x(4x-380)$ ein Produkt ist dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist

$x_1 = 0; x_2 = 95$ Kontrolle: 0 o.k.! 95 Scheinlösung! **IL = {0}**

c) $\sqrt{2x-3} = -5$
Erinnert man sich an die genaue Definition einer Wurzel, braucht man hier nicht weiter zu rechnen. (Der Wert einer Wurzel ist stets positiv!) Somit gilt **IL = { }.**

d) $2\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+6}$ Quadrieren

$(2\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{3x+6})^2$

$4(x-1) = 3x+6$ Nach x auflösen:

$x = 10$ Kontrolle: $2\sqrt{10-1} = \sqrt{3\cdot 10+6} \Leftrightarrow 2\cdot 3 = 6$ o.k.! **IL = {10}**

6. a) $3x^4 - 51x^2 + 48 = 0$; Substitution: $z = x^2$: $3z^2 - 51z + 48 = 0$; $D = 2025$

$z_1 = 16$; $z_2 = 1$ Daraus folgt: **IL = {1; -1; 4; -4}**

b) $1/8x^4 - x^2 + 2 = 0$; Substitution: $z = x^2$: $1/8z^2 - z + 2 = 0$; $D = 0$

$z_1 = 4$ Daraus folgt: **IL = {2; -2}.**

c)

$\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}$	=	6	quadrieren (Binomische Formel ! "+")
$13+x+2\sqrt{13+x}\sqrt{13-x}+13-x$	=	36	$-\ 26$
$2\sqrt{13+x}\sqrt{13-x}$	=	10	: 2
$\sqrt{13+x}\sqrt{13-x}$	=	5	quadrieren
$(13+x)(13-x)$	=	25	
$169-x^2$	=	25	$-25\ +x^2$
144	=	x^2	$\pm\sqrt{\ }$
$x_1 = 12; x_2 = -12$		**IL = {12; -12}**	Kontrolle durch einsetzen: o.k.!

d)

$$\frac{x-a}{1-a}+\frac{1}{x} = 2 \qquad \Big| \cdot\ x(1-a)$$

$$x\cdot(x-a)+1\cdot(1-a) = 2\cdot x(1-a) \qquad |\text{ausmultiplizieren}$$

$$x^2-ax+1-a = 2x-2ax \qquad |-2x \quad +2ax$$

$$x^2+ax-2x+1-a = 0 \qquad |\text{Normalform herstellen}$$

$$\underbrace{1}_{a}\cdot x^2+\underbrace{(a-2)}_{b}\cdot x+\underbrace{(1-a)}_{c}=0 \qquad \Big|\text{Lösungsformel anwenden } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-(a-2)\pm\sqrt{(a-2)^2-4(1-a)}}{2}=\frac{-a+2\pm\sqrt{a^2-4a+4-4+4a}}{2}=\frac{-a+2\pm\sqrt{a^2}}{2}=\frac{-a+2\pm a}{2}$$

$x_1=\dfrac{-a+2+a}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ und $x_2=\dfrac{-a+2-a}{2}=\dfrac{2-2a}{2}=\dfrac{2(1-a)}{2}=1-a$; also: **IL = {1; 1 – a}**