Vorkurs Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaften, ÜBUNGEN

MITTWOCH

Block 1

1. Schriftliches Divisionsverfahren für Polynome:

   a) $(x^3 + 6x^2 + 9x + 4) : (x + 1) =$ b) $(3x^3 - x^2 - 16x + 12) : (x + 2) =$

   c) $k^5 : (k^2 + k - 1) =$

2. Am Montag sind wir beim Thema "Faktorzerlegung" auf diese zwei Faktorisierungen gestossen:

   $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$ und $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$.

   Diese Formeln scheinen auf den ersten Blick aus der mathematischen Trick -und Zauberkiste zu stammen. Auf den zweiten Blick sieht man den naheliegenden Ansatz, den Faktor $(a+b)$, respektive den Faktor $(a-b)$ abzuspalten. Also, versuchen Sie's !

   a) $(a^3 + b^3) : (a+b) =$ b) $(a^3 - b^3) : (a-b) =$

3. Erraten Sie zunächst eine NST der Funktion und untersuchen Sie anschliessend mit Hilfe der Polynomdivision und der Faktorzerlegung ob es weitere Nullstellen gibt:

   a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ b) $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2 + 2$

   Versuchen Sie es hier nur mit Hilfe der Faktorzerlegung.... c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

4. Bestimmen Sie Nullstellen, Polstellen, Definitionslücken, und das Verhalten für $x \mapsto \infty$:

   a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$ b) * $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

5. Bestimmen Sie A und B so dass $\dfrac{3}{x^2 + 3x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+3}$ ist.

6. a) * Konstruieren Sie eine Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten, das $1 + \sqrt{2}$ als Nullstelle hat.

   b) * Das Gleiche für die Nullstelle $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Mittwoch – Block 1, Endresultate zur Kontrolle

1. a) $x^2 + 5x + 4$ b) $3x^2 - 7x - 2 + \frac{16}{x+2}$ c) $k^3 - k^2 + 2k - 3 + \frac{5k-3}{k^2+k-1}$

2. a) $a^2 - ab + b^2$ b) $a^2 + ab + b^2$

3. a) NST: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$ b) NST: $x = 2$ c) NST: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

4. a) NST: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$. Keine Polstellen. ID = IR, also keine Definitionslücken.
   Schiefe Asymptote: y = x.

   b) NST: $x = 0$. Die Polstellen lauten: x = 3 & x = – 2.
   x = 1 ist eine aufhebbare Definitionslücke. Die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote.

5. $A = 1$ und $B = -1$.

6. a) $g(x) = x^2 - 2x - 1$ b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$

Block 2

1. a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{5n}{4n-2}$.

   b) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition eines Grenzwertes, dass es sich auch wirklich um den gesuchten Grenzwert handelt!

   c) Ab welcher Nummer n_0 ist a_n von diesem Grenzwert weniger als 0,0001 entfernt ?

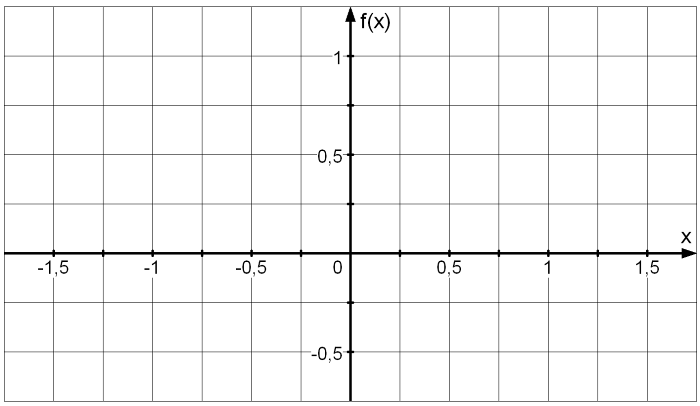
2. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen:
   a) $a_n = \dfrac{5n+12}{3n-2}$ und b) $a_n = \dfrac{n-5}{n^2+4}$

3. Bestimmen Sie jeweils die Grenzwerte:
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{-x}+x^2\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+4x-70}{3x-15}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$ d)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

4. Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$.
   a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \text{von links}}} f(x)$. b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \text{von rechts}}} f(x)$.

   c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. d) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   Zeichnen Sie mit Hilfe dieser Ergebnisse den Graphen von f(x) ins Koordinatensystem:



5. Bestimmen Sie numerisch (durch das Erstellen einer Wertetabelle für immer kleiner werdende h, respektive für immer kleiner werdende x) die folgenden zwei Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$ und b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

   * Können Sie den Grenzwert von b) auch rechnerisch herleiten?
   Tipp: Vgl. Übung 8, Dienstag - Block 2: Es gilt: " $\tan(x) \geq x \geq \sin(x)$ für x klein".

Mittwoch – Block 2, Endresultate zur Kontrolle

1. a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{4}$

   b) Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Betrachten $|a - a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5}{4} - \frac{5n}{4n-2}\right| < \varepsilon$. Diesen Term gilt es umzuformen bis folgendes erreicht wird: $\frac{5+4\varepsilon}{8\varepsilon} < n$. Das heisst: Zu jedem noch so kleinem $\varepsilon > 0$ finden wir dank der Beziehung $\frac{5+4\varepsilon}{8\varepsilon} < n$ stets ein passendes n, so dass... (usw.).

   c) Ab der Indexnummer $n_0 = 6251$.

2. a) $\frac{5}{3}$ b) 0

3. a) 1 b) 8 c) $\frac{1}{e} \approx 0.367879...$ d) 1

4. a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{4}$

5. a) $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Block 3

1. Geben Sie jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen an. Überlegen Sie kurz im Vorfeld (zum Beispiel anhand des Graphen) an welchen Stellen x die Funktionen differenzierbar sind.

   a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

   c) $f(x) = x\sqrt{x}$ d) $f(x) = |\, x \,|$

2. Leiten Sie ab:

   a) $f(x) = a^2x^3 - \sqrt{b} \cdot x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$ b) $f(x) = (\sqrt{x} - q)(1 + \sqrt{x})$

   c) $f(x) = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

3. An welchen Kurvenpunkten schneiden jeweils die Tangenten an den Graphen von f(x) die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

   a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = e^x$

4. Leiten Sie ab:

   a) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^2}$ b) $f(x) = x \cdot \sin(x^3)$

5. Leiten Sie ab:

   $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$.

6. Skript: Die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$,(n ∈ IN) lautet $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

   * Beweisen Sie das mit Hilfe des Differentialquotienten (Tipp: Pascal'sches Dreieck).

7. * Leiten Sie die Quotientenregel mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel her.

   Tipp: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = (u \cdot v^{-1})'$

Mittwoch – Block 3, Endresultate zur Kontrolle

1. a) $f'(x) = 3x^2 - 4x$. An jeder beliebigen Stelle x differenzierbar.

   b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. An jeder Stelle x > 0 differenzierbar.

   c) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. An jeder Stelle x > 0 differenzierbar.

   d) $f'(x) = \begin{cases} +1, & \text{für } x > 0 \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$. An jeder Stelle $x \neq 0$ differenzierbar.

2. a) $f'(x) = 3a^2x^2 - 2\sqrt{b}x + \frac{1}{2}c$ b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1-q) + 1$

   c) $f'(x) = -x^{-2} + 2x + 5x^{-6} + 2x^{-3} = \frac{5}{x^6} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 2x$

3. a) $P_1\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{4}\right)$, $P_2\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{4}\right)$ b) $P_1\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \middle| \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\right)$, $P_2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \middle| -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\right)$ c) $P_1(0 \mid 1)$

4. a) $f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}$ b) $f'(x) = 3x^3 \cdot \cos(x^3) + \sin(x^3)$

5. $f'(x) = \frac{4x^2 - 16}{(x^2+4)^2}$

6. Sei $f(x) = x^n$, (n ∈ IN). $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ = ... usw.

7. $\left(\frac{u}{v}\right)' = (u \cdot v^{-1})' = \ldots$ usw. bis $\ldots = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

<u>Block 4</u>

1. * Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

   a) $(\log_2 x)^2 - \log_2(x^5) + 6 = 0$ b) $x^{2x+1} = x$

2. Berechnen Sie, mit Hilfe der Kettenregel, die Ableitung von

   a) $f(x) = \ln(x)$ aus dem Zusammenhang $e^{\ln(x)} = x$

   und die Ableitung von

   b) $f(x) = \log(x)$ aus dem Zusammenhang $a^{\log_a(x)} = x$.

3. Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt (x_0, $f(x_0)$) an den Graphen von f mit der x-Achse?

   a) $f: x \mapsto \sqrt{x}$ mit $x_0 = 1$ b) $f: x \mapsto x\sqrt{x+1}$ mit $x_0 = 3$

4. * Eine Kugel, die im Ursprung nach oben abgeschossen wird, beschreibt eine Parabel, deren höchster Punkt (1 ; 2) ist. Wie gross war der Abschusswinkel?

5. Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ mit Hilfe der Quotientenregel und vereinfachen Sie die Ableitungsfunktion, so dass nur noch eine Winkelfunktion (sin, cos, oder tan) vorkommt.

6. **Professor Suzukis Kinder**
   Professor Suzuki und Professor Baba begegnen sich in der Mensa der Universität.
   Suzuki: "Guten Abend, mein Bester. Wie geht es Ihnen?"
   Baba: "Hervorragend, danke. Und Ihnen?"
   Suzuki: "Sehr gut. Sie wissen, dass ich inzwischen drei Kinder habe ..."
   Baba: "Wirklich? Wie alt sind sie denn?"
   Suzuki: "Nun, Sie als guter Mathematiker und Logiker dürften es rasch herausbekommen. Das Produkt ihrer Lebensalter ist 36, und die Summe ihrer Lebensalter ist identisch mit der Nummer des Hauses, das sie in Osaka bewohnten."
   Baba (nach einer Pause): "Diese Informationen reichen mir nicht."
   Suzuki: "Sie haben recht. Also das älteste sieht genau wie ich aus."
   Baba: "Aha, jetzt weiss ich, wie alt sie sind."

   Wie alt sind die Kinder im einzelnen?

Mittwoch – Block 4, Endresultate zur Kontrolle

1. a) IL = { 4; 8 } b) IL = { -1; 0; 1 }

2. a) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ b) $\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

3. a) 26.565° b) 70.017°

4. 75.964°

5. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

6. Die Kinder sind 2, 2, und 9 Jahre alt.