VORKURS MATHEMATIK FÜR NATUR- UND SOZIALWISSENSCHAFTEN 2020

Mittwoch: Anwendungen der schriftlichen Polynomdivision wie «Abspalten von Nullstellen» und «Berechnung von Asymptoten». Rationale Funktionen, Grenzwerte, Differentialrechnung: Ableitung und Ableitungsregeln.

INHALTSVERZEICHNIS MITTWOCH

1 POLYNOME UND ABSPALTEN VON NULLSTELLEN

Die linearen und quadratischen Funktionen, denen wir in den vorigen Abschnitten begegnet sind, sind Spezialfälle einer grösseren Klasse von Funktionen: Die **Polynom-Funktionen**. Das sind Funktionen von der Form

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Die höchste Zahl m mit $a_m \neq 0$ heisst der Grad von f. Die Zahlen $a_0, \ldots, a_m$ heissen die **Koeffizienten**[1] von f.

Man kann sich fragen, ob Nullstellen von allgemeinen Polynomen genauso 'einfach' zu finden sind, wie die von linearen und quadratischen Funktionen. Die allgemeine Antwort auf diese Frage ist nein. Wie schon bemerkt, wurde sogar bewiesen, dass es für Polynome vom Grad ≥ 5 keine allgemeine Formel für die Nullstellen gibt, wie etwa die Auflösungsformel für die quadratischen Gleichungen. Aber es gibt ein Verfahren, welches das Finden von Nullstellen bei einem Polynom n-ten Grades, auf das Finden von Nullstellen eines Polynoms vom Grad $n - 1$ reduziert. Dieses Verfahren heisst **schriftliche Polynomdivision** oder auch «**Abspalten von Nullstellen**». Nach einem kleinen Exkurs über die schriftliche Polynomdivision, werden wir das Verfahren an einem Beispiel erläutern.

1.1 Das Abspalten von Nullstellen mit Hilfe der Polynomdivision

Man kann nicht nur Zahlen schriftlich dividieren, sondern auch Polynome. Wir führen dazu ein Divisionsverfahren ein. Dabei lassen wir uns durch die schriftliche Division von Zahlen inspirieren:

Beispiel: 276 : 12 =... Wir schreiben jetzt alle Zwischenschritte an, auch die, die wir normalerweise im Kopf durchführen:

276 : *12* = **23**	*12* in 27 = **2**mal
- 24	**2** · *12* = 24 (abziehen)
36	12 in 36 = **3**mal
- 36	**3** · *12* = 36 (abziehen)
0	Es bleibt kein Rest übrig.

Analog rechnet man mit Polynomen.

$(x^2 + 5x + 6) : (x + 2) = \mathbf{x + 3}$	$x^2 : x = \mathbf{x}$
$x^2 + 2x$	$\mathbf{x} \cdot (x + 2) = x^2 + 2x$ (abziehen)
$3x + 6$	$3x : x = \mathbf{3}$
$3x + 6$	$\mathbf{3} \cdot (x + 2) = 3x + 6$ (abziehen)
0	Es bleibt kein Rest übrig.

Probe durch Ausmultiplizieren: $\underline{(x + 2)\ (x + 3)} = x^2 + 2x + 3x + 6 = \underline{x^2 + 5x + 6}$. O.k.!

[1] Koeffizient (*auch Beizahl genannt*) [lateinisch con «zusammen mit» und efficiens «bewirkend»]

Beispiel 1)
Wir suchen die Nullstellen der folgenden Polynomfunktion 3. Grades: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Nun stehen wir vor einem neuen Problem. Die abc-Formel (die ja nur für quadratische Gleichungen gilt) hilft hier nicht weiter...

An dieser Stelle soll eine kleine Hilfestellung angeboten werden: Der Funktionsterm $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ lässt sich auch folgendermassen schreiben: $f(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$. Der zweite Faktor lässt sich mit dem Zweiklammeransatz noch weiter zerlegen. Wir erhalten: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6) = (x-1)(x+2)(x-3)$. In dieser faktorisierten Form lassen sich die Nullstellen direkt ablesen. Sie lauten: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 3$

Nur, wie kommt man ohne diese Hilfestellung aus? Ein paar Gedanken dazu:
In der Klammer (x – 1) ist die erste Nullstelle x = 1 ersichtlich, denn aus x = 1 folgt (x – 1) = 0. Also geht es doch zunächst darum, eine Lösung irgendwie zu finden. Etwa x = 1 durch Probieren. Dann kennt man x = 1 als erste Lösung und muss **den Faktor (x – 1) ausklammern**. Dieses Ausklammern erfolgt mit dem Verfahren der **Polynomdivision**:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : \mathbf{(x-1)} = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -x^2 - 5x \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Damit haben wir den Funktionsterm von f in dieses Produkt zerlegt:
$f(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$

Vermutlich irritiert Sie an dieser Stelle die Tatsache, dass zunächst mal eine Lösung durch Probieren erraten wurde. Nun, die Nullstelle wurde nicht durch blindes Erraten gefunden, sondern erfolgte stillschweigend durch systematisches Probieren potenzieller Kandidaten. Denn es gilt (siehe weiter unten "Satz 2"): Sollte die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ganzzahlige Nullstellen besitzen (was a priori nicht sein muss), dann müssen diese notwendigerweise **Teiler des letzten Koeffizienten $a_0 = 6$** sein. Potenzielle Kandidaten wären somit +1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6. Bereits mit +1 hatten wir Erfolg!

Beispiel 2):
Eine Nullstelle der Polynomfunktion $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ lautet (-1). Wie lauten die andern?

Dass der Rest bei Teilung von $(x^3 + x^2 - x - 1)$ durch $(x+1)$ null war, ist kein Zufall! Denn es gilt:

Satz 1

Sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, und a eine Nullstelle von $f(x)$. Dann ist der Rest bei Teilung von $f(x)$ durch $(x-a)$ null. Das heisst, man kann $f(x)$ schreiben als $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$, wobei g ein Polynom vom Grad $(n-1)$ ist. Die Nullstellen von f bestehen dann aus der Nullstelle a und aus den Nullstellen von g.

Erklärung (fürs Selbststudium): Wenn man den Funktionsterm $f(x)$ durch $(x-a)$ dividiert, dann liefert die Polynomdivision eine Funktion g(x), deren Grad um 1 kleiner ist als der von f(x), und es kann zusätzlich noch ein Rest r übrigbleiben. D.h.: $f(x):(x-a) = g(x)$, mit einem allfälligen Rest r.

Also ist doch: $f(x) = (x-a) \cdot g(x) + r$, wobei g(x) ein Polynom vom Grad $(n-1)$ ist.

Nun setzen wir $x = a$ ein. Das ergibt $\underbrace{f(a)}_{0} = \underbrace{(a-a)}_{0} \cdot g(a) + r$, denn a war ja eine Nullstelle von f(x).

Daraus folgt: $0 = r$. Mit anderen Worten $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$. Was wir anfänglich zeigen wollten.

Wir überlegen gleich noch weiter:

Nach dem Ausklammern des Faktors $(x-a)$ hat der andere Faktor g(x) den Grad $(n-1)$. Daraus kann man sich überlegen, wie viele Nullstellen es überhaupt bei einer Polynomfunktion vom Grad n geben kann. Die Antwort lautet: "maximal n". Denn mehr als n Faktoren kann man nicht ausklammern, wenn die Funktion mit "$ax^n + \ldots$" beginnt.

Also wissen wir: Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Nun zu einem Satz, der beim "Erraten" von allfälligen ganzzahligen Nullstellen einer Polynomfunktion gute Dienste leistet.

Es sei hier aber zunächst nochmals erwähnt, dass Polynomfunktionen nicht notwendigerweise eine, oder gar mehrere ganzzahlige Nullstellen besitzen müssen! Es gibt auch Polynomfunktionen höheren Grades welche überhaupt keine Nullstellen besitzen, wie etwa $f(x) = x^4 + 1$, oder solche die nur Nullstellen besitzen, die nicht ganzzahlig sind, wie etwa $f(x) = x^3 - 2$, mit der einzigen Nullstelle $x = \sqrt[3]{2} = 1.250021\ldots$ die sogar irrational ist. Liegen aber Polynomfunktionen wie in den Beispielen 1), 2) oder 3) vor, dann ist der folgende Satz sehr hilfreich:

Satz 2

Sei $f: x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_0$ ein Polynom mit **ganzzahligen Koeffizienten** $a_0, \ldots, a_n \in$ Z, $(a_0 \neq 0)$. Dann sind alle **ganzzahlige** Nullstellen von f Teiler von a_0.

Der Beweis dieser Aussage ist nicht so anspruchsvoll und sei dem Selbststudium überlassen:

Es sei m eine ganzzahlige Nullstelle von f. Dann gilt: $a_n m^n + \ldots + a_1 m + a_0 = 0$.

Dies lässt sich durch Ausklammern von m auch so schreiben: $m \cdot \underbrace{(a_n m^{n-1} + \ldots + a_2 m + a_1)}_{:=\, k \in Z} = -a_0$.

Der Ausdruck $m \cdot k = -a_0$ mit m und k ganzzahlig, bedeutet nun aber nichts anderes, dass m ein Teiler von a_0 ist! *q.e.d.*

Bemerkung: Im Satz 2 wurde $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt, weil sonst für den Sonderfall $a_0 = 0$ häufig die Frage auftaucht, ob denn Null ein Teiler von Null sei (je nach Definition von «ist ein Teiler von …» kann übrigens diese Frage durchaus bejaht werden).
Wir weichen dem aber aus, indem wir den Fall $\boxed{a_0 = 0}$ nun als einfachen Sonderfall gesondert betrachten. In einem solchen Fall kann nämlich stets x vorgeklammert werden, was zur Folge hat, dass 0 stets eine Nullstelle ist. Ein Musterbeispiel soll diesen Sachverhalt illustrieren:

$f(x) = 3x^3 - x^2 + 7x + \underbrace{0}_{a_0} = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3x^2 - x + 7) = 0$. Somit ist 0 sicher eine Nullstelle.

Beispiel3: Finden Sie die Nullstellen von $f(x) = 6x^3 - 73x^2 + 79x - 22$.

Antwort zur Kontrolle: 11, 1/2, 2/3.

2 RATIONALE FUNKTIONEN

Eine Funktion $h(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, bei der $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind, heisst **rationale Funktion**.

Hier zwei Beispiele dazu: Beispiel 1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, Beispiel 2) $g(x)=\dfrac{2x^2+1}{x+1}$.

2.1 Polstellen und aufhebbare Definitionslücken

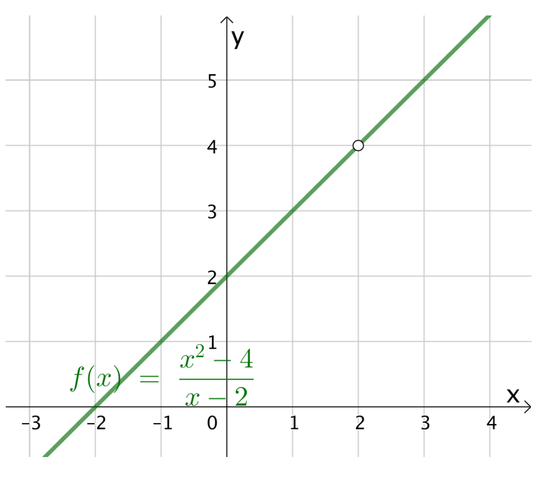
In den Nullstellen des Nenners $q(x)$ ist $h(x)$ nicht definiert; diese Stellen heissen **Definitionslücken** von $h(x)$. Bsp.: $f(x)$ hat die Definitionslücke x = 2 und $g(x)$ die Definitionslücke x = -1.

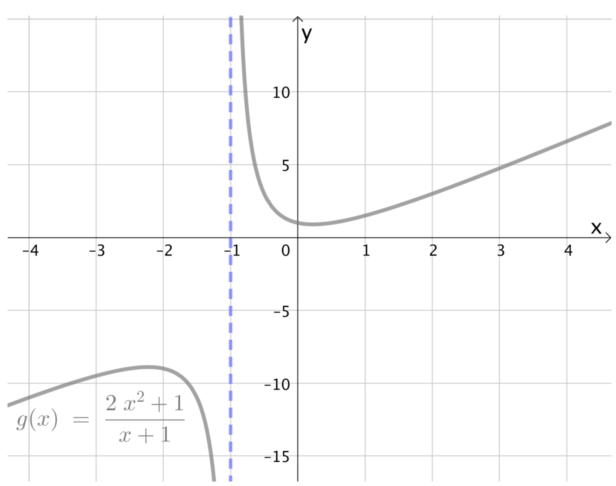
Falls eine Nullstelle x_1 des Nenners $q(x)$ keine Nullstelle des Zählers $p(x)$ ist, so heisst x_1 eine **Polstelle** von $h(x)$. Bsp.: $g(x)$ hat die Polstelle x = -1.

Falls x_1 aber eine Nullstelle von $q(x)$ und von $p(x)$ ist, so kann man beide Funktionen durch $(x-x_1)$ dividieren. Man erhält dann eine neue Funktion $h_1(x)=\dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}$, die für alle $x \neq x_1$ gleich $h(x)$ ist. Wenn h_1 in x_1 definiert ist (d.h. wenn $q_1(x_1)\neq 0$ ist), so heisst x_1 eine (stetig) **aufhebbare Definitionslücke** von $h(x)$. Bsp.: $f(x)$ hat die stetig aufhebbare Definitionslücke x = 2.

Eine rationale Funktion kann auch mehrere Polstellen und aufhebbare Definitionslücken haben.

Wir betrachten die Graphen von f(x) und g(x):

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>


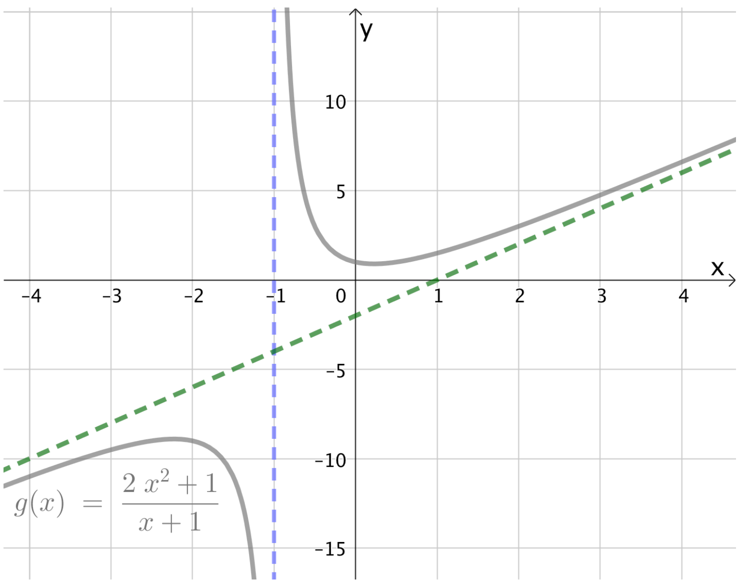
</td>
</tr>
<tr>
<td>
f(x) hat an der Stelle x=2 eine aufhebbare Definitionslücke. Graphisch entsteht an dieser Stelle ein "Loch" im Graphen. Dieses kleine Loch, resp. Lücke liesse sich so aufheben:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2, & \textit{für } x\neq 2 \\ 4 & \textit{für } x=2 \end{cases}$$
</td>
<td>
g(x) hat an der Stelle x=-1 eine Polstelle. Grafisch entsteht an dieser Stelle eine vertikale Asymptote. Diese ist gestrichelt eingezeichnet.

Nähern wir uns von rechts an die Polstelle x=-1 streben die Funktionswerte gegen $+\infty$, nähern wir uns hingegen von links, dann streben die Werte gegen $-\infty$. Der Graph wird an dieser Stelle "auseinandergerissen".
</td>
</tr>
</table>

2.2 Die schiefe Asymptote

Wir wollen uns den Graphen von g(x) noch genauer anschauen. Der Graph scheint sich einer weiteren Geraden anzuschmiegen. Eine solche Gerade, nennt man eine **schiefe** [1]**Asymptote**.



Doch wie kommen wir zur Geradengleichung der schiefen Asymptote?

Nun, um das Verhalten von $g(x)=\frac{2x^2+1}{x+1}$ für $x\to\infty$ zu bestimmen, führen wir eine Polynomdivision mit Rest durch (man beachte die <u>Ergänzung von "+ 0x" für eine bessere Division</u>):

$$
\begin{array}{l}
(2x^2 + 0x + 1) : (x + 1) \;=\; 2x - 2 + \dfrac{3}{x+1} \\
-\underline{(2x^2 + 2x)} \\
\qquad\; -2x + 1 \\
\qquad -\underline{(-2x - 2)} \\
\qquad\qquad \mathbf{+\,3}
\end{array}
$$

Die Funktionsgleichung $g(x)=\frac{2x^2+1}{x+1}$ lässt sich also auch so angeben: $g(x)=2x-2+\frac{3}{x+1}$.

Dieser Term setzt sich aus einem linearen Term $2x-2$ und einem "Rest-Term" $\frac{3}{x+1}$ zusammen.

Lässt man nun $x\to\infty$ bzw. $x\to-\infty$ streben, so verschwindet der Rest-Term und der Graph der Funktion $g(x)$ nähert sich insgesamt der linearen Funktion $y=2x-2$. Also hat der Graph von $g(x)$ eine **schiefe Asymptote** mit der Gleichung $y=2x-2$.

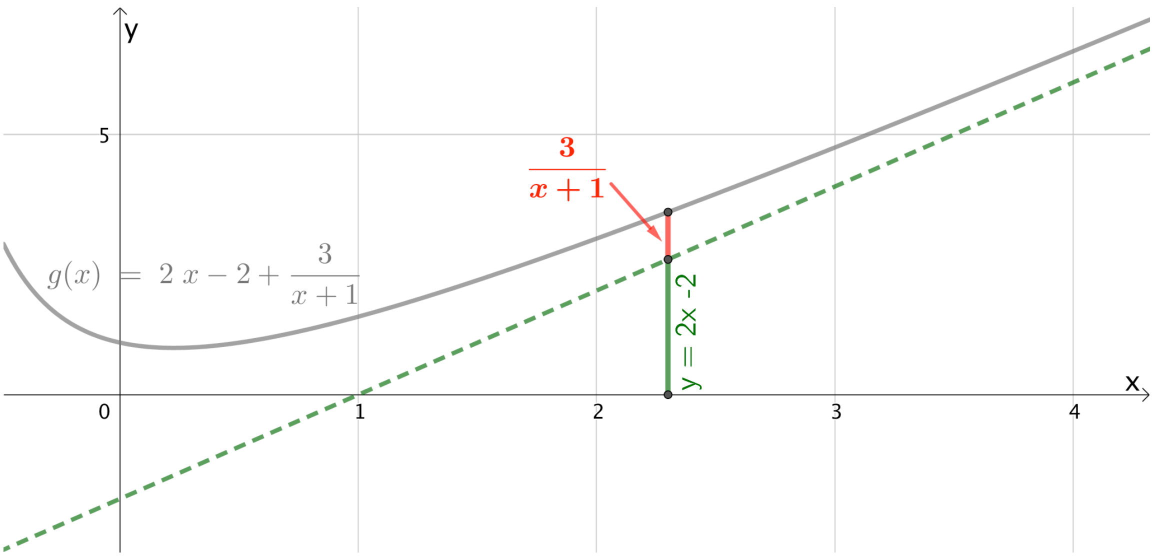
<u>Merke</u>: Schiefe Asymptoten können entstehen, wenn der Grad der Polynomfunktion im Zähler um eins höher als der Grad im Nenner ist.

---

[1] Asymptote [griechisch «nicht zusammenfallend»]: eine Gerade, an die sich eine Kurve «anschmiegt», ohne sie zu berühren

Zum Schluss wollen wir die Bedeutung des Rest-Terms auch noch grafisch untersuchen.

Wir vergrössern dazu einen Ausschnitt des Graphen von g(x):



Der Restterm $\left(\frac{3}{x+1}\right)$ gibt (in Abhängigkeit von x) den Unterschied zwischen den Funktionswerten von $g(x) = (2x-2) + \left(\frac{3}{x+1}\right)$ und den Werten der linearen Funktion $y = 2x - 2$ an.

Für «sehr grosse» x-Werte wird dieser Unterschied verschwindend klein.

Schauen wir uns zum Beispiel die Stelle x = 1000 ganz konkret an. Der Funktionswert an dieser Stelle setzt sich wie folgt zusammen: $g(1000) = (2 \cdot 1000 - 2) + \left(\frac{3}{1000+1}\right) = 1998 + 0.002997$

"Vertikal betrachtet", beträgt also der Abstand der schiefen Asymptote $y = 2x - 2$ zum Graphen von $g(x)$, an der Stelle x = 1000, nur noch 0.002997.

Die Kurve schmiegt sich also immer besser der schiefen Asymptote an.

Bei der Untersuchung von vertikalen und schiefen Asymptoten haben wir, ganz intuitiv, Grenzwertbetrachtungen vollzogen. Im nächsten Kapitel wollen wir den Begriff des Grenzwertes genauer studieren und eine exakte mathematische Definition dafür angeben.

→ Übungen Mi, Block 1

3 GRENZWERTE

3.1 Folgen

Definition

Unter einer Folge reeller Zahlen versteht man eine Funktion a(n), die jeder natürlichen Zahl n eine Zahl $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Man schreibt hierfür $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Die reelle Zahl a_n heisst n-tes Folgeglied der Folge.

In der Mathematik ist eine Indexierung ab 0 ebenfalls gebräuchlich: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Besonders übersichtlich sind Folgen für die es ein explizites Bildungsgesetz gibt, d.h. eine Zuordnungsvorschrift durch einen Term.

Beispiele:

(1) $a_n = \frac{1}{n}$: $(\underbrace{1}_{a_1}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2}, \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3}, \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_4}, \ldots)$, sog. Folge der Stammbrüche.

(2) $a_n = (-1)^n$: $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$, sog. **alternierende** Folge. (Das Vorzeichen alterniert.)

(3) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$

(4) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$, sog. **geometrische** Folge. ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = konst.$, für alle n $\in$ IN.)

3.2 Konvergente Folgen und der Grenzwert

Definition

Ein **Grenzwert** einer Zahlenfolge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ist eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass der Abstand $|a_n - a|$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn n hinreichend gross gewählt wird. Genauer meint man damit folgendes: Für jede (noch so kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_ε, so dass für alle Zahlen $n > n_\varepsilon$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Gibt es eine solche Zahl a, dann wird die Folge **konvergent** genannt und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (lies: «Limes von a_n für n gegen unendlich gleich a»), andernfalls nennt man die Folge **divergent**.

Warum eine solch formale und komplizierte Definition? Man könnte doch einen Grenzwert viel einfacher definieren... Nun, die Mathematik ist aufgebaut aus exakten Definitionen und daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen. Wenn an der Basis, an den Definitionen «gepfuscht» wird, stösst man häufig bei Schlussfolgerungen auf Probleme; ausserdem würde eine nicht exakte Definition von verschiedenen Leuten verschieden aufgefasst werden. Man müsste dann erst darüber streiten, wie dieses oder jenes denn aufzufassen sei!

Bei solch formalen und abstrakten Definitionen ist, für das bessere Verständnis, auf jeden Falls das Studium eines einfachen und illustrativen Beispiels ratsam. Ein solches folgt weiter unten.

Zudem lohnt es sich, einzelne Passagen genau zu studieren und zu durchleuchten; denn in den einzelnen Festlegungen steckt meistens mehr drin, als das, was beim ersten Lesen wahrgenommen wird:

«... ist eine Zahl a ...», oder weiter unten im Text, **«... Gibt es eine solche Zahl a ...»**.
Das bedeutet, dass es höchstens eine Zahl a geben darf, der sich die Folge annähert. Betrachtet man zum Beispiel die alternierende Folge (-1; 1; -1; 1; ...), so gibt es zwei Zahlen, -1 und 1, die immer wieder auftauchen. Wäre die Zahl 1 der Grenzwert, so müsste sich die Folge der 1 annähern. Es taucht aber immer wieder die -1 als Folgenglied auf, die von der 1 deutlich verschieden ist. Deshalb hat diese Folge keinen Grenzwert. (Man spricht in diesem Fall davon, dass die -1 und die 1 Häufungspunkte der Folge sind.)

«... existiert eine natürliche Zahl n_ε, so dass für alle Zahlen $n > n_\varepsilon$ ...».
Es interessiert nur was «am Ende der Folge» (das es natürlich nicht gibt, weil sie unendlich lang ist) passiert. Betrachten wir als Beispiel Folgen, die zunächst nur aus 1, dann nur aus 0 bestehen:
(1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; ...)
(1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; ...)
(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; ...)
Selbst wenn zunächst eine Trilliarde Einsen kommen: All diese Folgen haben den Grenzwert 0, da wir immer ein n_ε finden, ab dem die Folgenglieder alle identisch mit 0 sind! Hauptsache, man findet ein passendes n_ε, egal, wie gross es ist. Man kann dafür auch sagen: «... existiert eine natürliche Zahl n_ε, so dass für alle Zahlen $n > n_\varepsilon$ ...».

Nun aber zum einfachen, illustrativen Beispiel:

Wir betrachten die Folge $\boxed{a_n = \frac{1}{n} + 1 = \frac{1+n}{n}: \quad (2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ ...)}$.

Setzt man grosse Werte für n ein, so lässt sich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ vermuten. (zum Beispiel gilt $a_{1000} = 1.001$)

Wir überprüfen jetzt das ganz formal: Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine, positive Zahl.

Wir formen $|\ a_n - a\ | < \varepsilon$ äquivalent um: $\left|\left(\frac{1}{n}+1\right)-1\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

Die Betragsstriche können weggelassen werden da der Term im Betrag stets positiv bleibt (egal welche natürliche Zahl für n eingesetzt wird.)

Somit gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wir formen weiter um, bis n isoliert ist: $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Zu jedem noch so kleinem $\varepsilon > 0$ finden wir nun, dank der Beziehung $n > \frac{1}{\varepsilon}$, stets ein passendes n_ε, so dass sämtliche Folgenglieder a_n ab diesem n_ε, vom Grenzwert $a = 1$ weniger als $\varepsilon > 0$ entfernt sind.

Sei etwa konkret $\varepsilon = 0.01$. Wir können jetzt einfach in $n > \frac{1}{\varepsilon}$ einsetzen und erhalten $n > 100$. Das 101-te und alle folgenden Glieder der Folge unterscheiden sich also um weniger als 0.01 von $a = 1$.

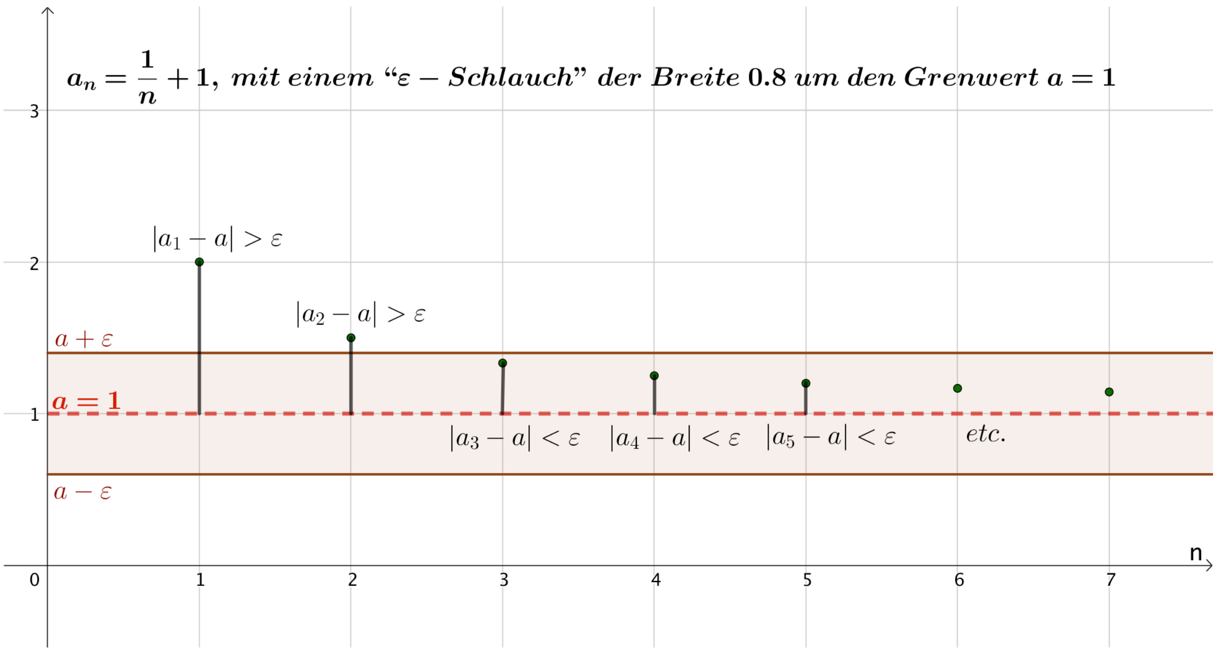
Auf diese Weise findet man zu jeder Wahl von $\varepsilon > 0$ ein passendes n_ε (nämlich $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$), so dass für alle Zahlen $n > n_\varepsilon$ die gewünschte Bedingung $| a_n - a | < \varepsilon$ erfüllt ist.

Das Ergebnis lautet somit: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $a = 1$.

Diese Grenzwertbetrachtung wollen wir nun auch noch grafisch illustrieren:

Wir wählen dazu ein beliebiges, offenes Intervall $I_\varepsilon = (a+\varepsilon\ ;\ a-\varepsilon)$ mit dem Grenzwert $a=1$ als Mittelpunkt und einer Gesamtbreite von 2ε.

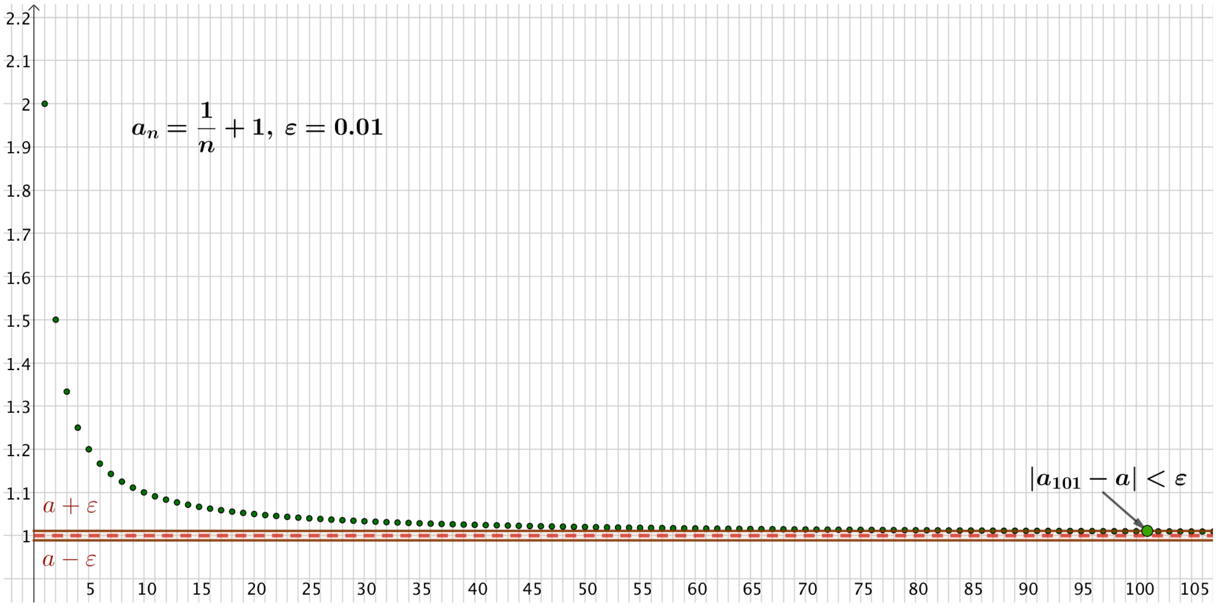
Wenn wir etwa ein konkretes $\varepsilon = 0.4$ vorgeben (siehe Abbildung), dann liegen die ersten 2 Folgenglieder ausserhalb des Intervalls I_ε, während die Folgenglieder a_3, a_4, ... (d.h. alle restlichen Glieder) innerhalb des Intervalls I_ε liegen. Anders formuliert: Ab dem Index $n = 3$ befindet sich die Folge im "Epsilon-Schlauch" $(a+\varepsilon\ ;\ a-\varepsilon)$.



Wir verkleinern das Intervall I_ε und wählen $\varepsilon = 0.01$. Nun liegen die ersten 100 Glieder der Folge ausserhalb und die restlichen Folgenglieder a_{101}, a_{102}, ... innerhalb des Intervalls I_ε. Dies wird in der Abbildung auf der nächsten Seite illustriert.

Auch bei einem kleineren $\varepsilon > 0$ gibt es einen Mindestindex n_ε, nach dem die Folge vollständig im "Epsilon-Schlauch" verläuft.

Das heisst: Egal welches $\varepsilon > 0$ wir vorgeben, nur endlich viele Folgenglieder liegen ausserhalb des Epsilon-Schlauchs. Die restlichen (und somit unendlich viele) liegen innerhalb des Schlauchs.



Für die Beispiele 1) bis 4), am Anfang dieses Kapitels, wollen wir nun ebenfalls Grenzwertbetrachtungen durchführen:

(1) Für die Folge $a_n = \frac{1}{n}: (\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ )$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Denn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:
$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, falls $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ist etwa $\varepsilon = 0.001$, so muss $n > 1'000$ gefordert werden.

(2) Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent (da sie, wie schon oben erläutert, keinen eindeutigen Grenzwert besitzt). Sie hat aber zwei sog. **Häufungspunkte**: -1 und +1.

(3) $a_n = \frac{n}{n+1}$ hat den Grenzwert 1. Durch folgende **Umformung** und Anwendung von Bsp. (1) wird dies sofort klar: $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+(1/n)}$. (Es wurde mit n gekürzt).

(4) Für die Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Denn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:
$\left| \left(\frac{1}{2}\right)^n - 0 \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, falls $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Dies lässt sich noch umformen zu: $n > \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 2}$.
Ist etwa $\varepsilon = \frac{1}{1'000'000}$, so muss $2^n > 1'000'000$ gefordert werden, dies ist für $n \geq 20$ erfüllt.

3.2.1 Grenzwertsätze für Folgen

Die Folge a_n und die Folge b_n seien konvergent. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)-\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$, sofern $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)\neq 0$ ist.

Beispiele dazu:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=0+0=\underline{\underline{0}}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-3n+4}{3(n-1)^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-3n+4}{3n^2-6n+3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)=\underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}$ (Kürzen mit n^2 beim 3. Schritt)

ⓘ Vermeiden Sie bitte Fehler der folgenden Art: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}=1$??!!

$\dfrac{\infty}{\infty}$ ist ein **unbestimmter Ausdruck** und dieser lässt sich nicht einfach kürzen!

Hier sollte man so vorgehen: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(n)=\infty$.

Kurz gesagt: **Formen Sie den Term um, bis der Grenzwert "bestimmbar" wird**!

3) Ein ganz besonderer Grenzwert: Wir betrachten die Folge $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Welchen Grenzwert vermuten Sie und welche Gedanken stecken hinter ihrer Vermutung?

Nun, sehr oft, wird bei der obigen Aufgabe der Grenzwert $a=1$ vermutet, mit der folgenden Begründung: "Für grosse n wird der Wert in der Klammer nahezu 1. Das anschliessende Potenzieren wirkt sich nicht weiter aus, denn es gilt bekanntlich $1^n = 1$, für alle $n \in$ IN." Doch diese Antwort ist **falsch**! Der Grenzwert lautet nicht 1. So kann man also nicht argumentieren. Nehmen Sie kritisch Stellung zur obigen Begründung! (Hinweis: Studieren Sie nochmals die obenstehenden Grenzwertsätze für Folgen!) Die Auflösung des Rätsels, also die Angabe des korrekten Grenzwertes, folgt gleich, weiter unten.

3.2.2 Grenzwert einer Funktion

Den Grenzwertbegriff für eine Funktion kann man auf den Grenzwertbegriff für Folgen zurückführen. Auf eine formale Definition verzichten wir hier. Es soll jedoch eine «anschauliche» Beschreibung gegeben werden:

> $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ bedeutet, dass der Funktionswert $f(x)$ beliebig nahe bei c liegt, falls x hinreichend nahe bei x_0 gewählt wird.

Beispiele:

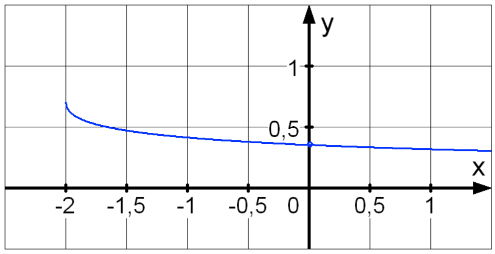
1. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$. Gesucht ist: $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\right)$.

   Einfach 0 für x einzusetzen, bringt uns nicht weiter. Wir müssen umformen und zwar durch Erweiterung des Bruchterms mit Hilfe der dritten binomischen Formel:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} = \frac{x+2-2}{x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} = \frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

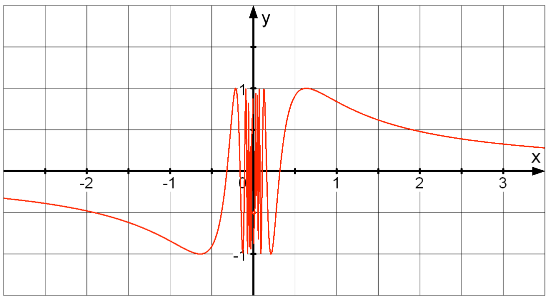
   Jetzt lässt sich der Grenzwert ablesen:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}} \approx 0.354$$



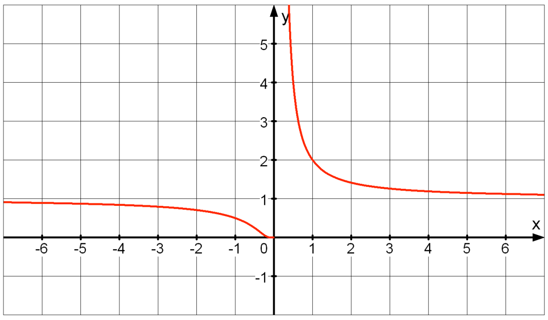
2. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Gesucht ist: $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Dieser **Grenzwert existiert nicht**. Wie aus dem Graphen ersichtlich ist, oszillieren die Funktionswerte sehr stark, falls die Argumente x nahe bei null liegen.



3. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. Es gilt: $\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ \text{von links}}}\left(2^{\frac{1}{x}}\right) = 0}$, $\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ \text{von rechts}}}\left(2^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty}$ und $\boxed{\lim_{x \to \infty}\left(2^{\frac{1}{x}}\right) = 1}$.

   Diese Grenzwerte lassen sich nicht nur aus dem Graphen ablesen, sondern auch durch geschickte Überlegungen herleiten! Versuchen Sie's!



3.2.3 Die eulersche Zahl e

Der Schweizer Mathematiker [1]Leonhard Euler hat im 18. Jahrhundert eine Zahl in die Mathematik eingeführt, die mit «**e**» bezeichnet wird und seither nicht mehr wegzudenken ist. Wie π ist sie eine irrationale Zahl, und ihre Dezimaldarstellung beginnt folgendermassen:

Eulersche Zahl: e = 2.71828182845904523536028747135266...

Die Zahl **e** ist folgendermassen <u>definiert</u>: $\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Der Grenzwert lässt sich nicht so einfach wie bei den obigen Beispielen durch Umformen erkennen (für Potenzen gibt es keinen passenden Grenzwertsatz). Wir sind auf die numerische Unterstützung des TR angewiesen:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
10	2.59374
1'000	2.71692
1'000'000	2.71828
usw.	usw.

Um die Konvergenz der Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ formal nachzuweisen, müsste man folgendes zeigen:

(1) Die Folge ist monoton wachsend und (2) Die Folge ist nach oben beschränkt.

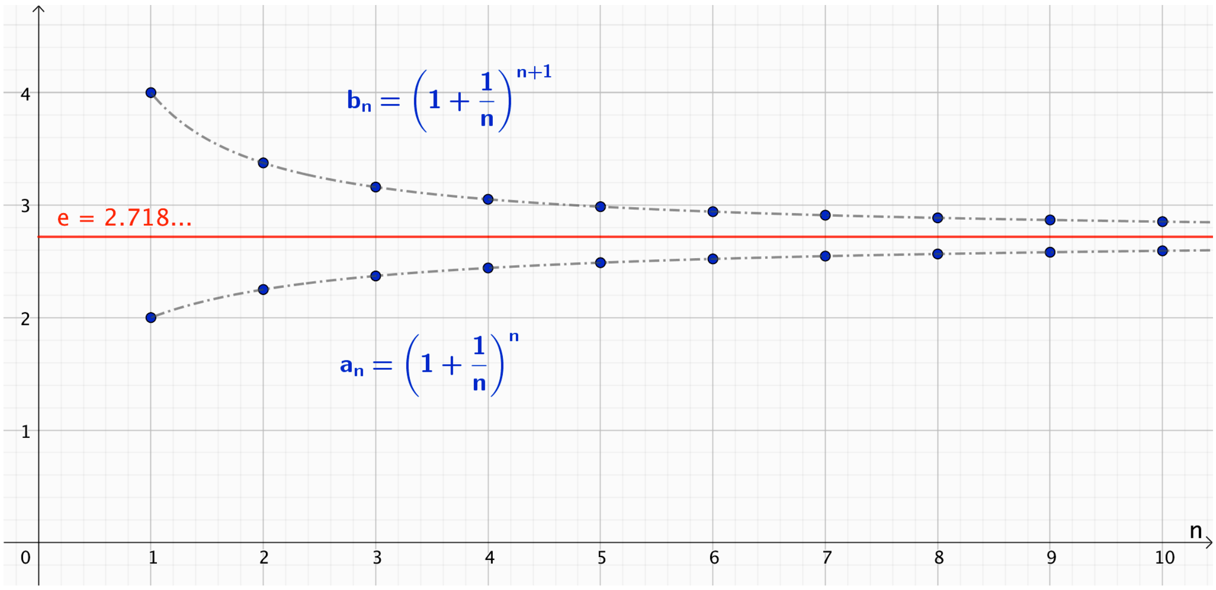
Der Nachweis dieser 2 Fakten, würde einerseits den zeitlichen Rahmen sprengen und andererseits noch weiteres Vorwissen voraussetzen. Wir verzichten deshalb darauf.

Allerdings soll zur Illustration die Zahl e graphisch durch zwei Folgen eingeschachtelt werden.

Es gilt: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; n ∈ IN

[1] Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in St. Petersburg)

n	1	2	3	4	5	10	100
$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.37	2.44	2.49	2.59	2.70
$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$	4	3.38	3.16	3.05	2.98	2.85	2.73



3.2.3.1 Zusammenhang zu den Logarithmen:

ⓘ Logarithmen zur Basis e = 2.718281... bezeichnet man als **natürliche Logarithmen**.
Statt $\log_e a$ schreibt man $\ln a$.

Da der natürliche Logarithmus «ln» in der Mathematik und Technik eine grosse Rolle spielt, ist heutzutage auf den meisten Taschenrechnern eine $\boxed{\text{LN}}$ - Taste vorhanden.

Ein Beispiel dazu: $\boxed{\text{LN}}$ 100 = 4.6052 ⇔ $e^{4.6052} = 100$.

<u>Bemerkung</u>

Da die Rechenregeln für Logarithmen für beliebige Basen gelten, kann man eine Exponentialgleichung anstatt mit dem Zehnerlogarithmus $\boxed{\text{LOG}}$ auch mit Hilfe des natürlichen Logarithmus lösen.

<u>Beispiel</u>: $5^x = 7$.
Wir bilden auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus «ln», und wenden die Rechenregel (3) für Logarithmen an: $5^x = 7 \Rightarrow x \cdot \ln 5 = \ln 7$

Die Lösung lautet somit: $\underline{\underline{x}} = \frac{\ln 7}{\ln 5} = \underline{\underline{1.2091}}$.

→ Übungen Mi, Block 2

4 DIFFERENTIALRECHNUNG

4.1 Einführung

Betrachten Sie auf einem Hügel einen Weg, dessen Seitenansicht durch den Graphen der Funktion

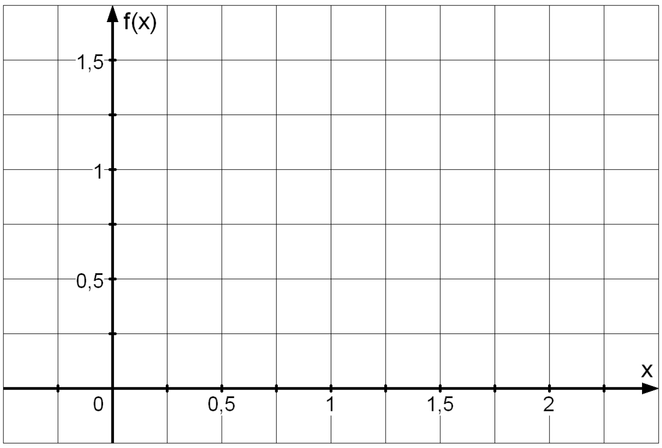
$$g(x) = 2x, \quad x \in [0;\ 2]$$

gegeben ist; zeichnen Sie diesen Graphen. Was ist der **Anstieg** dieses Weges? Das heisst: Wenn man sich dem Graphen entlang bewegt, und dabei 1 (oder h) (sagen wir Meter) in waagrechte Richtung zurücklegt, wie viel (Meter) legt man dann in senkrechte Richtung zurück? In diesem Beispiel ist es klar, dass die Antwort 2 (bzw. $2h$) ist.

Betrachten Sie nun aber den Weg, gegeben durch

$$f(x) = 1 - (x-1)^2, \quad x \in [0;\ 2]$$

und zeichnen Sie diesen Graphen.



Was soll nun der **Anstieg** sein? Oder: wie steil ist dieser Weg? Es ist Ihnen wohl klar, dass diese Frage, so formuliert, keinen Sinn macht: Ganz unten ist der Weg steiler als ganz oben. Also müssen wir den Punkt auf dem Weg spezifizieren, in dem wir den Anstieg bestimmen möchten:

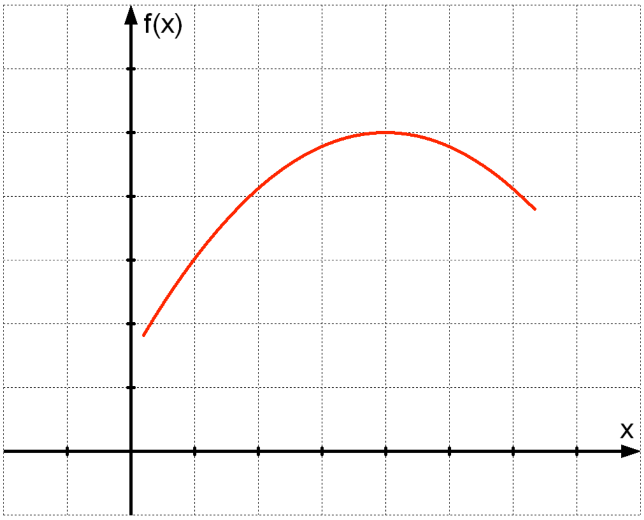
Was ist der Anstieg des Weges im Punkt $(x, f(x))$, für ein bestimmtes $x \in [0;\ 2]$?

Betrachten Sie zum Beispiel den Punkt $\left(\frac{1}{2} \mid \frac{3}{4}\right)$. Um dort den Anstieg zu bestimmen, scheint es vernünftig, eine **Tangente** an den Graphen von f in diesem Punkt zu zeichnen, und den Anstieg dieser Tangente zu bestimmen. Mit einem Lineal lässt sich das einfach ausführen, und wenn wir genau gezeichnet haben, messen wir als Anstieg der Tangente: 1.

Die **intuitive** Definition des Anstieges einer Funktion an einer Stelle ist also:

Der Anstieg einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, an der Stelle $x_0 \in D$ ist der Anstieg der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Wie **berechnet** man nun diesen Anstieg, ohne sich auf Messwerte zu verlassen? Für diesen Zweck haben sich verschiedene berühmte Personen aus der Mathematik den folgenden Grenzwertprozess ausgedacht: Statt der noch nicht richtig definierten Tangente betrachtet man folgende Geraden: Für jedes h, die Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, welche beide auf dem Graphen von f liegen. (Zeichnen Sie ✐).



Diese Geraden nennt man Sekanten an den Graphen von f. Der Anstieg einer solchen **Sekante** ist gleich

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Dieser Quotient heisst **Differenzenquotient**. Die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ erhält man aus den Sekanten, indem man h 'immer kleiner' macht, oder genauer, durch den Grenzübergang $h \to 0$. Der Anstieg, der auf diese Weise erhaltenen Gerade ist gleich

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und dieser Ausdruck heisst **Differentialquotient**. Achtung: Dieser Grenzwert lässt sich nicht berechnen, indem man einfach oben und unten $h = 0$ setzt, da sonst oben und unten Null steht! Also muss man bei der Berechnung eines solchen Differentialquotienten vorsichtiger vorgehen, wie wir in verschiedenen Beispielen sehen werden. Wir definieren nun:

4.2 Die Ableitung

<u>Definition</u> (Ableitung an der Stelle x_0)

Sei f : D $\to$ IR eine reelle Funktion und sei $x_0 \in$ D. Dann heisst f **differenzierbar** in x_0, falls der Differentialquotient

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert.

In diesem Fall wird dieser Quotient mit $f'(x_0)$ oder auch mit $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet, und heisst **Ableitung** von f an der Stelle x_0.

<u>Beispiel</u>:
Kehren wir zurück zur Funktion $f(x)=1-(x-1)^2$, $x \in [0;\ 2]$ und betrachten wir wieder die Stelle $x_0 = 1/2$. An dieser Stelle ist der Differenzenquotient von f gleich

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}+h-1\right)^2\right]-\left[\frac{3}{4}\right]}{h} = \frac{1-\left(h-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{h} = \frac{1-h^2+h-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{h} = \frac{h-h^2}{h}$$

Nun teilen wir oben unten durch h, was wir machen dürfen, da wir ja für h nie null einsetzen.

$$\frac{h-h^2}{h} = \frac{1-h}{1}.$$

Der Differentialquotient ist nun gleich $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-h}{1}=1$ ...Wie wir schon geahnt hatten!

<u>Bemerkung</u>
Im Differenzenquotienten sollen nur solche Werte von h eingesetzt werden, für welche x_0+h im Definitionsbereich D liegen, und entsprechend durchläuft das h bei der Berechnung des Grenzwertes alle solche erlaubte Werte.

Im Normalfall enthält D ein offenes Intervall um x_0; es sind also sowohl positive als auch negative Werte von h im Differenzenquotienten erlaubt. Es kann aber auch vorkommen, dass zum Beispiel $D = [x_0;\ b)$ ist. In diesem Fall beschränkt man sich bei der Grenzwertbildung

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \text{von rechts}}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{auf} \quad h>0.$$

Man «nähert sich also dem Grenzwert von rechts». Deshalb spricht man bei einem solchen Differentialquotienten von der **Rechtsableitung** an der Stelle x_0. Analog definiert man die **Linksableitung**. (Als Beispiel betrachte man die obige Funktion $f(x)=1-(x-1)^2$, $x_0 \in D$ in den Grenzpunkten des Intervalls: $x_0 = 0$ und $x_0 = 2$.)

Wenn D doch ein offenes Intervall um x_0 enthält, so gilt:

f ist an der Stelle x_0 **differenzierbar** $\Leftrightarrow$ die Linksableitung als auch die Rechtsableitung existieren, und die beiden Ableitungen sind gleich.

<u>Definition</u> (Ableitung einer Funktion)

Ist die Funktion f an <u>allen</u> Stellen ihres Definitionsbereichs differenzierbar, so nennt man die Funktion f **differenzierbar**. Die reelle Funktion $x \mapsto f'(x)$ wird dann mit f' oder auch mit $\frac{df}{dx}$ bezeichnet, und heisst **Ableitung von f**.

Beispiel 1: ✎
Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung der Funktion $f : y = x^2$.

Beispiel 2: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = 0$ (und nur dort) **nicht differenzierbar**. Die **Rechtsableitung** beträgt **+1** die **Linksableitung** beträgt **-1**. (Keine eindeutige Tangentensteigung!)

Bemerkung: Allgemein kann man (salopp ausgedrückt) sagen: Überall dort wo der Graph von f(x) «**Ecken**» hat, ist f(x) **nicht differenzierbar**. Da solche Probleme bei Graphen von **Polynomfunktionen** nicht auftreten (weder Ecken noch Definitionslücken) sind diese **überall differenzierbar**.

4.2.1 Rechenregeln

Damit wir nicht immer einen Grenzwert ausrechnen müssen, nennen wir einige Regeln, mit deren Hilfe man die Ableitung einer komplizierteren Funktion ausrechnen kann. Diese Regeln können mit Hilfe des Differentialquotienten hergeleitet werden. Im **Anhang** finden Sie die **Beweise** dazu.

Satz
Seien f, g, u, v und h reelle Funktionen. Weiter seien f, g, u und v an der Stelle x_0 differenzierbar und h an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt:

1. $[c \cdot f(x_0)]' = c \cdot f'(x_0)$ für alle Konstanten c ∈ IR (Konstantenregel)
2. $[u(x_0) + v(x_0)]' = u'(x_0) + v'(x_0)$ (Summenregel)
3. $[u(x_0) \cdot v(x_0)]' = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$ (Produktregel)
4. Wenn $v(x_0) \neq 0$ ist, so gilt $\left(\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)' = \dfrac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v(x_0)^2}$ (Quotientenregel)
5. $[h(f(x_0))]' = \underbrace{h'[f(x_0)]}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Abl.}}$ (Kettenregel: «äussere Ableitung mal innere Ableitung»)

Bemerkung (Beweis als Übung)
Eine weitere Regel (in der Literatur auch als Potenzregel bezeichnet) lautet folgendermassen:

Die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$, (n ∈ lN) lautet $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Man kann zeigen (siehe weiter unten), dass diese Regel auch für reelle Exponenten gültig ist.

Beispiele: Zu bestimmen ist jeweils die Ableitung der gegebenen Funktion:

1. $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$.

   Die Ableitung einer konstanten Funktion ist null! Das sieht man entweder mit Hilfe des Differentialquotienten: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$,
   oder aus der Tatsache, dass die Steigung einer konstanten Funktion überall gleich null ist und somit $f'(x) = 0$ gelten muss.

2. $f(x) = (x^2+2)^3$
   Die Potenz als Summe auszuschreiben und dann die Summanden einzeln abzuleiten, wäre hier ein möglicher Weg, aber zu aufwendig! Effizienter geht es mit der Kettenregel:

3. $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$
   Die Ableitung erfolgt hier mit Hilfe einer Kombination «Produktregel – Kettenregel»:

$$f(x) = \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{v(x)} \quad \to \quad f'(x) = \underbrace{2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{v(x)} + \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(\sqrt{1-x^2})'}_{v'(x)}$$

Nun müssen wir noch v'(x) mit Hilfe der Kettenregel bestimmen:

$$v'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\text{innere Abl.}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{Somit: } f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

4. $f(x) = \frac{5x^3-x}{x^2}$
   Eine erste Möglichkeit wäre hier die Quotientenregel anzuwenden:

Eine zweite Möglichkeit ergibt sich durch Umformung des Funktionsterms:

$$f(x) = \frac{5x^3-x}{x^2} = 5x - \frac{1}{x} = 5x - x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5-(-1)\cdot x^{-2} = 5 + \frac{1}{x^2} = \frac{5x^2+1}{x^2}$$

→ Übungen Mi, Block 3

4.2.2 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Wir möchten die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ ermitteln.

Wir bilden zuerst den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und formen ihn um:

$$\frac{e^{(x_0+h)}-e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}\cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}\cdot(e^h-1)}{h} = e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h}$$

Nun betrachten wir den Differentialquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} e^{x_0}\cdot\frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0}\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}}_{=1} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} = e^{x_0}$$

(Wie schon in den Übungen gesehen, gilt: $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1}$.) Somit haben wir folgendes erhalten:

$$f(x) = e^x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = e^x$$

Aus dieser Erkenntnis, aus der Tatsache dass $\boxed{e^{\ln(a)}=a}$ ist und mit Hilfe der Kettenregel lässt sich nun auch die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = a^x,\ a>0$ ermitteln (**nicht** zu verwechseln mit der Potenzfunktion $f(x)=x^n$) :

$$(a^x)' = [(\underbrace{e^{\ln(a)}}_{a})^x]' = (e^{x\cdot\ln(a)})' = \underbrace{e^{x\cdot\ln(a)}}_{\text{äussere Abl.}}\cdot\underbrace{\ln(a)}_{\text{innere Abl.}} = \underbrace{\left(e^{\ln(a)}\right)}_{a}^{x}\cdot\ln(a) = a^x\cdot\ln(a) = \ln(a)\cdot a^x.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich die Ableitung der Logarithmusfunktion aus der Identität $a^{\log_a(x)} = x$ durch Ableiten auf beiden Seiten und durch Umformungen ermitteln *(Beweis als Übung)* :

$$k(x) = \log_a(x) \quad\Rightarrow\quad k'(x) = \frac{1}{\ln(a)\cdot x}$$

Wir fassen unsere Resultate zusammen:

Satz

Ist $a>0$ und h die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto a^x$, so ist h überall differenzierbar, mit der Ableitung $h'(x) = \ln(a)\cdot a^x$. Ist insbesondere $a=e$, so gilt $h'(x) = h(x) = e^x$. Also: $(e^x)' = e^x$.

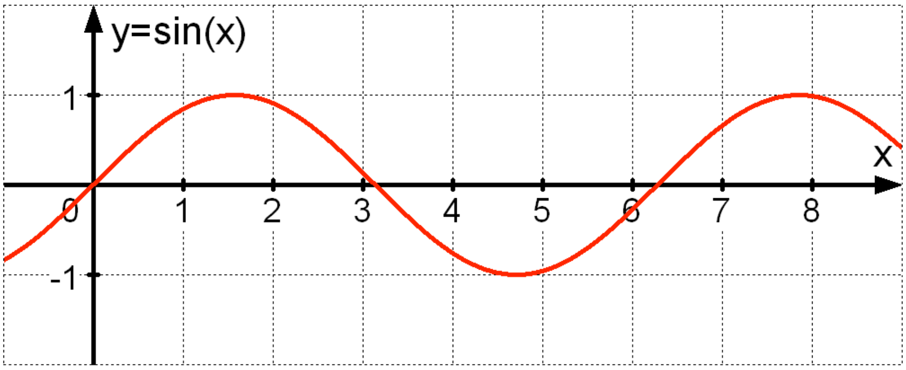
Umgekehrt ist die Funktion $k:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\quad x\mapsto\log_a(x)$ differenzierbar mit der Ableitung $k'(x) = \frac{1}{\ln(a)\cdot x}$. Ist insbesondere $a=e$, so gilt $k'(x)=\frac{1}{x}$. Also: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4.2.3 Trigonometrische Funktionen

Schliesslich geben wir (ohne mathematischen Beweis) noch die Ableitungsregeln für Sinus und Cosinus an: sowohl $x \mapsto \sin(x)$ als auch $x \mapsto \cos(x)$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und ihre Ableitungen sind:

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Zur Illustration bestimmen wir die Ableitung von $y = \sin(x)$ «grafisch»: ✎

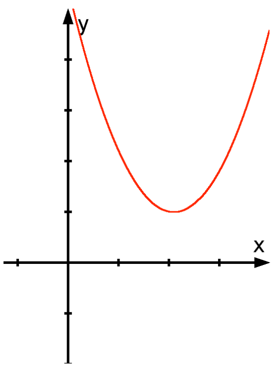


4.2.4 Bestimmung des Scheitelpunkts einer Parabel: Eine Anwendung

Wir erinnern uns an das gestrige Resultat:

> ⓘ Der Graph der quadratischen Funktion f: $y = ax^2 + bx + c$ ist die nach oben ($a > 0$) bzw. nach unten ($a < 0$) geöffnete, zu $y = ax^2$ deckungsgleiche Parabel mit dem Scheitel (u | v); wobei die **Scheitelkoordinaten (u | v)** aus den Koeffizienten a, b und c zu berechnen sind:
>
> $$\mathbf{u} = -\frac{b}{2a}, \quad \mathbf{v} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Mit Hilfe der Differentialrechnung wollen wir das nun beweisen:



Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ eine quadratische Funktion.
Der Graph ist, wie wir wissen, eine Parabel. Die Steigung im Scheitelpunkt der Parabel muss null betragen, da wir dort eine horizontale Tangente haben. Somit suchen wir nach der Stelle x mit $f'(x) = 0$.
Es ist also die folgende Gleichung nach x aufzulösen: $f'(x) = 2ax + b = 0$.
Die Lösung lautet: $x = \frac{-b}{2a}$ und wir haben die x-Koordinatenformel des Scheitelpunkts hergeleitet. Wollen wir auch noch die y-Koordinatenformel herleiten, brauchen wir nur noch $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ zu rechnen:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = a\cdot\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

q.e.d.

4.2.5 Die Ableitung von f(x) = x^r für reelle Exponenten r

Für die Ableitung einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit einem natürlichen Exponenten n ∈ lN haben wir weiter oben die folgende Ableitungsregel eingeführt und in den Übungen bewiesen:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Regel ganz analog auch für reelle Exponenten gilt:

<u>Satz</u>

Die Ableitung von $f(x) = x^r$, (mit r ∈ lR) lautet $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

<u>Beweis</u>:

Sei r ∈ lR. Der Funktionsterm $f(x) = x^r$ kann als Potenzterm zur Basis e umgeformt werden:

$$f(x) = x^r = \Big(\underbrace{e^{\ln(x)}}_{x}\Big)^r = e^{r \cdot \ln(x)}$$

Nun leiten wir ab. Wir benutzen dabei die Kettenregel und die Tatsache, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ gilt:

$$f'(x) = \underbrace{e^{r \cdot \ln(x)}}_{\text{äussere Ableitung}} \bullet \underbrace{r \cdot [\ln(x)]'}_{\text{innere Ableitung}} = e^{r \cdot \ln(x)} \bullet r \cdot \frac{1}{x} = x^r \bullet r \cdot x^{-1} = r \cdot x^{r-1}$$

Somit gilt: $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$. *q.e.d.*

→ Übungen Mi, Block 4

5 ANHANG

5.1 Beweise der Ableitungsregeln

5.1.1 Die Konstantenregel

$\boxed{f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)}$ «Der konstante Faktor bleibt unverändert als Faktor erhalten.»

Beispiel: $f(x) = 7 \cdot x^3 \rightarrow f'(x) = 7 \cdot (3 \cdot x^2) = 21 \cdot x^2$

Herleitung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = c \cdot g'(x)$$

5.1.2 Die Summenregel

$\boxed{f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)}$ «Eine Summe wird summandenweise abgeleitet.»

Beispiel: $f(x) = x^4 + x \rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3 + 1$

Herleitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] = u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

5.1.3 Die Produkteregel

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Beispiel: $f(x) = x^2 \cdot \sin(x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

Herleitung:

$$\big(u(x)\cdot v(x)\big)' \overset{\text{Diff.quotient}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}$$

$$\overset{\substack{\text{Trick:}\\ \text{0 addieren}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x+h)\overbrace{-u(x+h)\cdot v(x)+u(x+h)\cdot v(x)}^{=\,0}-u(x)\cdot v(x)}{h}$$

$$\overset{\substack{\text{Aufteilen in 2}\\ \text{Summanden}}}{=} \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x+h)\cdot v(x)}{h}+\frac{u(x+h)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{h}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{und Faktoren}\\ \text{vorklammern}}}{\overset{\text{Limes einzeln}}{=}} \lim_{h\to 0} \left(u(x+h)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \left(v(x)\cdot\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{Nochmals}\\ \text{Limes einzeln}}}{=} \lim_{h\to 0} \big(u(x+h)\big)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \big(v(x)\big)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$\overset{\text{Ausrechnen}}{=} u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x)$$

$$\overset{\text{Umstellen}}{=} u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Natürlich gilt die Produkteregel auch für mehrere Faktoren:

$$\boxed{f(x) = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)}$$

Herleitung:

$$f(x)=\big[u(x)\cdot v(x)\big]\cdot w(x)$$

$$f'(x)=\big[u(x)\cdot v(x)\big]'\cdot w(x) + \big[u(x)\cdot v(x)\big]\cdot w'(x)$$

$$=\big[u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\big]\cdot w(x) + \big[u(x)\cdot v(x)\big]\cdot w'(x)$$

$$=u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

5.1.4 Die Quotientenregel

$$\boxed{f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+3} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \dfrac{2x\cdot(2x+3) - x^2\cdot 2}{(2x+3)^2} = \dfrac{2x^2+6x}{(2x+3)^2}$

Herleitung:

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad\Leftrightarrow\quad u(x)=v(x)\cdot f(x)$$

Wir leiten nun beide Seiten der Gleichung ab und wenden dabei auf der rechten Seite die Produkteregel an:

$$u'(x) = v'(x)\cdot f(x)+v(x)\cdot f'(x)$$

Dann lösen wir nach $f'(x)$ auf:

$$f'(x) = \frac{u'(x)-v'(x)\cdot f(x)}{v(x)}$$

Auf der rechten Seite ersetzen wir $f(x)$ mit $\dfrac{u(x)}{v(x)}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)-v'(x)\cdot\dfrac{u(x)}{v(x)}}{v(x)}$$

Schliesslich vereinfachen wir den Bruchterm auf der rechten Seite:

$$f'(x) = \frac{u'(x)-v'(x)\cdot\dfrac{u(x)}{v(x)}}{v(x)} = \frac{\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v(x)}}{v(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

5.1.5 Die Kettenregel

$$\boxed{f(x) = u(v(x)) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Abl.}}}$$

Die verschachtelte Funktion $u(v(x))$ wird also folgendermassen abgeleitet:

Man leitet die äussere Funktion ab, wie wenn die innere Funktion die Variable wäre, dann multipliziert man mit der Ableitung der inneren Funktion.

<u>Beispiel:</u> $f(x) = \overbrace{\sin(\underbrace{x^3}_{v(x)})}^{u(v)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{\cos(x^3)}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{innere Abl.}}$

<u>Herleitung:</u>

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}$$

Es sei $\boxed{K = v(x+h)-v(x)}$, dann lässt sich der obige Term auch schreiben als:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(\overbrace{v(x)+K}^{v(x+h)})-u(v(x))}{h} \cdot \overbrace{\left[\frac{v(x+h)-v(x)}{K}\right]}^{=1}$$

Wir ändern die Reihenfolge der Nenner und erhalten:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(v(x)+K))-u(v(x))}{K} \cdot \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(v(x)+K))-u(v(x))}{K} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wir es hier mit differenzierbaren und somit mit stetigen Funktionen zu tun haben, kann man sagen, dass folgendes gilt: $\boxed{h\to 0 \quad \Rightarrow \quad K\to 0}$. Daraus folgt:

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{K\to 0}\frac{u(v(x)+K))-u(v(x))}{K}}_{u'(v(x))} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}_{v'(x)}$$

Somit gilt: $f'(x) = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Abl.}}$

Abschliessende Bemerkung:
Strenggenommen, enthält der obige Beweis eine kleine «Stolperstelle». Es kann durchaus sein, dass $K = 0$ wird, auch wenn $h \neq 0$ gilt. In diesem Fall würden wir im ersten Schritt den Bruch mit Null erweitern was natürlich nicht erlaubt ist. Durch Einführung einer geeigneten Hilfsfunktion und entsprechenden Überlegungen kann man aber diese Stolperstelle überwinden. Auf einen solch streng formalen Beweis wollen wir aber im Rahmen dieses Vorkurses verzichten.

5.1.6 Die Ableitung der Sinusfunktion, Herleitung

Wir möchten folgendes herleiten:

$\boxed{f(x)=\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)}$ (x im Bogenmass)

Vorwissen und Hilfsresultate:

(*) $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$ (Additionstheorem, siehe Skript Dienstag)

(**) $\boxed{\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)=1}$ (siehe nächste Seite) (***) $\boxed{\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right)=0}$ (siehe unten)

Herleitung durch Anwendung der Hilfsresultate (*), (**) und (***):

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\right) \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\sin(h)-\sin(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\sin(x)\cdot[1-\cos(h)]+\cos(x)\cdot\sin(h)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(-\sin(x)\cdot\frac{[1-\cos(h)]}{h}+\cos(x)\cdot\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

Der Limes kann nun faktorenweise gebildet werden (siehe Grenzwertsätze):

$$= \lim_{h\to 0}(-\sin(x))\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{[1-\cos(h)]}{h}\right)}_{\to\ 0,\ \text{wegen}\ (***)}+\lim_{h\to 0}(\cos(x))\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)}_{\to\ 1,\ \text{wegen}\ (**)} = -\sin(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 = \cos(x)$$

Beweis von (***) $\boxed{\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right)=0}$

Wir erweitern den Bruchterm $\frac{1-\cos(h)}{h}$ mit $1+\cos(h)$ und erhalten:

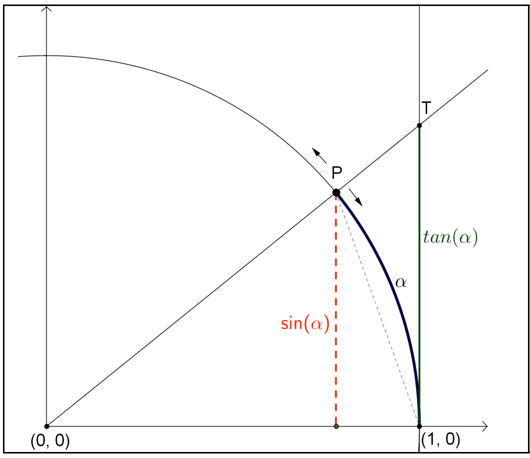
$$\frac{1-\cos(h)}{h}\cdot\frac{1+\cos(h)}{1+\cos(h)}=\frac{1-\cos^2(h)}{h(1+\cos(h))}=\frac{\sin^2(h)}{h(1+\cos(h))}=\frac{\sin(h)}{h}\cdot\sin(h)\cdot\frac{1}{1+\cos(h)}$$

Der Limes kann nun faktorenweise gebildet werden (siehe Grenzwertsätze). Somit gilt:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}(\sin(h))\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos(h)}\right)=1\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Beweis von (**) $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)=1}$ respektive von $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right)=1}$.

Wir untersuchen den Grenzwert $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}}$ (α im Bogenmass)



Wir betrachten das Dreieck (innerhalb des Kreissektors) mit den Ecken (0, 0); (1, 0) und P.

Der Dreiecksflächeninhalt beträgt: $\frac{1\cdot\sin(\alpha)}{2}$

(Grundlinie mal Höhe durch 2)

Wir betrachten den Kreissektor begrenzt durch die Radien der Länge 1 und dem Bogen der Länge α.

Der Kreissektorflächeninhalt beträgt: $\frac{\alpha\cdot 1}{2}$

(Bogenlänge mal Radius durch 2)

Wir betrachten das etwas grössere Dreieck begrenzt durch die beiden Katheten der Länge $\tan(\alpha)$ und 1, also das Dreieck mit den Ecken (0, 0); (1, 0) und T.

Der Dreiecksflächeninhalt beträgt: $\frac{1\cdot\tan(\alpha)}{2}$ *(Kathete mal Kathete durch 2)*

Nun vergleichen wir diese drei Flächeninhalte! Aus der obigen Zeichnung ist klar ersichtlich, dass die folgende Grössenrelation gilt:

$\frac{1\cdot\tan(\alpha)}{2}\geq\frac{\alpha}{2}\geq\frac{1\cdot\sin(\alpha)}{2}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\tan(\alpha)\geq\alpha\geq\sin(\alpha)$. Division durch $\sin(\alpha)$ liefert:

$\frac{1}{\cos(\alpha)}\geq\frac{\alpha}{\sin(\alpha)}\geq 1$. (Wir setzen $\alpha>0$ und somit $\sin(\alpha)\neq 0$ voraus.) Wir bilden den Kehrwert:

$\cos(\alpha)\leq\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\leq 1$. (Bei der Kehrwertbildung dreht das Zeichen $\geq$)

Wir bilden nun den Limes: $\overbrace{\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos(\alpha)}^{=1}\leq\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\leq 1$.

Somit muss $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}=1$ gelten.

q.e.d.