

Vorkurs Mathematik für Natur- und Sozialwissenschaften, ÜBUNGEN

MONTAG

Block 1

- Berechnen Sie von Hand: $\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{17}{18} - \frac{2}{9} \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{14} \right) \right) + \frac{15}{2}$
- Berechnen Sie von Hand: a) $\frac{1}{\left(\frac{2}{\left(\frac{3}{4} \right)} \right)}$ b) $\frac{1}{\left(\frac{(2/3)}{4} \right)}$
- Zu welchen Zahlenmengen (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R}) gehören:
 - π
 - $\sqrt{2}$
 - $\sqrt{\frac{1}{4}}$
 - $\frac{(-100) \cdot (-99) \cdot (-98) \cdot (-97)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$?
- Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl 0.7333... in einen Bruch um!
- Vereinfachen Sie so weit wie möglich:
 - $(4a - 3b)(a + 2b)(5a + 6b)$
 - $1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x))))))$
 - $(4ax - 3by)(4ax + 3by) - 16(ax + by)^2$
- Eliminieren Sie die Klammern (Pascal'sches Zahlendreieck):
 - $(x + y)^7$
 - $(-m + 10)^5$
- Zerlegen Sie (vollständig und so weit wie möglich!) in Faktoren:
 - $42ab - 56bd - 48ac + 64cd$
 - $x^4 - x^3 - 12x^2$
 - $2(r + 2)(3r + 1) - 5(r + 2)^2$
 - $256n^3 - 4$
 - $r^4 - 3r^2 + 1$ Tipp: Quadratische Ergänzung.
- Kürzen Sie die folgenden Bruchterme so weit wie möglich:
 - $\frac{a - 5}{5 - a}$
 - $\frac{4xy - 20}{30 - 6xy}$
 - $\frac{9x^2 - 12xy + 4y^2}{12x^2 - 11xy + 2y^2}$
- Erweitern Sie die folgenden Brüche:
 - $\frac{2a}{3b} = \frac{?}{15ab}$
 - $\frac{9x}{7y} = \frac{?}{7ay - 7by}$
 - $\frac{a - 3b}{3x - 1} = \frac{?}{2 - 6x}$
- *Zeigen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}$ eine ganze Zahl. Hinweis: Klammern Sie aus!

Montag – Block 1, Endresultate zur Kontrolle

1. $\frac{233}{30}$

2. a) $\frac{3}{8}$ b) 6

3. a) $\pi \in \mathbb{R}$ b) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ c) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ d) $\frac{(-100) \cdot (-99) \cdot (-98) \cdot (-97)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \in \mathbb{N}$

4. $x = \frac{11}{15}$

5. a) $20a^3 + 49a^2b - 36b^3$ b) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$ c) $-25b^2y^2 - 32axby$

6. a) $x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$

b) $100'000 - 50'000m + 10'000m^2 - 1'000m^3 + 50m^4 - m^5$

7. a) $2(3a - 4d)(7b - 8c)$ b) $x^2(x + 3)(x - 4)$ c) $(r + 2)(r - 8)$

d) $4(4n - 1)(16n^2 + 4n + 1)$ e) $(r^2 - 1 + r)(r^2 - 1 - r)$

8. a) -1 b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{3x - 2y}{4x - y}$

9. $\frac{2a}{3b} = \frac{10a^2}{15ab}$ b) $\frac{9x}{7y} = \frac{9ax - 9bx}{7ay - 7by}$ c) $\frac{a - 3b}{3x - 1} = \frac{-2a + 6b}{2 - 6x}$

10. $\frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3} = \dots = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$. Nun muss nur noch korrekt argumentiert werden...

Block 2

1. Brüche addieren und subtrahieren

a) $\frac{4x-5y}{2x} - \frac{5x-5y}{2x}$

b) $\frac{a}{a+b} - 1$

c) $\frac{5a-b}{a^2b} - \frac{3a+b}{ab^2} - \frac{4a^2-7ab-b^2}{a^2b^2}$

d) $\frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2y}{y^2-x^2}$

e) $\frac{a-2}{(a-4)^2} - \frac{a-2}{a^2-7a+12}$

2. Brüche multiplizieren und dividieren

a) $\frac{4m-8n}{ax+3ay} \cdot \frac{2bx+6by}{6n-3m}$

b) $(5a+5b) : \frac{a^2-b^2}{15xy}$

c) $\frac{c-2d}{5x} : (2d-c)$

3. Vermischtes

a) $\left(x - \frac{y}{x}\right) \cdot \left(x + \frac{y}{x}\right)$

b) $\frac{21a^2b}{10c^2} : \left(\frac{5ab}{3c} + \frac{ab}{5c}\right)$

c) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x-y) + (x+y) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

4. Doppelbrüche

a) $\frac{a}{a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}}} =$

b) $\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{(x-y)^2}{4xy} + 1} =$

5. Machen Sie den Nenner wurzelfrei und vereinfachen Sie:

a) $\frac{6}{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}$

b) $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

6. Berechnen Sie:

a) $(5 - \sqrt{5x+9})^2$

b) $(c \cdot \sqrt{x-1})^2$

c) $\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Block 3

1. Vereinfachen Sie:

a) $\frac{a^{-3}}{a}$

b) $\frac{b}{b^{-3}}$

c) $b^{x-1} \cdot b^{x-2} \cdot b^x$

d) $\left(\frac{3^{1+\sqrt{2}}}{3^{1-\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$

2. Korrigieren Sie die Fehler:

a) $\frac{xz^n}{y^n} = \left(\frac{xz}{y}\right)^n$

b) $\frac{x^n}{y^n} = \frac{x}{y}$

c) $x^{(m+n)} = (x^m)^n$

d) $\frac{1}{y^n} = y^{1-n}$

e) $x^n y^n = (xy)^{2n}$

f) $y^0 = 0$

3. Für welches x nimmt der folgende Ausdruck den Wert 16 an?

$$\frac{8^{1-x} \cdot 4^{5x+3} \cdot 2^{3x+1}}{2^{2x+3} \cdot 8^{x-1} \cdot 4^{x+3}}$$

Tipp: Formen Sie alles in 2er-Potenzen um!

4. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Endergebnis als Wurzelausdruck:

$$\frac{\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt[10]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$$

5. Vereinfachen Sie: a) $\left(\frac{a^3 \cdot b^3}{b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b^2}{a^2}\right)^3$ b) $\left[\frac{a^5 (a^3)^2 b}{3a^8 b^2 a^4}\right]^{-1}$ c) $\frac{b^{m+1}}{b^{m-1}} - b$

6. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x in der Grundmenge IR.

a) $\frac{7x+5}{8} + \frac{4x+1}{3} = 7x - \frac{1+9x}{2}$

b) $\frac{x(a^2+1)}{2} + 1 = a(x+1)$

7. Lösen Sie die folgenden zwei Ungleichungen in der Grundmenge IN.

a) $x^2 - 4 > (x-5)(x+5)$

b) $1 - 3(x-4) \geq 2(5-x)$

8. * Knobelaufgabe: Zwei Gläser stehen vor Ihnen. Im 1. Glas hat es Rotwein, im 2. Glas befindet sich exakt das gleiche Volumen Weisswein.

Schütten Sie einen Löffel voll Rotwein aus dem 1. Glas in das 2. Glas, rühren die Mischung gut um, und nehmen Sie dann einen Löffel voll Wein aus dem 2. Glas und schütten Sie ihn ins 1. Glas.

Befindet sich nun mehr Rotwein im 2. oder mehr Weisswein im 1. Glas? Oder gleich viel? Begründen Sie Ihre Antwort!

Montag – Block 3, Endresultate zur Kontrolle

1. a) a^{-4} b) b^4 c) b^{3x-3} d) 81

2. a) $\frac{xz^n}{y^n} = x \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^n$ b) $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ c) $x^{(m+n)} = x^m \cdot x^n$

d) $\frac{1}{y^n} = y^{-n}$ e) $x^n y^n = (xy)^n$ f) $y^0 = 1$, für $y \neq 0$

3. $x = 0$

4. $\sqrt[3]{x}$

5. a) $a^3 b^8$ b) $3ab$ c) $b^2 - b$

6. a) $x = 5$ b) $x = \frac{2}{a-1}$

7. a) $\mathbb{IL} = \mathbb{IN}$ b) $\mathbb{IL} = \{ 3; 2; 1 \}$

8. Antwort: Es hat gleichviel Weisswein im ersten Glas wie Rotwein im zweiten Glas!

Block 4

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in der Grundmenge \mathbb{R} und geben Sie jeweils die Definitionsmenge ID an.

$$a) \frac{5}{x+1} = \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1}$$

$$b) \frac{x+2}{x-4} - \frac{14}{3x-12} - \frac{3}{2x-8} = \frac{5}{6}$$

$$c) \frac{2x+60}{x^2-25} = \frac{6}{x+5} + \frac{7}{x-5}$$

$$d) \frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{x+3}{4-x^2}$$

2. Unter einer Kontraposition versteht man in der Logik den Umkehrschluss einer Implikation, d. h. den Schluss von «Wenn A, dann B» auf «Wenn nicht B, dann nicht A».

Hier ein Alltagsbeispiel fürs bessere Verständnis: «Wenn es regnet, dann ist die Strasse nass.»
Diese Aussage «Aus A folgt B» ist äquivalent zu ihrer Kontraposition «Aus nicht B folgt nicht A»:
«Wenn die Strasse nicht nass ist, dann regnet es nicht.»

Wenn die Behauptung eines Satzes eine Implikation ist, dann kann man stattdessen auch die Kontraposition zeigen, was manchmal einfacher ist.

Beweisen Sie die Aussage: « x^2 ungerade \Rightarrow x ungerade» (wobei $x \in \mathbb{Z}$ ist), indem Sie die Kontraposition nachweisen: « x gerade \Rightarrow x^2 gerade».

3. Für welche ganzzahlige x ist $\frac{x^2 + 2x + 3}{2}$ eine ganze Zahl?

Stellen Sie zunächst eine Behauptung auf und beweisen Sie dann Ihre Behauptung! Beachten Sie bei der Beweisführung die Tatsache, dass Sie das Resultat aus der Aufgabe 2 verwenden dürfen.

4. Lösen Sie die folgende Bruchgleichung mit dem Parameter p (ohne Diskussion von Sonderfällen)

$$\text{nach } x \text{ auf: } \frac{3x+p}{3x-1} = \frac{x+1}{x-p}$$

5. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen

$$a) \sqrt{13-4x} + x + 2 = 0$$

$$b) \sqrt{3x+4} = 5 - \sqrt{5x+9}$$

$$c) \sqrt{2x-3} = -5$$

$$d) 2\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+6}$$

6. Die folgenden Gleichungen führen auf quadratische Gleichungen zurück. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

$$a) 3x^4 - 51x^2 + 48 = 0$$

$$b) \frac{x^4}{8} - x^2 + 2 = 0$$

$$c) * \sqrt{13+x} + \sqrt{13-x} = 6$$

$$d) * \frac{x-a}{1-a} + \frac{1}{x} = 2$$

