

Vorkurs UZH 2020

# Mathematik Rechenfertigkeiten

Übungen Freitag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich  
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich  
Erstellt von Dr. Irmgard Bühler

August 2020

## Integration, Teil 1

1. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a)  $\int 3x^2 dx$       b)  $\int x^2 + 3 dx$       c)  $\int x^3 + ax dx$  für  $a$  konstant.

2. Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a)  $\int_{-2}^1 x^4 - 5 dx$       b)  $\int_1^3 x^2 - 4x dx$       c)  $\int_5^{10} \frac{1}{x} dx$       d)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx$

3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a)  $\int x(x^2 + 3) dx$       b)  $\int 3 \sin(x) dx$       c)  $\int \cos(x) + \frac{1}{x} + e^x dx$   
 d)  $\int \sqrt{x} dx$       e)  $\int \frac{1}{x} dx$       f)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

4. Bestimmen Sie  $a$ , so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

a)  $\int_0^2 ax^2 - 2ax dx = -\frac{8}{3}$       b)  $\int_1^a ax + 2 dx = 16$

5. Integrieren Sie ein allgemeines Polynom von der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  beliebige reelle Zahlen sind.

6. Zeichnen Sie die Kurve mit der Gleichung  $y = 3x^2$  und betrachten Sie die Fläche, die begrenzt wird durch diese Kurve, die  $x$ -Achse und die Geraden  $x = 0$  und  $x = 1$ .

a) Berechnen Sie die Ober- und Untersummen  $O_n$  und  $U_n$  für  $n = 1, 2$  und  $3$ .

b) Schreiben Sie  $O_n$  und  $U_n$  für ein allgemeines  $n$  auf und berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n.$$

## Integration, Teil 2

1. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen der Funktion  $f$  sowie der  $x$ -Achse eingeschlossen wird.

a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$       b)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

2. Berechnen Sie die Fläche, welche von den Graphen der beiden Funktionen  $f$  und  $g$  eingeschlossen wird.

a)  $f(x) = x, g(x) = x^2$       b)  $f(x) = x^2 - 9, g(x) = x^3 - 9x$

3. Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche, welche durch den Graphen der Funktion, der  $x$ -Achse und den vertikalen Linien  $x = a$  und  $x = b$  beschränkt wird.

a)  $f(x) = e^x, \quad a = -1, \quad b = 1$       b)  $g(x) = 2 \cos(x), \quad a = -\pi, \quad b = \pi$

## Integration, Teil 3

1. Berechnen Sie mit der partiellen Integration die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int x \cos(x) dx \quad \text{b) } \int u \ln(|u|) du \quad \text{c) } \int \frac{(\ln(|x|))^2}{x} dx \quad \text{d) } \int \sin^3(t) dt$$

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\text{a) } \int_1^7 \ln(t) dt \quad \text{b) } \int_0^h e^x(x-h) dx \quad \text{c) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$$
$$\text{d) } \int_0^{2\pi} e^{-t} \cos(t) dt$$

3. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen von  $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x)$ , der  $x$ -Achse und der Geraden  $x = 4$  eingeschlossen wird.

4. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen von  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = x^2 e^x$  eingeschlossen wird.

5. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Zusatzbedingung aus der Gleichung der ersten Ableitung einer Funktion diejenige der Funktion selber:

$$\text{a) } f'(x) = \sin(x), f(-\pi) = 1 \quad \text{b) } g'(x) = x \sin(x), g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$
$$\text{c) } h'(x) = x^2 e^x, h(0) = 0$$

## Integration, Teil 4

1. Berechnen Sie mit der Substitutionsregel die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int (2x + 1)e^{x^2+x} dx \quad \text{b) } \int \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 4} dt \quad \text{c) } \int \frac{\sqrt{1 + \ln(|x|)}}{x} dx$$

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^0 \frac{3t}{t^2 + 1} dt & \quad \text{b) } \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3x^2 - 2)(x^3 - 2x)^5 dx & \quad \text{c) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)e^{\sin(2t)} dt \\ \text{d) } \int_3^5 \frac{2x}{(1 + x^2)^2} dx & \quad \text{e) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx & \quad \text{f) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6 \sin(x) \cos(x) dx \end{aligned}$$

3. Wann wird welche Methode angewandt? Bestimmen Sie die Integrale.

$$\text{a) } \int \sin^2(x) \cos(x) dx \quad \text{b) } \int \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz \quad \text{c) } \int \sin^4(x) dx$$

4. Wann soll welche Methode wie angewendet werden?

Funktion	Methode	Was wird wie ersetzt?
$\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$		
$t \cdot \cos(t)$		
$e^y \cos(y)$		
$a^{5x}$		
$\ln(x)$		
$\ln\left(\frac{1}{8-3x}\right)$		
$\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$		
$x^2 \cos(x)$		
$(3x^2 - 5)^6$		