

Vorkurs UZH 2020

Mathematik Rechenfertigkeiten

Übungen Freitag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich
Erstellt von Dr. Irmgard Bühler

August 2020

Integration, Teil 1

1. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int 3x^2 dx$ b) $\int x^2 + 3 dx$ c) $\int x^3 + ax dx$ für a konstant.

2. Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_{-2}^1 x^4 - 5 dx$ b) $\int_1^3 x^2 - 4x dx$ c) $\int_5^{10} \frac{1}{x} dx$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx$

3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x(x^2 + 3) dx$ b) $\int 3 \sin(x) dx$ c) $\int \cos(x) + \frac{1}{x} + e^x dx$
 d) $\int \sqrt{x} dx$ e) $\int \frac{1}{x} dx$ f) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

4. Bestimmen Sie a , so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

a) $\int_0^2 ax^2 - 2ax dx = -\frac{8}{3}$ b) $\int_1^a ax + 2 dx = 16$

5. Integrieren Sie ein allgemeines Polynom von der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen sind.

6. Zeichnen Sie die Kurve mit der Gleichung $y = 3x^2$ und betrachten Sie die Fläche, die begrenzt wird durch diese Kurve, die x -Achse und die Geraden $x = 0$ und $x = 1$.

a) Berechnen Sie die Ober- und Untersummen O_n und U_n für $n = 1, 2$ und 3 .

b) Schreiben Sie O_n und U_n für ein allgemeines n auf und berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n.$$

Integration, Teil 2

1. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen der Funktion f sowie der x -Achse eingeschlossen wird.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

2. Berechnen Sie die Fläche, welche von den Graphen der beiden Funktionen f und g eingeschlossen wird.

a) $f(x) = x, g(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 - 9, g(x) = x^3 - 9x$

3. Gesucht ist der Flächeninhalt der Fläche, welche durch den Graphen der Funktion, der x -Achse und den vertikalen Linien $x = a$ und $x = b$ beschränkt wird.

a) $f(x) = e^x, \quad a = -1, \quad b = 1$ b) $g(x) = 2 \cos(x), \quad a = -\pi, \quad b = \pi$

Integration, Teil 3

1. Berechnen Sie mit der partiellen Integration die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int x \cos(x) dx \quad \text{b) } \int u \ln(|u|) du \quad \text{c) } \int \frac{(\ln(|x|))^2}{x} dx \quad \text{d) } \int \sin^3(t) dt$$

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\text{a) } \int_1^7 \ln(t) dt \quad \text{b) } \int_0^h e^x(x-h) dx \quad \text{c) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$$
$$\text{d) } \int_0^{2\pi} e^{-t} \cos(t) dt$$

3. Berechnen Sie die Fläche, welche vom Graphen von $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x)$, der x -Achse und der Geraden $x = 4$ eingeschlossen wird.

4. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen von $f(x) = e^x$ und $g(x) = x^2 e^x$ eingeschlossen wird.

5. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Zusatzbedingung aus der Gleichung der ersten Ableitung einer Funktion diejenige der Funktion selber:

$$\text{a) } f'(x) = \sin(x), f(-\pi) = 1 \quad \text{b) } g'(x) = x \sin(x), g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$
$$\text{c) } h'(x) = x^2 e^x, h(0) = 0$$

Integration, Teil 4

1. Berechnen Sie mit der Substitutionsregel die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int (2x + 1)e^{x^2+x} dx \quad \text{b) } \int \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 4} dt \quad \text{c) } \int \frac{\sqrt{1 + \ln(|x|)}}{x} dx$$

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-1}^0 \frac{3t}{t^2 + 1} dt & \text{b) } & \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3x^2 - 2)(x^3 - 2x)^5 dx & \text{c) } & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)e^{\sin(2t)} dt \\ \text{d) } & \int_3^5 \frac{2x}{(1 + x^2)^2} dx & \text{e) } & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx & \text{f) } & \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6 \sin(x) \cos(x) dx \end{aligned}$$

3. Wann wird welche Methode angewandt? Bestimmen Sie die Integrale.

$$\text{a) } \int \sin^2(x) \cos(x) dx \quad \text{b) } \int \frac{\sin(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz \quad \text{c) } \int \sin^4(x) dx$$

4. Wann soll welche Methode wie angewendet werden?

Funktion	Methode	Was wird wie ersetzt?
$\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$		
$t \cdot \cos(t)$		
$e^y \cos(y)$		
a^{5x}		
$\ln(x)$		
$\ln\left(\frac{1}{8-3x}\right)$		
$\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$		
$x^2 \cos(x)$		
$(3x^2 - 5)^6$		