Vorkurs UZH 2020

Mathematik Rechenfertigkeiten

Skript Freitag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich

August 2020

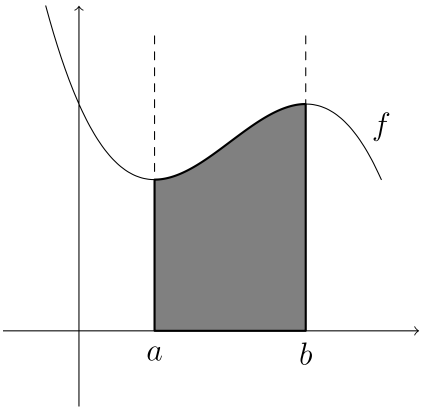
Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Integralrechnung

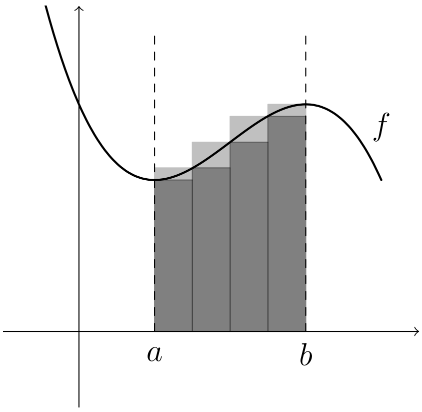
Wir haben in den letzten Tagen die Ableitung, das zentrale Werkzeug der Differenzialrechnung, kennengelernt. Nun wenden wir uns dem zweiten grossen Gebiet der Analysis zu, der Integralrechnung. Ziel des ersten Teils ist es zu zeigen, dass ein Zusammenhang besteht zwischen dem Ausrechnen des Flächeninhaltes unter dem Graphen einer Funktion f und dem Finden einer Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$, einer sogenannten **Stammfunktion** von f. Im zweiten Teil geht es um die Anwendung der Integralrechnung auf Fragen der Flächenberechnung. In den letzten beiden Teilen werden wir schliesslich einige Integrationsregeln und -methoden behandeln, welche uns helfen, eine gegebene Funktion f zu integrieren.

1.1 Bestimmtes Integral

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$, welche überall ≥ 0 ist. Wie gross ist die Fläche, welche zwischen dem Graphen der Funktion und der x–Achse sowie den vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$ liegt?



Wir approximieren nun diese Fläche durch jeweils n Stücke auf von unten und von oben:



Wir brauchen folgende Bezeichnungen:

Innere Treppenfläche U_n:	Die dunkel schattierte Fläche
Äussere Treppenfläche O_n:	Die dunkel schattierte plus die hell schattierte Fläche

Unterteilen wir nun die Fläche in immer kleinere Stücke, so wird die Approximation immer besser. Anders gesagt, bekommen wir den korrekten Flächeninhalt, sobald wir $n \to \infty$ laufen lassen.

Definition (Bestimmtes Integral)

Falls

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n,$$

wird dieser Limes als **bestimmtes Integral** bezeichnet, und wir schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

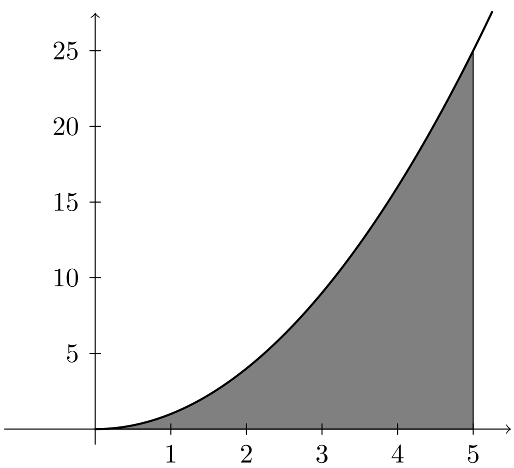
Für eine positive Funktion entspricht also das Integral gerade der Fläche unter der Kurve.

Bemerkung. Für eine stetige Funktion ist obige Bedingung immer erfüllt. Es gibt aber Funktionen, bei welchen das nicht mehr zutrifft. Betrachte

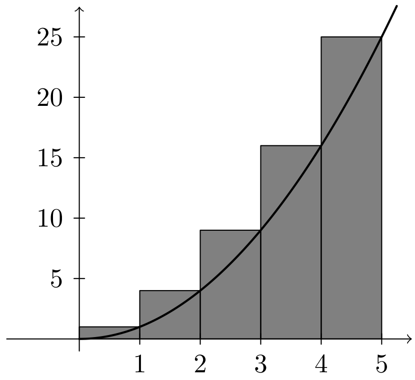
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

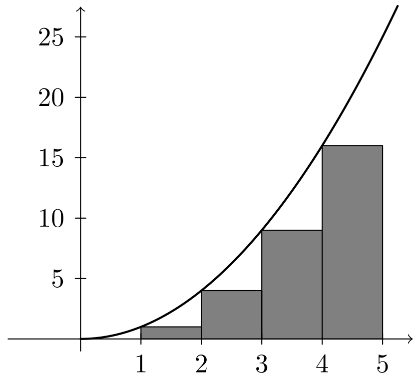
Dann gelten $U_n = 0$ und $O_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} O_n$. Der Graph dieser Funktion lässt sich nicht zeichnen, da der Wert beliebig schnell zwischen 0 und 1 hin und her springt. In diesem Fall ist auch nicht klar, was die Fläche unter diesem Graphen sein soll. Dies erfordert eine tiefergehende Behandlung der Integrationstheorie.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ und wollen die Fläche von 0 bis zu einer Zahl b berechnen (in der Grafik unten ist $b = 5$).



Wir unterteilen die Fläche zuerst wieder in n Teile und approximieren sie von oben sowie von unten.





Wir werden folgende Formel benutzen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Wir erhalten für die äussere Treppenfläche

$$\begin{aligned}
O_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left(\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nb}{n}\right)^2\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) = b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)
\end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Auf die gleiche Art und Weise erhalten wir für die innere Treppenfläche

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{b}{n}\cdot 0^2 + \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n}\cdot\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right) \\ &= \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(\frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6}\right) = b^3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) \end{aligned}$$

und für den Limes

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} b^3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Die zwei Grenzwerte stimmen überein, und somit erhalten wir:

$$\boxed{\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}}$$

Ein genauerer Blick auf die obigen Rechnungen zeigt, dass das bestimmte Integral einer Funktion in einem Intervall $[a,b]$ als folgender Grenzwert definiert ist:

$$\sum f(x)\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

wobei Δx die Breite der Rechtecke bezeichnet. Auf der linken Seite steht also die Summe der Rechtecke, deren Höhe $f(x)$ ist, für einen hier nicht genauer spezifizierten Wert von x. Was bedeutet dies nun aber für den Fall, wo die Funktion unterhalb der x-Achse verläuft. Es stellt sich heraus, dass das Integral so, wie es definiert ist, nicht wirklich die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse berechnet. Ist nämlich das die Kurve unterhalb der x-Achse, so wird das Integral negativ, da die 'Höhen' der Rechtecke negativ sind. Das Integral ist also eine **orientierte** oder **signierte** Fläche, d.h., eine Fläche mit einem Vorzeichen. Es gibt nun mehrere Gründe, weshalb man die Definition nicht anpasst, so dass immer die Fläche als Resultat einer Integralberechnung herauskommt. Einer dieser Gründe ist, dass das Integral nicht nur für Flächenberechnungen verwendet wird und in anderen Situationen dieses Vorzeichen eine Rolle spielt. Ein weiterer Grund liegt in der Berechnung selber. Wie wir gesehen haben, ist dies sehr schwierig – auch für einfache Funktionen wie $y = x^2$. Wir werden nun eine Methode kennenlernen, die diese Berechnung erheblich vereinfacht. Auch für diese Methode, die wir in den nächsten Abschnitten erarbeiten, ist die hier gegebene Definition (mit Vorzeichen) Voraussetzung. Auf die Berechnung von Flächen kommen wir im nächsten Kapitel nochmals zurück.

1.2 Das unbestimmte Integral

Bevor wir uns nun mit der Berechnung von (bestimmten) Integralen auseinandersetzen, untersuchen wir eine auf den ersten Blick davon vollkommen unabhängige Fragestellung. Dazu führen wir folgenden zentralen Begriff ein.

Definition (Stammfunktion)

Eine Funktion $F(x)$ heisst **Stammfunktion** der Funktion $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Betrachten wir gleich ein Beispiel.

Beispiel. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + 2x$. Wir müssen nun also eine Funktion finden, deren Ableitung gerade f ist.
Mit etwas Übung erkennt man leicht, dass der erste Summand die Ableitung von $y = x^3$ und der zweite Summand die Ableitung von $y = x^2$. Da man summandenweise ableiten darf, muss dies auch für die Bestimmung der Stammfunktion gelten. Also können wir folgern, dass

$$F(x) = x^3 + x^2$$

eine Stammfunktion von f ist. Es ist wichtig, dass wir sagen '*eine* Stammfunktion', denn das F oben ist nicht die einzige Möglichkeit. Wenn wir nämlich eine Konstante zu F addieren, so ändert sich die Ableitung dadurch nicht. Es gilt somit zum Beispiel

$$G(x) = x^3 + x^2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad G'(x) = 3x^2 + 2x = f(x)$$

G ist also ebenso eine Stammfunktion von f.

Das obige Beispiel hat gezeigt, dass Stammfunktionen nicht eindeutig sind. Tatsächlich hat jede Funktion unendliche viele solche Stammfunktion, da man eine beliebige Konstante addieren kann. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich aber (auf jedem Intervall) nur durch eine Konstante.

Definition (Unbestimmtes Integral)

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann bezeichnet man

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

als **unbestimmtes Integral**. Dabei ist $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante, die sogenannte **Integrationskonstante**.

Im Gegensatz zum bestimmten Integral, welches eine Zahl ist, ist das unbestimmte Integral eine Menge von Funktionen. Die Schreibweise ist identisch bis auf die fehlenden Integrationsgrenzen. Dass man für zwei so unterschiedliche Konzepte die gleiche Schreibweise verwendet, liegt am Hauptsatz der Analysis, welcher einen sehr einfachen, aber wichtigen Zusammenhang zwischen den beiden Konzepten herstellt (siehe Kapitel 1.3).

Um die Beziehung zwischen einer Funktion und ihrem unbestimmten Integral nochmals hervorzuheben, betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel. Gesucht ist die Funktion f, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int f(x)\,dx = 2\sin(x)\cos(x) + C$$

Diese Gleichung besagt nach der Definition des unbestimmten Integrals, dass $F(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ eine Stammfunktion von f ist. Mit anderen Worten: f ist die Ableitung von F. Mit der Produktregel folgt nun also

$$F'(x) = 2\cos(x)\cos(x) + 2\sin(x)(-\sin(x)) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$f(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

Wesentlich schwieriger ist die umgekehrte Richtung. Es ist keineswegs klar, wie man aus $f(x)$ das unbestimmte Integral ermittelt. Wir beginnen diese Untersuchung mit einfacheren Beispielen.
Das unbestimmte Integral der wichtigsten Grundfunktionen kann man leicht aus den entsprechenden Formeln für die Ableitung herleiten:

1. $\displaystyle\int x\;dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
2. $\displaystyle\int x^n\;dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$, wobei $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3. $\displaystyle\int e^x\;dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\;dx = \ln(|x|) + C$
5. $\displaystyle\int \sin(x)\;dx = -\cos(x) + C$
6. $\displaystyle\int \cos(x)\;dx = \sin(x) + C$

Da das unbestimmte Integral auf der Umkehrung der Ableitung basiert, ist zu erwarten, dass es auch hier ähnlich zu den Ableitungsregeln Regeln gibt, welche es uns erlauben, Stammfunktionen komplizierterer Funktionen aus denjenigen der einzelnen Bausteine zusammenzusetzen. Eine erste solche Regel haben wir im Beispiel

$$f(x) = 3x^2 + 2x \qquad \Longrightarrow \qquad F(x) = x^3 + x^2$$

verwendet. Wir haben nämlich die Stammfunktion summandenweise bestimmt. Dies ist nochmals allgemein als zweite der beiden folgenden Regeln formuliert:

a) Konstantenregel:

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

b) Summenregel:

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Mit diesen beiden Regeln können wir nun das unbestimmte Integral aller Polynome bestimmen.

Beispiel. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$. Dann gilt mit der Konstanten- und Summenregel

$$\int f(x)\,dx = \int x^4\,dx - 3\int x^3\,dx + \int x\,dx - \int 1\,dx$$

Mit der Formel für das unbestimmte Integral von Potenzfunktionen folgt dann unmittelbar

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Allgemein gestaltet sich die Situation bei der Integration wesentlich schwieriger, als dies beim Ableiten der Fall ist. Dort haben wir mit der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel alles, was wir brauchen, um alle aus den Grundfunktionen zusammengesetzten Funktionen ableiten zu können. Bei der Integration gibt es zwar zum Teil auch analoge Regeln, es ist aber nicht immer klar, welche Regel wann und wie angewendet werden muss und ob man damit auch wirklich ans Ziel gelangt. In diesem Kurs werden wir später noch zwei solche Integrationsmethoden kennenlernen:

- partielle Integration (Kapitel 3)
- Substitution (Kapitel 4)

1.3 Der Hauptsatz der Analysis

In diesem Abschnitt wird es nun also darum gehen, die beiden Konzepte, die in den vorherigen Abschnitten diskutiert wurden, zusammenzuführen. Das bestimmte Integral wurde motiviert durch die Frage nach der Flächenberechnung. Wir haben gesehen, dass das bestimmte Integral aber vielmehr die orientierte Fläche zwischen der dem Graphen der Funktion und der x-Achse darstellt. Wir haben aber auch gesehen, wie aufwändig und auch schwierig die Berechnung dieses Integrals ist. Das unbestimmte Integral auf der anderen Seite ist die Menge aller Stammfunktionen der betrachteten Funktion.

Das einzige Beispiel eines bestimmten Integrals, welches wir berechnet haben, ist

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}$$

Wenn man sich nun die rechte Seite genau betrachtet, so stellt man fest, dass dies gerade eine Stammfunktion von x^2 ist, ausgewertet an der Stelle b. Dies ist ein Spezialfall des folgenden zentralen Resultats.

Theorem (Hauptsatz der Analysis)

Sind f eine Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist, und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Für die rechte Seite dieser Gleichung schreibt man auch abkürzend

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Es spielt in dieser Formel keine Rolle, welche Stammfunktion man verwendet. Denn diese unterscheiden sich höchstens um eine Konstante. Ist nun also $G(x) = F(x) + C$ für eine fest gewählte Konstante C, so folgt

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Das zeigt, dass die rechte Seite der Formel für jede Stammfunktion gleich ist. Verwenden wir also Stammfunktionen für die Auswertung von bestimmten Integralen, können wir immer $C = 0$ wählen und müssen uns somit nicht um die Integrationskonstante kümmern. Es gibt aber Situationen, in welchen diesen eine wichtige Rolle zukommt (zum Beispiel beim Lösen von Differenzialgleichungen, worauf wir hier aber nicht eingehen).

Beispiel. Seien $f(x) = x^3$ und $a = 3$, sowie $b = 5$. Dann folgt mit dem Hauptsatz

$$\int_3^5 x^3 \, dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_3^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

Bemerkung. Verläuft die Funktion f unterhalb der x-Achse, so bedeutet dies, dass die Ableitung ihrer Stammfunktion F negativ ist (wegen $F' = f$). Daraus folgt nun aber, dass die Funktion F fallend ist, d.h., $F(a) > F(b)$. Der Hauptsatz impliziert also

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) < 0$$

Dies zeigt, dass das Integral einer Funktion mit dem Graphen unterhalb der x-Achse negativ ist. Wollen wir also Integral mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen, ist es zwingend, dass wir das Integral nicht als Fläche, sondern als orientierte Fläche (mit Vorzeichen) definieren.

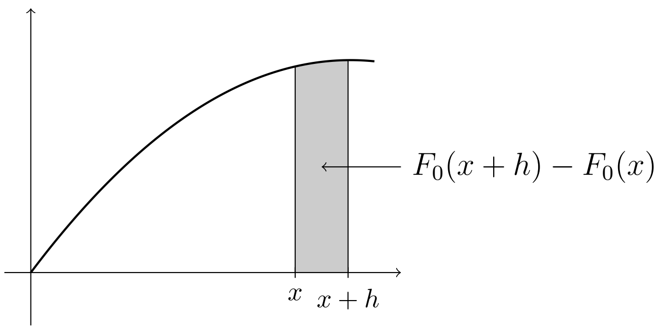
Zum Abschluss dieses Kapitels skizzieren wir einen Beweis des Hauptsatzes. Dazu betrachten wir nun die Funktion

$$F_0(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

Die Wahl der unteren Grenze ist willkürlich, eine andere Wahl führt lediglich auf eine andere Stammfunktion. Da wir aber schon gesehen haben, dass die Wahl der Stammfunktion im Hauptsatz keine Rolle spielt, ist unsere Wahl keine Einschränkung. (f muss aber natürlich in 0 definiert sein. Sonst müssen wir eine andere untere Grenze wählen.)
Wir wollen zeigen, dass F_0 eine Stammfunktion von f ist. Um dies zu sehen, bilden wir den Differenzenquotienten

$$\frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t) \, dt \approx f(x)$$

Der letzte Schritt folgt aus der geometrischen Beobachtung, dass der Differenzenquotient die Fläche des grauen Stücks (in der Figur) geteilt durch die Grundseite h ist. Da das graue Stück für kleine h annähernd ein Rechteck ist, ist Fläche geteilt durch Grundseite gleich der Höhe, d.h. $f(x)$. Je schmaler der graue Streifen wird, desto mehr wird er zum Rechteck. Im Grenzwert (für $h \to 0$) erhalten wir Gleichheit.



Daraus folgt nun aber

$$F_0'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = f(x)$$

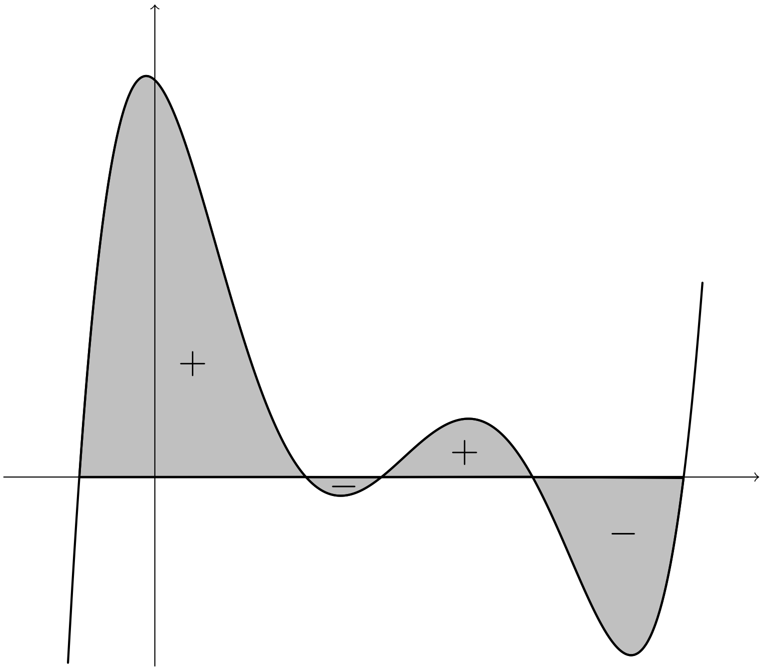
Also ist F_0 eine Stammfunktion von f. Andererseits gilt,

$$F_0(b) - F_0(a) = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

was die Formel zeigt.

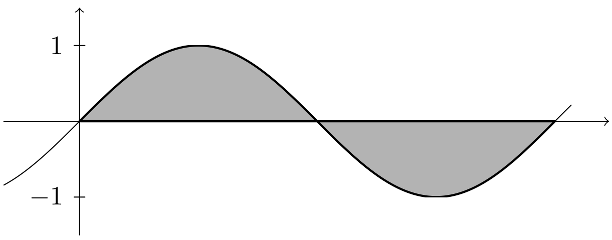
2 Flächenberechnungen

In diesem Kapitel kommen wir nochmals auf die ursprüngliche Motivation für die Integralrechnung, die Berechnung von Flächen, zurück. Wie wir gesehen haben, entspricht das Integral dem orientierten Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion im betrachteten Intervall. Das bedeutet, dass Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden (denn bei der Berechnung der jeweiligen Ober- und Untersumme wird die Intervalllänge (positiv) mit dem Funktionswert (negativ!) multipliziert).



Wollen wir also den Flächeninhalt berechnen, so können wir das nicht mit einem einzigen Integral tun, da sich dann die positiv und die negativ gezählten Flächen teilweise aufheben.

Beispiel. Wir wollen die Fläche zwischen dem Graphen von $\sin(x)$ und der x-Achse zwischen 0 und 2π berechnen:



Berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0\,,$$

entspricht dies wie erwartet nicht der Fläche. Die Fläche oberhalb der x-Achse und diejenige unterhalb der x-Achse heben sich gegenseitig auf.

Um die Fläche zu berechnen, müssen wir daher zwei Integrale berechnen, jeweils von einer Nullstelle bis zur nächsten. Das erste Integral (von 0 bis π) entspricht gerade dem linken Flächenstück. Das zweite Integral (von π bis 2π) hingegen entspricht minus dem rechten Flächenstück. Daher folgt

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

Das zweite Integral wird subtrahiert, da sein Wert negativ ist. Alternativ könnte man auch den Betrag des zweiten Integrals addieren, was natürlich auf dasselbe Resultat führt. Schliesslich erhält man

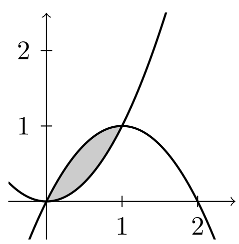
$$A = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4.$$

Für die Berechnung einer Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen einer Funktion eingeschlossen wird, können wir somit folgendes Vorgehen notieren:

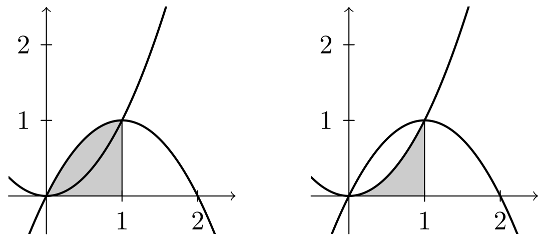
1. Man berechnet die Nullstellen der Funktion.
2. Man integriert von Nullstelle zu Nullstelle. Dabei wird das Integral negativ, wenn der Graph unter der x-Achse verläuft. Die Fläche ist dann der entsprechende positive Wert.
3. Man addiert schliesslich die verschiedenen Flächeninhalte, um so die Gesamtfläche zu erhalten.

Unsere bisherige Untersuchung konzentrierte sich auf die Berechnung von Flächen zwischen der x-Achse und einem Graphen. Von da ist es nur noch ein kleiner Schritt zur Berechnung von Flächenstücken, die von zwei Graphen eingeschlossen werden.

Beispiel. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 2x$. Gesucht ist die (endliche) Fläche, welche von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird (= graue Fläche in der Figur unten).



Dieses Gebiet kann als Differenz der beiden folgenden Flächen aufgefasst werden:



Die Fläche links ist das Integral von g von 0 bis 1, und die Fläche rechts ist das Integral von f von 0 bis 1. Damit berechnet sich die gesuchte Fläche als

$$\int_0^1 -x^2 + 2x\,dx - \int_0^1 -x^2 + 2x\,dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x) - x^2 dx = \int_0^1 -2x^2 + 2x\,dx$$

Dieses Integral kann man nun mit dem üblichen Vorgehen auswerten:

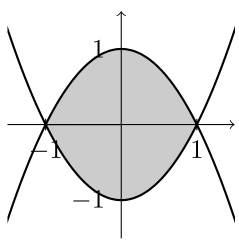
$$\int_0^1 -2x^2 + 2x\,dx = \frac{-2x^3}{3} + x^2 \Bigg|_0^1 = \left(\frac{-2}{3} + 1\right) - 0 = \frac{1}{3}$$

Im obigen Beispiel mussten wir ein Integral von der folgenden Form berechnen:

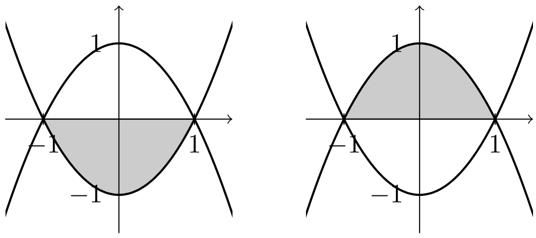
$$\int_0^1 g(x) - f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \text{obere Funktion} - \text{untere Funktion}\,dx$$

wobei x_1 und x_2 die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte sind. Führt diese Methode auch zum Ziel, wenn eine Funktion (oder beide) unterhalb der x-Achse verläuft (oder die x-Achse kreuzt)? Die Antwort ist ja. Das folgende Beispiel illustriert dies. Es stellt sich heraus, dass die x-Achse bei diese Rechnung überhaupt keine Rolle spielt. Sie wird durch die untere Funktion ersetzt. Tatsächlich kann die x-Achse als Graph der konstanten Funktion $f(x) = 0$ aufgefasst werden, so dass auch der Fall einer Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen als Spezialfall dieser allgemeinen Regel (obere minus untere Funktion) gesehen werden kann.

Beispiel. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -x^2 + 1$. Gesucht ist die (endliche) Fläche zwischen den Graphen von f und g (= graue Fläche in der Figur unten).



Diese Fläche ist die Summe der beiden Gebiete unten:



Die Fläche links ist **minus** das Integral von f von -1 bis 1. Das Minuszeichen ist eine Folge der Tatsache, dass das Integral selbst schon negativ ist, da das Gebiet unter der x-Achse liegt. Mit einem zusätzlichen Minus wird der ganze Ausdruck also wieder positiv. Die Fläche rechts ist hingegen gerade das Integral von g von -1 bis 1. Die gesuchte Fläche ist somit

$$\int_{-1}^{1} -x^2+1\,dx - \int_{-1}^{1} x^2-1\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2+1)-(x^2-1)dx$$

Dies ist wiederum ein Integral der Form obere Funktion minus untere Funktion! Der Rest der Rechnung ist nun wie schon mehrfach gesehen.

$$A = \int_{-1}^{1} -2x^2+2\,dx = \frac{-2x^3}{3}+2x\,\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{-2\cdot 1^3}{3}+2\right) - \left(\frac{-2\cdot(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)\right) = \frac{8}{3}$$

Wir können nun diese Idee dahingehend verallgemeinern, dass wir auch Situationen mitberücksichtigen, in welchen zwei Graphen mehrere Schnittpunkte haben. Wie im Falle vom mehreren Nullstellen muss die Gesamtfläche in mehrere Teile unterteilt werden.

Das Vorgehen ist also:

1. Man berechnet die Schnittpunkte der beiden Funktionen.
2. Man integriert von Schnittpunkt zu Schnittpunkt. Die Fläche entspricht dabei jeweils dem Integral der oberen minus der unteren Funktion.
3. Man addiert schliesslich die verschiedenen Flächeninhalte, um so die Gesamtfläche zu erhalten.

Zum Abschluss des Kapitels folgt noch ein Beispiel, das dieses Vorgehen illustriert.

Beispiel. Gesucht ist die (endliche) Fläche, die von den Funktionen $f(x) = x^2 - 9$ und $g(x) = x^3 - 9x$ eingeschlossen wird.

1. Wir berechnen zuerst die (x-Koordinaten der) Schnittpunkte:

$$x^2-9 = x^3-9x \quad\Longrightarrow\quad 0 = x^3-x^2-9x+9 \quad\Longrightarrow\quad x_1=-3, x_2=1, x_3=3$$

2. Wir müssen also zwei Integrale berechnen:

$$\int_{-3}^{1} (x^3 - 9x) - (x^2 - 9)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{1}^{3} (x^2 - 9) - (x^3 - 9x)\, dx$$

Wie wissen wir, welche Funktion die obere und welche die untere ist? Wir können einfach einen Punkt einsetzen und die Funktionswerte vergleichen. Zwischen zwei Schnittpunkten ändert sich die Rolle von oberer und unterer Funktion nicht. Im Intervall $[-3, 1]$ erhalten wir $f(0) = -9$ und $g(x) = 0$. Damit ist in diesem Intervall g die obere Funktion. Es ist allerdings nicht wirklich wichtig zu wissen, welches die obere Funktion ist. Im schlimmsten Fall bekommen wir statt der Fläche die Fläche mit einem Minus davor. Dieses Vorzeichen können wir dann im Weiteren einfach weglassen.

Wir überspringen die detaillierten Berechnungen. Die Werte der Integrale sind:

$$\int_{-3}^{1} x^3 - x^2 - 9x + 9\, dx = \frac{128}{3} \quad \text{und} \quad \int_{1}^{3} -x^3 + x^2 + 9x - 9\, dx = \frac{20}{3}$$

3. Schliesslich ist die gesuchte Fläche:

$$A = \frac{128}{3} + \frac{20}{3} = \frac{148}{3}$$

3 Partielle Integration

Im ersten Kapitel haben wir gesehen, dass Integrale mittels der Stammfunktion berechnet werden können. So gesehen sind Integrieren und Ableiten zwei einander entgegengesetzte Operationen. Da ist auch zu erwarten, dass es den Ableitungsregeln entsprechende Integrationsregeln gibt. In diesem Kapitel betrachten wir eine Integrationsmethode, welche der Produktregel für Ableitungen entspricht, die **partielle Integration**. Die Formel der Produktregel ist

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

respektive, etwas umgeformt,

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g.$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir

$$\int f \cdot g' \, dx = \int (f \cdot g)' \, dx - \int f' \cdot g \, dx$$

Da $\int h' \, dx = h + C$ für jede Funktion h, entspricht dies

$$\boxed{\int f \cdot g' \; dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \; dx \; (+C)}$$

Man erkennt unmittelbar, dass auf beiden Seiten der Formel ein Integral steht. Das bedeutet, dass mit der partiellen Integration ein Integral nicht direkt berechnet werden kann. Vielmehr erhält man dadurch ein anderes Integral, das dann hoffentlich einfacher zu berechnen ist.

Die zu integrierende Funktion muss also ausgedrückt werden können als Produkt zweier Funktionen $f(x) \cdot g'(x)$. Bei der partiellen Integration muss ein Faktor des Produkts, g', integriert werden, während der andere Faktor f abgeleitet wird. Daher kommt auch der Name der Methode, 'teilweises' Integrieren.

Diese Regel gilt sowohl für unbestimmte als auch für bestimmte Integrale. In solchen Formeln wird die Konstante C häufig weggelassen, da sie in den unbestimmten Integralen absorbiert werden kann. Überhaupt muss man mit Formeln, die unbestimmte Integrale enthalten, vorsichtig sein. Die Version für bestimmte Integrale nimmt folgende Form an:

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' \; dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g \; dx}$$

Wir illustrieren das Vorgehen mit einigen Beispielen.

Beispiel. Um $\int x \cos(x)\, dx$ zu bestimmen, wählen wir die Funktionen:

$$f(x) = x \quad \text{und} \quad g'(x) = \cos(x)$$

Das heisst, $f(x) = x$ wird bei der partiellen Integration abgeleitet, während $g'(x) = \cos(x)$ integriert wird. Der Grund für diese Wahl liegt darin, dass bei $\cos(x)$ der Unterschied zwischen Ableiten und Integrieren lediglich im Vorzeichen liegt. Der erste Faktor hingegen wird durch die Ableitung einfacher und durch Integration komplizierter. Daher ist die oben aufgeführte Wahl vielversprechender. Die Formel besagt dann:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x)\, dx &= \int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\, dx \end{aligned}$$

Das Integral, das noch übrig bleibt, ist nun tatsächlich einfacher als das ursprüngliche Integral. So erhalten wir schliesslich

$$\int x \cos(x)\, dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\, dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

In diesem ersten Beispiel war die Wahl, welcher Faktor abgeleitet und welcher integriert wird, nahe liegend. Grundsätzlich muss man versuchen, das Integral zu vereinfachen. Bei trigonometrischen oder Exponentialfunktionen spielt es nicht so eine Rolle, ob man integriert oder ableitet, während der Exponent einer Potenzfunktion durch Integration grösser und durch Ableiten kleiner (und die Potenzfunktion somit einfacher) wird.
Im nächsten Beispiel es ist egal, welcher Faktor abgeleitet und welcher integriert wird. Dafür taucht ein anderes Problem auf, welches typisch für Integrale mit trigonometrischen Funktionen ist.

Beispiel. Gesucht ist das Integral $\int \sin(x)\cos(x)\, dx$. Wir wählen:

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad g'(x) = \cos(x)$$

Mit der Formel für die partielle Integration folgt:

$$\int \sin(x)\cos(x)\, dx = \sin(x) \cdot \sin(x) - \int \cos(x)\sin(x)\, dx = \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\, dx$$

Nun fällt auf, dass das Integral ganz rechts dasselbe Integral ist wie das ursprüngliche Integral. Wir haben scheinbar also nichts gewonnen durch die partielle Integration. Dies geschieht immer wieder, wenn Produkte von trigonometrischen und/oder Exponentialfunktionen mittels partieller Integration berechnen möchte. Dies bedeutet aber nicht, dass die Methode nicht taugt. Was wir nämlich erreicht haben, ist eine Gleichung für das gesuchte Integral:

$$I = \int \sin(x)\cos(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad I = \sin^2(x) - I \quad \Longrightarrow \quad 2I = \sin^2(x)$$

Daraus folgt nun

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

Zum Abschluss dieses Kapitels folgt nun noch ein Beispiel eines bestimmten Integrals, das mittels partieller Integration berechnet wird.

Beispiel. Gesucht ist das Integral $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx$. Wir wählen:

$$g'(x) = x^2 \quad \text{und} \quad f(x) = \ln(x)$$

Diese Wahl ist sehr nahe liegend, da die Stammfunktionen von $\ln(x)$ mit $x\ln(x) - x + C$ komplizierter sind (und immer noch $\ln(x)$ enthalten). Mit der Formel der partiellen Integration für bestimmte Integrale folgt dann:

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x)\,\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}e^3 - \int_1^e \frac{1}{3}x^2\,dx\,,$$

wobei wir $\ln(e) = 1$ und $\ln(1) = 0$ verwendet haben. Das Integral ganz rechts ist nun leicht:

$$\int_1^e \frac{1}{3}x^2\,dx = \frac{1}{9}x^3\,\Big|_1^e = \frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{9}$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}e^3 - \left(\frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9}e^3 - \frac{1}{9}$$

Wir haben die partielle Integration als eine Art Produktregel für Integrale eingeführt. Es muss aber erwähnt werden, dass die Situation im Vergleich zur Produktregel für Ableitungen komplizierter ist. Es ist bei schwierigeren Integralen nicht immer klar, wie die Methode angewendet werden kann und ob sie zum Ziel führt.

4 Integration durch Substitution

Die partielle Integration entsprach der Produktregel. Gibt es auch so etwas wie eine Kettenregel für Integrale? Tatsächlich gibt es eine Regel, die besonders geeignet ist, Integrale von verschachtelten Funktionen zu berechnen. Allerdings ist es – wie schon bei der partiellen Integration – so, dass diese Regel, die **Substitutionsregel**, nicht für jede verschachtelte Funktion zum Ziel führt.
Wie untersuchen die Idee an einem besonders einfachen Beispiel:

Beispiel. Wir möchten eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \sin(2x)$ finden. Anders ausgedrückt, möchten wir das unbestimmte Integral

$$\int \sin(2x)\, dx$$

berechnen. Ein erster Ansatz könnte sein, dass man einfach eine Stammfunktion von $\sin$ nimmt und dann $2x$ einsetzt:

$$\int \sin(2x)\, dx \stackrel{?}{=} -\cos(2x) + C$$

Wir können dies mittels Ableitung überprüfen. Dabei müssen wir die Kettenregel anwenden:

$$(\cos(2x))' = \sin(2x) \cdot 2$$

Also war unser obige Ansatz nicht ganz richtig. Wir können ihn aber ganz leicht korrigieren, wenn wir $\cos(2x)$ durch zwei dividieren:

$$\int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

Im obigen Beispiel konnten wir die Korrektur ganz leicht anbringen, da die innere Ableitung einfach der Faktor 2 war. Hätten wir hingegen folgendes Integral berechnen wollen

$$\int \sin(x^2)\, dx\,,$$

so wäre der gleiche naive Ansatz wie oben nicht so leicht zu korrigieren. Denn es gilt

$$\big(\cos(x^2)\big)' = \sin(x^2) \cdot 2x\,.$$

Den Faktor $2x$ kann man aber nicht wie beim ersten Beispiel den Faktor 2 einfach nachträglich korrigieren, da der Faktor $2x$ ja selbst mit integriert werden müsste.
Wenn die zu integrierende Funktion jedoch von der Form $f(g(x))g'(x)$ ist, das heisst, das Integral

hat folgende Form

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx\,,$$

dann können wir die Funktion $g(x)$ durch eine Variable u ersetzen und danach über u integrieren. Das folgende Beispiel illustriert, wie das geht.

Beispiel. Wir möchten die Funktion $x\sin(x^2)$ integrieren. Zuerst stellen wir fest, dass partielle Integration wohl eher nicht zum Ziel führt, da die Verschachtelung $\sin(x^2)$ dabei nicht einfach integriert werden kann (gerade das wollen wir ja mit der Substitution erreichen). Leitet man den Ausdruck hingegen ab, wird wegen der inneren Ableitung alles eher komplizierter als einfacher. Also machen wir folgenden Ansatz: $u = x^2$. Nun schreiben wir das Integral mit dieser Variablen auf:

$$\int x\sin(u)\,dx$$

Dies alleine hilft uns aber noch nicht weiter, denn nun haben wir zwei unterschiedliche Variablen mit x und u. Wir müssen nun also das ganze Integral nur mit Hilfe der Variablen u ausdrücken. Dazu müssen wir besser verstehen, wie sich dx verändert. Zuerst schreiben wir dazu die Ableitung von $u(x) = x^2$ auf:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad du = u'(x)dx = 2xdx\,,$$

wobei $\frac{du}{dx}$ einfach eine andere Schreibweise für die Ableitung von u nach x ist. Obschon diese Ausdruck nur ein Grenzwert von Brüchen (Differenzenquotienten) und nicht selbst ein Bruch ist, stellt sich heraus, dass man die Umformung oben trotzdem durchführen darf. Das Integral bekommt nun also die Form

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \int x\sin(u)\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{2}\cos(u) + C$$

Der entscheidende Schritt ist, dass sich die x-Terme weggekürzt haben. Geschieht dies nicht, so müssen diese ebenfalls durch u ausdrücken, was das Integral komplizierter macht. Die Variable u wurde nur eingeführt, um das schwierige Integral in ein einfacheres zu verwandeln. Das Resultat muss aber wieder durch x ausgedrückt werden:

$$\int x\sin(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

Wir können dieses Vorgehen allgemein fassen:

1. Suche eine Funktion, welche wir ersetzen wollen (üblicherweise die innere Funktion der Verschachtelung): $u = g(x)$.

2. Leite u nach x ab: $\frac{du}{dx} = g'(x)$, wobei $\frac{du}{dx}$ eine andere Schreibweise für die Ableitung von u

nach x ist. Löse diese Gleichung nach dx auf: $dx = \frac{du}{g'(x)}$.

3. Ersetze im Integral $g(x)$ durch u und dx durch $\frac{du}{g'(x)}$. Falls es ein bestimmtes Integral ist und Integrationsgrenzen a und b vorkommen, werden diese ersetzt durch $u(a)$ und $u(b)$ (siehe das nächste Beispiel).

4. Das $g'(x)$ sollte sich nun rauskürzen, so dass im Integral kein x mehr vorkommt. Passiert das nicht, können wir nicht Substitution anwenden oder wir müssen eine andere Substitution vornehmen.[1] Sonst weiter zum nächsten Schritt.

5. Es gilt nun:

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)\,dx &= \int f(u)du \\ \text{bzw.}\quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \end{aligned}}$$

   Das neue Integral entspricht also dem alten Integral.

6. Beim unbestimmten Integral müssen wir wieder $g(x)$ für u einsetzen, um die Lösung zu bekommen.

Bemerkung. Anstatt das bestimmte Integral mit Integrationsgrenzen direkt zu lösen, kann das Integral auch zuerst nur unbestimmt, das heisst ohne Integrationsgrenzen, betracht werden. Dann müssen nach dem Lösen des Integrals und der Rücksubstitution (u durch $g(x)$ ersetzen) noch die Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

Wir betrachten nun noch ein Beispiel mit einem bestimmten Integral.

Beispiel. Wir berechnen das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Dazu setzen wir $u = x + 1$ und erhalten $\frac{du}{dx} = 1$, also $du = dx$. Ausserdem gilt für die Grenzen

[1] Man kann auch die Variable x durch die neue Variable u ausdrücken, $x = g^{-1}(u)$. Dadurch wird das neue Integral durch die Substitution eher komplizierter als einfacher. In seltenen Fällen kann das trotzdem zielführend sein. Dies ist aber eher etwas für Fortgeschrittene und wird hier nicht vorkommen.

$u(0) = 1$ und $u(1) = 2$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\,u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Das nächste Beispiel haben wir bereits im Kapitel über die partielle Integration berechnet. Nun berechnen wir es nochmals mit Hilfe der Substititutionsregel.

Beispiel. Gesucht ist das Integral

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

Im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen ist hier keine Verschachtelung zu erkennen. Dennoch können wir eine Substitution verwenden:

$$u = \sin(x)\,,\; du = \cos(x)dx \qquad \Longrightarrow \qquad \int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

Mit der Rücksubstitution folgt dasselbe Resultat wie mit partieller Integration:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

Wir haben nun zwei Methoden kennengelernt, die der Produkt- bzw. der Kettenregel für Ableitungen entspricht. Gibt es auch so etwas wie eine Quotientenregel für Integrale. Es gibt zwar Methoden, die man für bestimmte Brüche verwenden kann (Partialbruchzerlegung), eine eigentliche Quotientenregel gibt es aber nicht. Vielmehr kann man die bisherigen Methoden, vor allem aber die Substitutionsregel bei vielen Brüchen verwenden. Wir illustrieren dies im folgenden Beispiel.

Beispiel. Wir möchten das folgende Integral berechnen.

$$\int \frac{1-x}{x^2-2x+2}\,dx$$

Die Idee ist nun folgende Substitution

$$u = x^2 - 2x + 2\,,\; du = 2x - 2dx \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1-x}{x^2-2x+2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

Im letzten Schritt haben wir dabei verwendet, dass $1 - x = -\frac{1}{2}(2x - 2)$. Dann folgt

$$\int \frac{1-x}{x^2 - 2x + 2}\, dx = -\frac{1}{2}\ln(|u|) = -\frac{1}{2}\ln(|x^2 - 2x + 2|) + C$$

Wie dieses Beispiel zeigt, ist das Ziel bei einem Bruch von Funktionen (insbesondere bei rationalen Funktionen) oftmals, mit einer Substitution eine Potenzfunktion (hier: u^{-1}) als Integranden zu erhalten. Es gibt auch andere Ansätze, die auf den inversen trigonometrischen Funktionen basieren. Wir gehen hier aber nicht weiter darauf ein.

Bemerkung. *Vergleich Partielle Integration $\leftrightarrow$ Substitution:*

Wann benutzen wir partielle Integration, wann die Substitution? Grundsätzlich können wir drei Punkte festhalten.

1. Finden wir im Integral eine Funktion einer Funktion, eine Verschachtelung also, d.h. so etwas wie $f(g(x))$? $\longrightarrow$ Substitution (d.h. $g(x)$ ersetzen)

2. Werden im Integral zwei Funktionen multipliziert, es kommen aber keine Funktionen in Funktionen vor? $\longrightarrow$ Partielle Integration

3. Ist das Integral nach Anwendung einer der Methoden komplizierter als vor dem Integrieren, dann wurde entweder die falsche Methode gewählt, oder es muss etwas anderes substituiert oder die partielle Integration anders angewendet werden.

Wie wir schon in einzelnen Beispielen gesehen haben, sind diese Regeln leider nicht so, dass man sie einfach blind anwenden kann. So muss man manchmal substituieren, auch wenn keine Verschachtelung vorliegt. Es braucht etwas Intuition, um jeweils die richtige Methode richtig auszuwählen... Mit etwas Übung klappt das aber schon. Einfach nicht aufgeben und ausprobieren.