Vorkurs UZH 2020

Mathematik Rechenfertigkeiten

Übungen Donnerstag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich
Erstellt von Dr. Irmgard Bühler (Überarbeitung: Dr. Dominik Tasnady)

August 2020

1 Kurvendiskussion I

1. Diskutieren Sie die Graphen (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Bild):

   a) $f(x) = x^2 - x - 2$ b) $g(x) = x^3 - x^2$ c) $h(x) = |x^2 + 9x - 36|$

2. Bestimmen Sie die Extrema (zeigen Sie zudem, ob es sich um Maxima oder Minima handelt):

   a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ c) $h(x) = x \cdot e^x$

3. Wo liegen bei nachfolgenden Funktionen die absoluten und die relativen Extrema im gegebenen Definitionsbereich $\mathbb{D}$?

   a) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $\mathbb{D} = [-3, 5]$ b) $g(t) = t(t-5)^2$, $\mathbb{D} = [0, 4]$

   c) $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $\mathbb{D} = (-1, 2)$ d) $j(x) = \cos(x)$, $\mathbb{D} = [-\pi, 12]$

4. Welche Polynomfunktion dritten Grades besitzt einen Graphen, der symmetrisch ist bezüglich dem Ursprung und im Punkt $(-2/-4)$ ein relatives Minimum annimmt?

5. Zeigen Sie, dass eine Polynomfunktion (vom Grad > 1), welche symmetrisch bezüglich dem Ursprung ist, im Ursprung einen Wendepunkt hat.

2 Kurvendiskussion II

1. Bestimmen Sie die folgenden Informationen zu den gegebenen Funktionen:

   (1) Definitionsbereich

   (2) Polstellen (Was passiert in den Definitionslücken?)

   (3) Nullstellen

   (4) asymptotisches Verhalten (d.h. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$)

   (5) Extrema

   Zeichnen Sie dann damit den Graphen auf.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x}$ c) $h(x) = \dfrac{5}{(2x+1)^2}$

   d) $j(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ e) $k(x) = x \cdot e^x$ f) $l(x) = e^{-x^2}$

2. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}_0$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{1-\cos(x)}$

   c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3}$

3 Optimierungsaufgaben

1. Zerlegen Sie eine reelle Zahl a so in zwei Summanden x und y, dass deren Produkt möglichst gross wird!

2. Ein Quader mit dem Volumen $V = 25$ cm^3 und der einen Kante $a = 4$ cm soll eine möglichst kleine Oberfläche haben. Wie lang sind die anderen Kanten?

3. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die gegebene Hypotenuse 4.

   a) Wie sind die fehlenden Seiten zu wählen, damit das Dreieck maximalen Umfang hat?

   b) Wie sind die fehlenden Seiten zu wählen, damit das Dreieck maximale Fläche hat?

4. Von einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen a und b wird an jeder Ecke ein Quadrat mit der Seitenlänge x weggeschnitten. Durch Auffalten der vorstehenden Rechtecke lässt sich aus dem Reststück eine oben offene Schachtel bilden. Für welches x hat die Schachtel maximales Volumen, wenn

   a) $a = b = 12$ cm　　b) $a = 15$ cm und $b = 24$ cm

5. Ein Stück Draht der Länge 1 wird in zwei Teile zerschnitten. Aus dem einen wird ein Quadrat, aus dem anderen ein Kreis geformt. Wie muss man schneiden, damit die Summe der Flächeninhalte der beiden Figuren

   a) minimal　　b) maximal

   wird?

6. Eine Strasse verläuft entlang dem Graphen von $y = x + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Wie weit von der Strasse ist das Haus $H(1/1)$ gelegen? (Einheit = km)

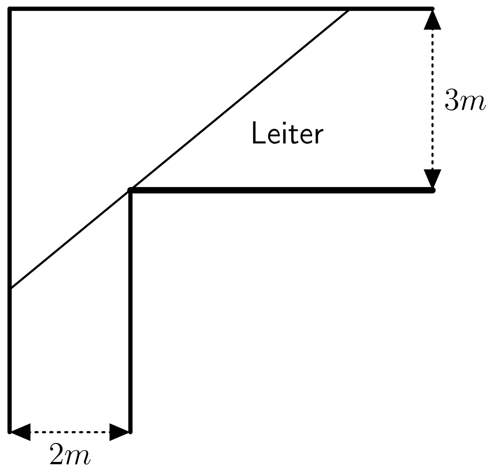
7. Ein einem Garten stehen 50 Apfelbäume, die jeweils 800 Äpfel pro Jahr tragen. Für jeden zusätzlichen Baum, der gepflanzt wird, nimmt die Anzahl Äpfel pro Jahr um 10 ab (weniger Platz, weniger Nährstoffe). Wie viele Bäume sollte man zusätzlich pflanzen, wenn man die jährliche Ausbeute maximieren will?

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$.

   a) Dem Graphen der Funktion f soll (in der oberen Hälfte des Koordinatensystems) ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze im Punkt $(0/0)$ einbeschrieben werden. Was ist die Höhe des Dreiecks, wenn der Flächeninhalt maximal ist?

   b) Der Graph von f wird um die y-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein Paraboloid. Diesem soll ein Kegel mit maximalem Volumen und Spitze im Punkt $(0/0)$ einbeschrieben werden (in der oberen Hälfte des Koordinatensystems). Bestimmen Sie den Radius dieses Zylinders.

9. Eine Leiter soll in einem Gang um die Ecke getragen werden. Wie lang darf die Leiter höchstens sein, damit sie Platz hat?



10. **'Maximum Likelihood' Schätzungen:** Man wirft einen unfairen Würfel n mal und wirft dabei m Mal eine Sechs. Aus diesem Ergebnis möchte man die Chance auf eine Sechs bei einmaligem Werfen schätzen. Ist diese Chance p, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Mal werfen m Sechsen zu werfen, gleich
$$\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$
(die *Binomische Verteilung*). Bestimmen Sie p so, dass diese Wahrscheinlichkeit am grössten ist.