Vorkurs UZH 2018

Mathematik Rechenfertigkeiten

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, UZH

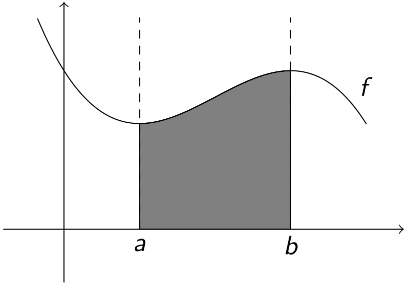
10. August 2018

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

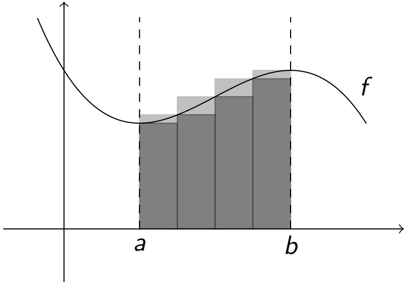
Grundfrage der Integralrechnung

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$, welche überall ≥ 0 ist. Wie gross ist die Fläche, welche zwischen dem Graphen der Funktion und der x–Achse sowie den vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$ liegt?



Aus krumm mach eckig

Wir teilen diese Fläche in n Stücke auf, und zwar so, dass wir sie einerseits von unten und andererseits von oben approximieren:



Notationen

Wir brauchen fogende Bezeichnungen:

Innere Treppenfläche U_n:	Die dunkel schattierte Fläche
Äussere Treppenfläche O_n:	Die dunkel plus die hell schattierte Fläche

Wieder einmal ein Grenzwert

Unterteilen wir nun die Fläche in immer kleinere Stücke, so wird die Approximation immer besser. Anders gesagt, bekommen wir den korrekten Flächeninhalt, sobald wir $n \to \infty$ laufen lassen.

Definition

Falls

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n,$$

wird dieser Limes als *bestimmtes Integral* bezeichnet, und wir schreiben

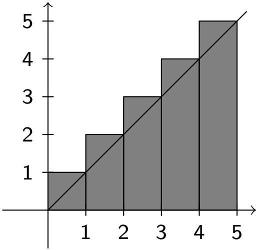
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

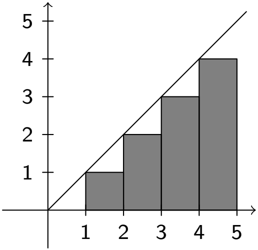
Für eine positive Funktion entspricht also das Integral gerade der Fläche unter der Kurve.

Integration auf die harte Tour

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$ und wollen die Fläche von 0 bis zu einer Zahl b berechnen.

Wir unterteilen dazu die Fläche zuerst wieder in n Teile und approximieren sie von oben sowie von unten.





Viele Rechtecke

Wir erhalten für die äussere Treppenfläche

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right) + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n}\right) + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{3b}{n}\right) + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{nb}{n}\right) \\ &= \frac{b}{n} \cdot \left(\left(\frac{b}{n}\right) + \left(\frac{2b}{n}\right) + \left(\frac{3b}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{nb}{n}\right)\right) \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \end{aligned}$$

Problem: Der erste Faktor wird immer kleiner, der zweite immer grösser für $n \to \infty$. Was nun?

Deus ex machina

Die arithmetische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{b^2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{b^2}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) \\ &= b^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} b^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{b^2}{2}.$$

Ebenso die Untersumme

Auf die gleiche Art und Weise erhalten wir für die innere Treppenfläche und die zwei Grenzwerte stimmen überein, und somit erhalten wir

$$\boxed{\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}.}$$

Das unbestimmte Integral

Definition

Eine Funktion $F(x)$ heisst *Stammfunktion* der Funktion $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann bezeichnet man

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

als *unbestimmtes Integral*. Dabei ist $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante, die sogenannte *Integrationskonstante*.

Die Bausteine und die Zusammensetzregeln

Es reicht aus, die Integrale von ein paar wichtigen Funktionen zu kennen, um integrieren zu können. Zusammen mit den Eigenschaften der Integration sowie wie mit den Methoden

- partielle Integration
- Substitution

können wir sehr viele Integrale berechnen. Es gibt jedoch Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht als eine geschlossene Funktionsgleichung bestimmen lassen.

Einige wichtige Integrale

1. $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
2. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$, wobei $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$
5. $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
6. $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

Eigenschaften

Konstantenregel:

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

Summenregel:

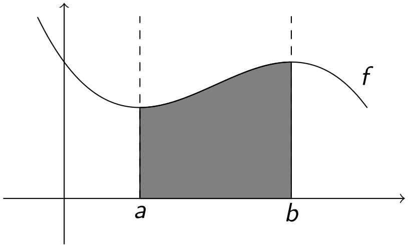
$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Das bestimmte Integral

Wir haben gesehen, dass das *bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

die Fläche zwischen dem Graphen der *positiven* Funktion $f(x)$ und der x-Achse zwischen den *Integrationsgrenzen* a und b angibt. Im Unterschied zum unbestimmten Integral ist dies eine Zahl, keine Funktion.



Zusätzliche Eigenschaften

Für $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Der Hauptsatz der Analysis

Was ist der Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral?

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

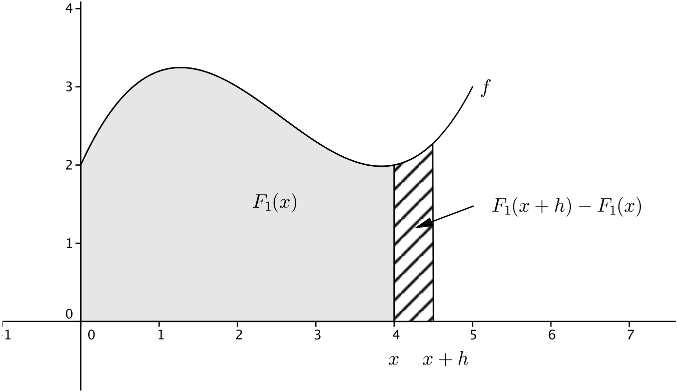
Wir schreiben auch

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b}$$

Ein Beispiel

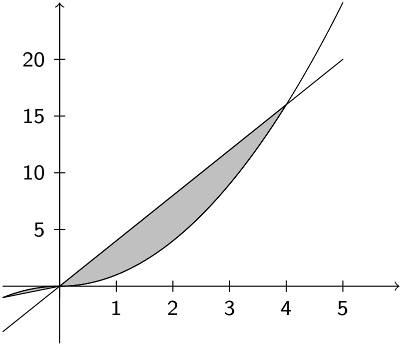
$$\int_0^1 2x^3 + e^x - \cos(x)\ dx$$

Der Hauptsatz – Beweisidee



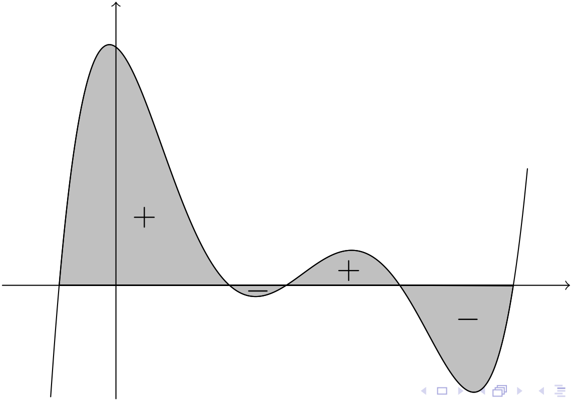
Die Fläche zwischen zwei Kurven – ein Beispiel

Gesucht ist die (endliche) Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4x$.



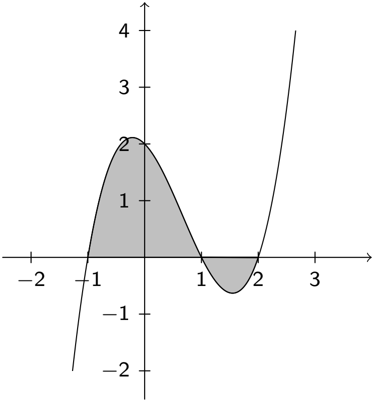
Das Integral – ein orientierter Flächeninhalt

Flächen unterhalb der x–Achse werden negativ gezählt (denn bei der Berechnung der jeweiligen Ober- und Untersumme wird die Intervalllänge (positiv) mit dem Funktionswert (negativ!) multipliziert).



Ein Beispiel

Wir wollen die (endliche) Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ und der x-Achse berechnen.



Inhaltsverzeichnis

Partielle Integration – Produktregel für Integrale

Erinnerung: Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g.$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir

$$\int f \cdot g' \, dx = \int (f \cdot g)' \, dx - \int f' \cdot g \, dx$$

Da $\int h' \, dx = h + C$ für jede Funktion h, entspricht dies

$$\boxed{\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx}$$

Partielle Integration für bestimmte Integrale

Bei bestimmten Integralen kommen noch die Integrationsgrenzen ins Spiel.

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' \; dx = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g \; dx}$$

Ein paar Beispiele

1) $\int x \sin(x)\, dx$

2) $\int \ln(x)\, dx$

3) $\int \cos^2(x)\, dx$

4) $\int x^2 e^{-x}\, dx$

5) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\, dx$

Inhaltsverzeichnis

Integration durch Substitution – Kettenregel für Integrale

Wenn die zu integrierende Funktion von der Form $f(g(x))g'(x)$ ist, das heisst, das Integral hat folgende Form

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx\ ,$$

dann können wir die Funktion $g(x)$ durch eine Variable u ersetzen und danach über u integrieren. Nicht immer ist diese Form einfach abzulesen.

Das Vorgehen

(i) Wähle die Substitution: $u = g(x)$.

(ii) Berechne: $du = g'(x)dx$.

(iii) Führe die Substitution durch:

$$\begin{aligned} g(x) &\quad \longleftrightarrow \quad u \\ dx &\quad \longleftrightarrow \quad \frac{du}{g'(x)} \\ a, b &\quad \longleftrightarrow \quad u(a), u(b) \end{aligned}$$

(v) Das $g'(x)$ sollte sich nun rauskürzen, so dass im Integral kein x mehr vorkommt.

(vi) Es gilt nun:

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx & = & \displaystyle\int f(u)du \\[2ex] \text{bzw.} & \displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx & = & \displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \end{array}}$$

(vii) Beim unbestimmten Integral müssen wir wieder $g(x)$ für u einsetzen, um die Lösung zu bekommen.

Ein paar Beispiele

1) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}\,dx$

4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2}\,dx$

Partielle Integration oder Substitution?

1. Finden wir im Integral eine Funktion einer Funktion? Also so etwas wie $f(g(x))$?
   $\longrightarrow$ Substitution (d.h. $g(x)$ ersetzen)
2. Werden im Integral zwei Funktionen multipliziert, es kommen aber keine Funktionen in Funktionen vor? $\longrightarrow$ Partielle Integration
3. Ist das Integral nach Anwendung einer der Methode komplizierter als vor dem integrieren, dann wurde entweder die falsche Methode gewählt, oder es muss etwas anderes substituiert oder die partielle Integration anders angewendet werden.

Beispiel

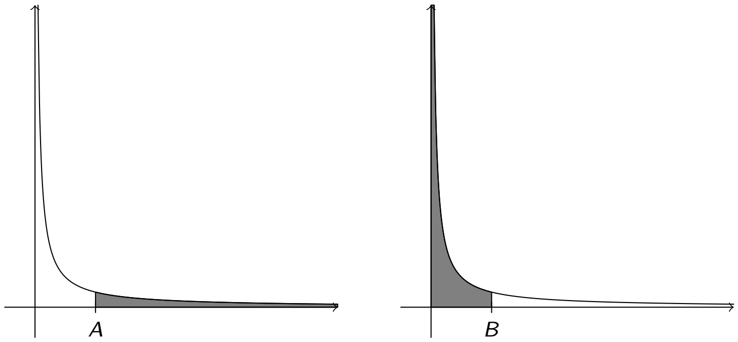
Wann soll welche Methode wie angewendet werden? Ein paar Beispiele:

Funktion	Methode	Was wird wie ersetzt?
$\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6})$		
$t \cdot \cos(t)$		
$e^y \cos(y)$		

Inhaltsverzeichnis

Unendliche Flächen

Fragestellung: Kann man eine nicht beschränkte Fläche berechnen? Was passiert, wenn die Integrationsgrenzen unendlich oder Polstellen der Funktion sind?



Fall 1: $[A, \infty[$

Wenn

$$\lim_{N\to\infty} \int_A^N f(x)\,dx$$

existiert, dann nennt man dies ein *uneigentliches Integral* und schreibt:

$$\boxed{\int_A^\infty f(x)\,dx}$$

Ein Beispiel: $\int_0^\infty \frac{x}{e^x}\, dx$

Wir lösen das Integral $\displaystyle\int_0^N xe^{-x}\, dx$ mit partieller Integration:

$$f(x) = x \qquad g'(x) = e^{-x}$$
$$f'(x) = 1 \qquad g(x) = -e^{-x}$$

$$\int_0^N xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^N + \int_0^N e^{-x}\, dx = -e^{-N}(N+1) + 1$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^\infty xe^{-x}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N xe^{-x}\, dx = 1.$$

Fall 2: Polstellen

Kann man die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf einem Intervall messen, welches eine Polstelle bei A beinhaltet?

Sei A eine Polstelle von f. Wenn

$$\lim_{\alpha \to A} \int_{\alpha}^{B} f(x)\, dx$$

existiert, dann existiert das uneigentliche Integral:

$$\boxed{\int_{A}^{B} f(x)\, dx}$$

Beispiel

Betrachte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$. Da

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

und $\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} = 0$, folgt, dass $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$ existiert.

Beispiel

Betrachte $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\, dx$. Da

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\Big|_\varepsilon^1 = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \to \infty \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0,$$

existiert $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ nicht.