# Vorkurs UZH 2018

# Mathematik Rechenfertigkeiten

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, UZH

9. August 2018

# Inhaltsverzeichnis

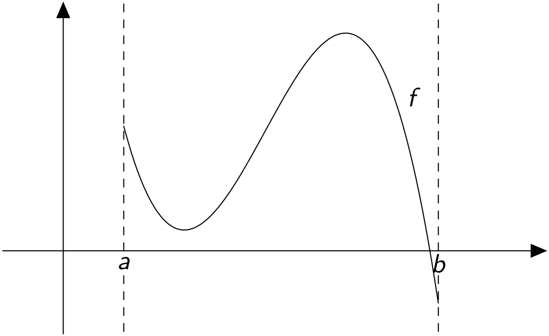
# Inhaltsverzeichnis

# Maxima und Minima

Wie sieht die Kurve einer gegebenen Funktion $f(x)$ aus?

1. Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Gleichungen lösen
2. Minima und Maxima

Wie berechnet man die Minima, respektive die Maxima?




Wo liegen die Maxima und Minima? Gibt es unterschiedliche Typen von Maxima respektive Minima?

# Absolut oder relativ?

## Definition

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| absolutes Maximum $x_{max}$ | : | $f(x_{max})$ | $\geq$ | $f(x)$ | für alle $x \in \mathbb{D}$ |
| absolutes Minimum $x_{min}$ | : | $f(x_{min})$ | $\leq$ | $f(x)$ | für alle $x \in \mathbb{D}$ |
| relatives Maximum $x_{max}$ | : | $f(x_{max})$ | $\geq$ | $f(x)$ | für alle $x \in I$ |
| relatives Minimum $x_{min}$ | : | $f(x_{min})$ | $\leq$ | $f(x)$ | für alle $x \in I$ |

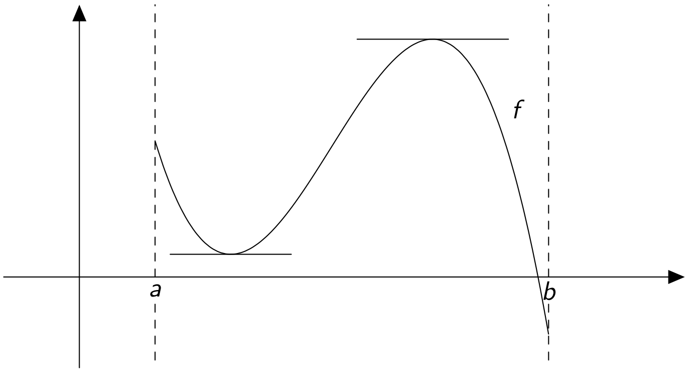
Minima und Maxima werden zusammen auch als *Extrema* oder *Extremalwerte* bezeichnet.

# Ein notwendiges Kriterium

**Satz**

*Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann kann $f$ nur Extremalwerte haben*

1. *an den Randpunkten $a$ und $b$ oder*
2. *falls $f'(x) = 0$.*


f
a
b

# $f' = 0$ – und jetzt?

Bei den Extrema ist die Steigung der Funktion gleich Null.

$$x_e \text{ Extremum der Funktion } f \quad \Rightarrow \quad f'(x_e) = 0.$$

Wie bestimmen wir nun aber, ob $x_e$ ein Maximum oder ein Minimum ist?

# Ein hinreichendes Kriterium

Ist $x_e$ ein Extremum von $f$, also $f'(x_e) = 0$. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f''(x_e) > 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Minimum} \\ f''(x_e) < 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Maximum} \end{array}}$$

Falls $f''(x_e) = 0$ gilt, können wir keine definitive Aussage machen.

# Kochrezept

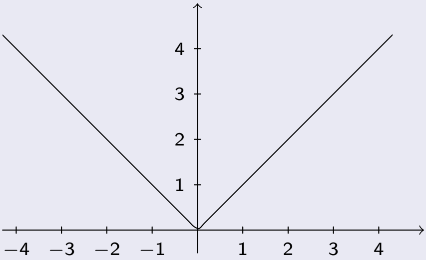
Wir gehen also wie folgt vor, um die Extrema von $f$ zu finden:

1. Berechne $f(a)$ und $f(b)$.
2. Löse $f'(x) = 0$ in $(a, b)$.
3. Berechne die zweite Ableitung $f''(x)$ und setze jede Nullstelle $x_e$ von $f'$ in $f''$ ein. $\Longrightarrow$ Maximum/Minimum/Sattelpunkt
4. Berechne alle Funktionswerte an den Stellen $x_e$, das heisst alle $f(x_e)$.
5. Vergleiche alle gefundenen Maxima und Minima in $(a, b)$ miteinander sowie mit den Werten $f(a)$ und $f(b)$ $\Longrightarrow$ relativ/absolut

# Vorsicht bei Ecken!

## Bemerkung

Dieses Vorgehen funktioniert nur, wenn die Funktion überall differenzierbar ist. So hat beispielsweise die Betragsfunktion in 0 ein absolutes Minimum, ist dort aber nicht differenzierbar (“Ecke“), also kann die Ableitung insbesondere nicht 0 sein.



# Ein Anwendungsbeispiel

$N(t)$ = Anzahl Personen, die zum Zeitpunkt $t$ (in Tagen) die Grippe haben (in 100).

$$N(t) = -\frac{1}{250}t^3 + \frac{1}{10}t^2.$$

(a) Wie viele Personen sind am 10. Tag der Epidemie krank?

$$N(10) = -\frac{1}{250}10^3 + \frac{1}{10}10^2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 600\,\text{Personen}$$

(b) Wann ist die Epidemie vorbei?

$$N(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 0\,,\ t_2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad \text{nach 25 Tagen}$$

(c) An welchem Tag ist die Anzahl Kranker maximal. Wie viele sind dann krank?

$$N'(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{3}{250}t^2 + \frac{1}{5}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 0\,,\ t_2 = 16.\bar{6}$$

$$N''(t) = -\frac{3}{125}t + \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad N''(t_1) > 0\,,\ N''(t_2) < 0$$

Also ist die Anzahl Kranker am 17.Tag maximal. $N(16.\bar{6}) = 9.26$. Es sind dann also 926 krank.

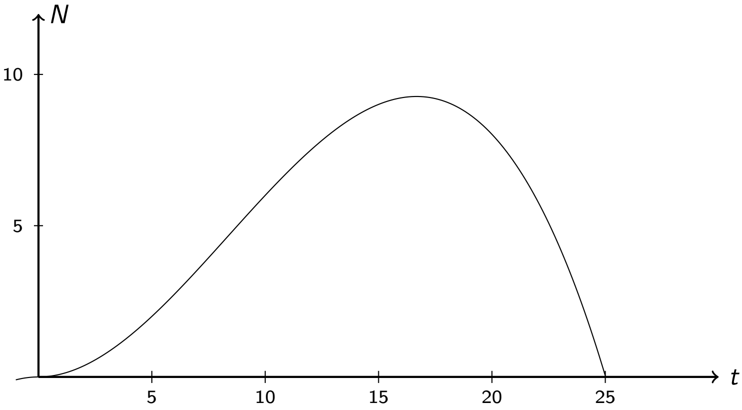
(d) An welchem Tag ist Zuwachsrate der Kranken maximal?

$$N''(t) = -\frac{3}{125}t + \frac{1}{5} = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 8.\bar{3}$$

Die Zuwachsrate ist am 9.Tag maximal. Der Zuwachs ist

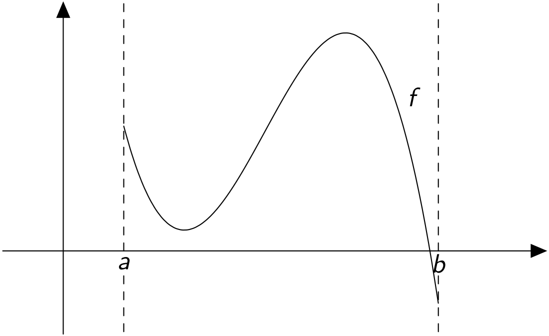
$$N(9) - N(8) = 0.832 \approx N'(8.\bar{3}) = 0.833$$

Der Zuwachs ist also etwa 83 Personen.


N
10
5
t
5
10
15
20
25

# Was sagt uns $f''$?

Welche geometrische Bedeutung hat die zweite Ableitung?



# Wendepunkte

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f'' > 0 & \Rightarrow & \text{Kurve ist eine Linkskurve} \\ f'' < 0 & \Rightarrow & \text{Kurve ist eine Rechtskurve} \end{array}}$$

Wenn eine Rechtskurve zu einer Linkskurve wird – oder umgekehrt – , muss die Kurve "wenden". An diesen Wendepunkten muss $f'' = 0$ gelten. Wendepunkte sind jeweils die Punkte, an welchen die Kurve am steilsten ist.

$$\boxed{x \text{ ist Wendepunkt} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0}$$

## Bemerkung

$f''(x) = 0$ ist eine *notwendige* Bedingung für einen Wendepunkt. D.h. an einem Wendepunkt ist die zweite Ableitung gleich Null. Es ist jedoch keine *hinreichende* Bedingung. Es ist also möglich, dass ein Punkt kein Wendepunkt ist, obschon die zweite Ableitung gleich Null ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$f(x) = x^4 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 12x^2 \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = 0$$

0 ist aber ein Minimum und kein Wendepunkt.

## Definition

Ein Wendepunkt, der auch ein kritischer Punkt ist (d.h. $f'(x) = 0$), heisst *Sattelpunkt* (oder Terrassenpunkt).

# Asymptotisches Verhalten

Was passiert, wenn man immer grössere Werte für $x$ einsetzt? Oder anders ausgedrückt: Was ist $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$?

Drei unterschiedliche Situationen:

1. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$ (Polynome)
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (Rationale Funktionen)
3. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Problem: Man kann nicht einfach $\infty$ für $x$ einsetzen.

$\Longrightarrow$ Man muss die *Grenzwerte* untersuchen.

# 1. Polynome

Für Polynome gibt es eine einfache Regel:

Ein Polynom verhält sich asymptotisch wie seine höchste Potenz.

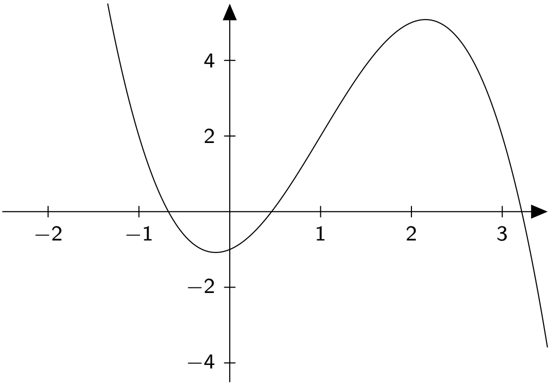
# Ein Beispiel

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$ verhält sich asymptotisch wie $y = -x^3$, d.h.

$$\lim_{x \to \infty} -x^3 + 3x^2 + x - 1 = \lim_{x \to \infty} -x^3 = -\infty$$

Um zu verstehen, weshalb diese Regel gilt, formen wir das Polynom folgendermassen um:

$$-x^3 + 3x^2 + x - 1 = -x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$


4
2
−2
−4
−2
−1
1
2
3

# 2. Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist ein Bruch von Polynomen: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}$$

Alle die Brüche mit einer Potenz von $x$ im Nenner gehen für $x \to \pm\infty$ gegen Null. Also ist nur die höchste Potenz von $x$ relevant.

**Definition**

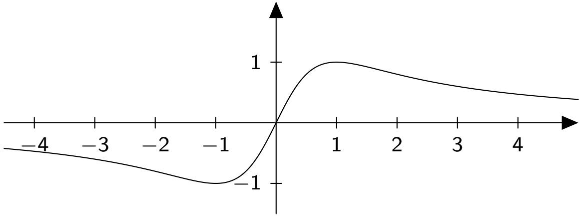
Der *Grad*, $\deg(P)$, eines Polynoms $P(x)$ ist seine höchste Potenz.

# Fall 1: $\deg(P) < \deg(Q)$

In diesem Fall nähert sich die Funktion asymptotisch 0 an.

Beispiel:

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

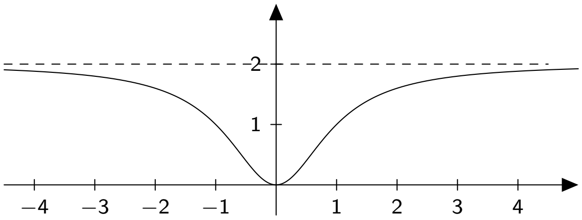


# Fall 2: $\deg(P) = \deg(Q)$

In diesem Fall nähert sich die Funktion asymptotisch einem konstanten (endlichen) Wert an.

Beispiel:

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \to 2 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$



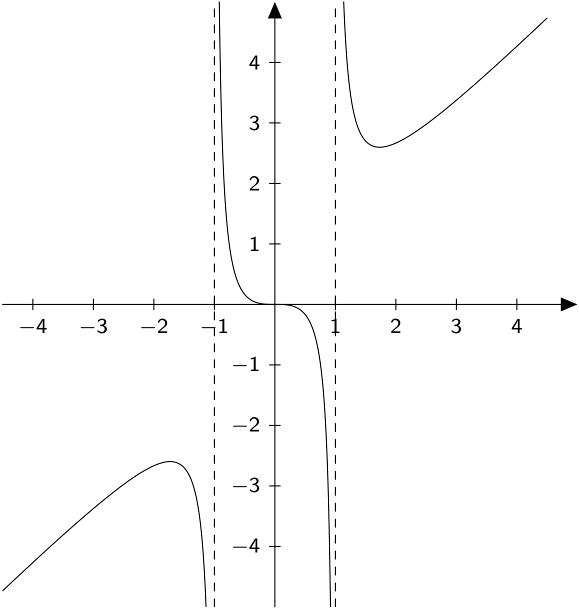
# Fall 3: $\deg(P) > \deg(Q)$

In diesem Fall geht die Funktion für $x \to \pm\infty$ gegen $\infty$ oder $-\infty$. Welcher der beiden Fälle auftritt, hängt von den Vorzeichen von Zähler und Nenner ab.

Beispiel:

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty\,,$$

da der Nenner (und somit der Bruch) für grosse Werte von $x$ positiv ist. Analog geht man für $x \to -\infty$ vor.


4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

# Polstellen

Bei den Nullstellen des Nenners (d.h. $x = -1$ und $x = 1$) ist die Funktion nicht definiert. Würde man $x = 1$ einsetzen, so erhielte man den unbestimmten Ausdruck $\frac{1}{0}$.

Vermutung: Die Funktion geht für $x \to 1$ gegen $\infty$.

Der Graph zeigt, dass das Verhalten von rechts und von links unterschiedlich ist:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty.$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

# 3. Die Regeln von de l'Hôpital

Im dritten Beispiel ist folgender Grenzwert gesucht:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

Naives "Einsetzen" führt wiederum zum unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$. Dieser Ausdruck als Grenzwert aufgefasst kann alles Mögliche sein, 0, eine endliche Zahl, aber auch $\infty$.

Problem: Der Trick mit dem Kürzen funktioniert hier nicht mehr.

## Satz (Regel von de L'Hôpital)

*Seien* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, wobei* $a, b \in [-\infty, \infty]$. *Falls*

*(i)* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

*oder*

*(ii)* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ *(oder* $-\infty$*)*

*und der Grenzwert* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, so gilt*

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

*Analoge Aussagen gelten für b.*

# Ein Beispiel

Wir möchten $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$ berechnen. Formal erhalten wir $\frac{\infty}{\infty}$.

Regel von de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

# Ein paar Grenzwerte

Für jede positive Zahl $r > 0$ gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} &= 0 \end{aligned}}$$

In Worten bedeutet dies, dass die Exponentialfunktion schneller und die Logarithmusfunktion langsamer wächst als jede Potenzfunktion.

# Kurvendiskussion – das volle Programm

Diskutiere die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

auf ganz $\mathbb{R}$.

1. Da wir die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten, haben wir keine Funktionsgrenzen wo Extrema auftreten können.
2. Erste Ableitung $f'(x)$:

   $$f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$$

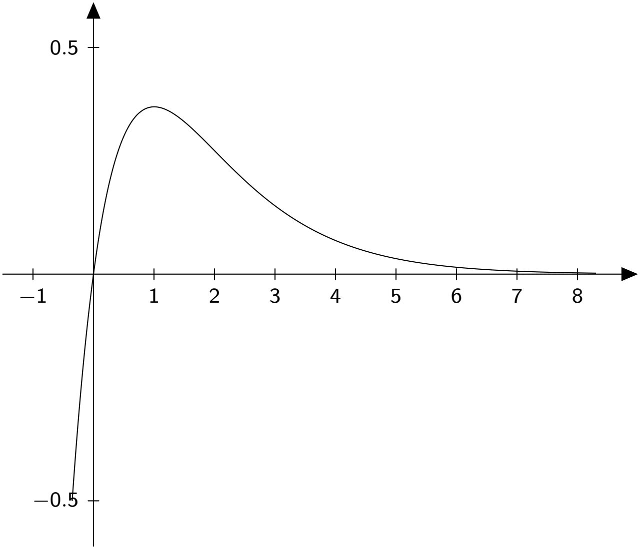
   Kritischer Punkt: $x = 1$.
3. Zweite Ableitung $f''(x)$:

   $$f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

   $f''(1) = -\frac{1}{e^1} < 0 \implies$ Maximum.

4. Die Funktion $f$ hat in 1 ein absolutes Maximum.
5. $f''(x) = 0$ hat die einzige Lösung $x = 2$. Da $f''$ dort das Vorzeichen wechselt, ist $x = 2$ ein Wendepunkt.
6. Es gelten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$


0.5
−0.5
−1
1
2
3
4
5
6
7
8

# Inhaltsverzeichnis

# Beispiel 1

Bestimme Radius und Höhe eines geraden Kreiszylinders, der bei gegebenem Volumen $V = 1$ eine minimale Oberfläche besitzt.

# Beispiel 2

Dem Kreis mit dem Radius $r = 1$ soll das flächengrösste gleichschenklige Dreieck einbeschrieben werden. Wie lang sind seine Seiten?

# Beispiel 3

Welche Punkte auf dem Graphen von $y = \frac{2}{x^2}$ sind am wenigsten weit vom Ursprung entfernt?

# Typische Nebenbedingungen

Eine Nebenbedingung ist eine *Gleichung*, welche die verschiedenen Variablen zu einander in Beziehung setzt. In *geometrischen* Problemen kommen folgende Typen oft vor:

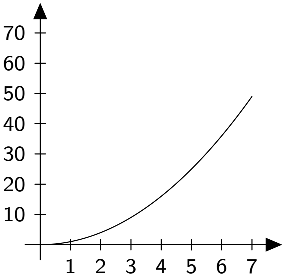
1. Pythagoras
2. Ähnlichkeit
3. Funktionsgleichung
4. Geometrische Formeln (Volumen, Fläche, Umfang, etc.)

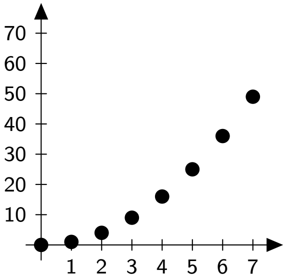
# Inhaltsverzeichnis

# Folgen

**Definition**

Eine *Folge* ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$.




Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, \ldots)$.

# Beispiele

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Folge von Zahlen:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots \qquad \text{oder} \qquad 1, 3, 9, 27, 81, \ldots.$$

Diese entsprechen den Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 2 \\ 1 & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 8 \\ 4 & \mapsto & 10 \\ 5 & \mapsto & 12 \\ & \vdots & \end{array} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 9 \\ 3 & \mapsto & 27 \\ 4 & \mapsto & 81 \\ 5 & \mapsto & 243 \\ & \vdots & \end{array}$$

# Rekursive und explizite Definition

Kurz beschreibt man eine Folge indem man das $n$-te Glied angibt.

- *rekursiv*: $a_n$ in Abhängigkeit von $a_{n-1}$, wobei ein Startwert $a_0$ gegeben ist. Zum Beispiel

$$a_n = a_{n-1} + 2, \text{ wobei } a_0 = 2.$$

- *explizit*: $a_n$ nur in Abhängigkeit von $n$. Zum Beispiel

$$a_n = 3^n.$$

Man nennt diese Abhängigkeiten auch *Bildungsgesetze*.

# Beispiele

- Folge der Stammbrüche: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$. Dies entspricht $a_n = \frac{1}{n}$ (erstes Folgeglied ist $a_1$).
- Alternierende Folge: $(1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1, \ldots)$, entspricht der Folge $(-1)^n$.
- Folge der Primzahlen: $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots)$. Es ist kein explizites Bildungsgesetz bekannt.
- Fibonacci-Zahlen: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Wird beschrieben durch $a_0 = 1, a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$.
- Arithmetische Folge: $(-2, 3, 8, 13, 18, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = 5n - 2$.
- Geometrische Folge: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

# Arithmetische Folgen

## Definition

Bei einer *arithmetischen Folge* sind die Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern immer konstant. Das heisst, es gibt eine Zahl $d \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{a_n - a_{n-1} = d \qquad \text{konstant für alle } n \in \mathbb{N}.}$$

Dies entspricht der *rekursiven* Formel

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

oder der *expliziten* Formel

$$a_n = a_0 + nd.$$

# Ein Beispiel

$(-2, 3, 8, 13, 18, \dots)$ entspricht der Folge $a_n = 5n - 2$. Es gilt

$$a_n - a_{n-1} = 5n - 2 - (5(n-1) - 2) = 5n - 2 - 5n + 5 + 2 = 5,$$

also ist in diesem Fall der Abstand zwischen zwei Gliedern $d = 5$.

# Geometrische Folgen

## Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst *geometrische Folge*, wenn der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern stets konstant ist. Das heisst, es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \qquad \text{konstant für alle } n \in \mathbb{N}.}$$

Dies entspricht der *rekursiven* Formel

$$a_n = q \cdot a_{n-1},$$

oder der *expliziten* Formel

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

# Ein Beispiel

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ entspricht der Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für $n \geq 1$ und es gilt:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{2},$$

und somit ist $q = \frac{1}{2}$.

# Reihen

## Definition

Wir bezeichnen mit $s_n$ die Summe der Folgenglieder $a_0$ bis $a_n$:

$$\boxed{s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$$

$(s_n)_n$ heisst *(endliche) Reihe*. Man nennt $s_n$ auch $n$-te Partialsumme der Reihe.

Die Reihe kann sowohl beim Index $k = 0$ als auch beim Index $k = 1$ oder von einer beliebigen anderen Zahl aus beginnen.

# Das Summenzeichen

## Beispiele

- $\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{32}.$
- $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k = (-1) + 1 + (-1) + 1 = 0.$

# Der Trick mit den Paketen

Wir wollen $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ berechnen.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2s_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ & + & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Wenn wir jede Spalte zusammenzählen, bekommen wir immer $n+1$. Also ist

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

# Geometrische Reihen

## Satz

*Ist $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine geometrische Folge, so gilt für die Summe der ersten $n$ Glieder:*

$$\boxed{s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.}$$

*Das $s_n$ wird endliche geometrische Reihe genannt.*

Hiermit lässt sich die Summe des ersten Beispiels auch direkt berechnen:

$$\sum_{i=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}.$$

# Beweis des Satzes

Die Folge ist geometrisch, das heisst von der Form $a_n = a_0 \cdot q^n$. Wir betrachten folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n \\ q \cdot s_n &= \phantom{a_0 + {}} a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n + a_0 q^{n+1} \end{aligned}$$

Berechnen wir nun die Differenz

$$s_n - q \cdot s_n = a_0 - a_0 q^{n+1}.$$

Dies entspricht

$$s_n(1-q) = a_0(1-q^{n+1}).$$

Somit erhalten wir unsere Behauptung

$$s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

# Unendliche Reihen

Was passiert, wenn wir nicht nur bis zu einem gewissen $n$, sondern sogar bis unendlich aufsummieren?

## Definition

Hat die Summe unendlich viele Summanden, wird sie *unendliche Reihe* genannt und man schreibt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Dies entspricht dem Grenzwert von $s_n$ für $n \to \infty$,

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

und kann dementsprechend konvergent oder divergent sein.

# Die unendliche geometrische Reihe

## Satz

*Die unendliche geometrische Reihe ist konvergent für $|q| < 1$:*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = a_0(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = a_0 \frac{1}{1-q}}$$

*Für alle anderen $q$ divergiert die Summe.*

## Bemerkung

Beachte, dass die Summe bei $k = 0$ anfängt.

# Beweis des Satzes

Wir haben bereits $s_n$ für eine geometrische Summe berechnet:

$$s_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Betrachten wir nun den Limes

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a_0 \frac{1}{1 - q},$$

da $\lim_{n \to \infty} q^{n+1} = 0$ falls $|q| < 1$.

## Beispiel

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

## Beispiel (zur Divergenz)

Es ist einfach zu sehen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0+1+2+3+4+5+\ldots$$

divergiert. Schwieriger ist es zu zeigen, dass auch die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

divergent ist (siehe Übungen).