

Vorkurs UZH 2018

# Mathematik Rechenfertigkeiten

Skript Freitag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich  
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich

Skript: Dr. Irmgard Bühler (Überarbeitung: Dr. Dominik Tasnady)

17. August 2018

# Inhaltsverzeichnis

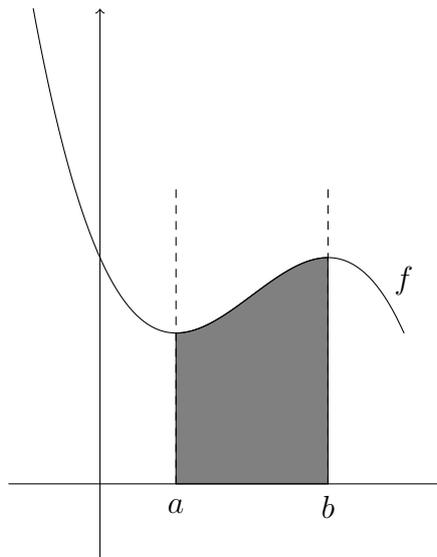
<b>1 Grundlagen der Integralrechnung</b>	<b>2</b>
1.1 Definition und Bedeutung . . . . .	2
1.2 Das unbestimmte Integral . . . . .	6
1.3 Das bestimmte Integral . . . . .	7
<b>2 Partielle Integration</b>	<b>11</b>
<b>3 Integration durch Substitution</b>	<b>13</b>
<b>4 Uneigentliche Integrale</b>	<b>17</b>

# 1 Grundlagen der Integralrechnung

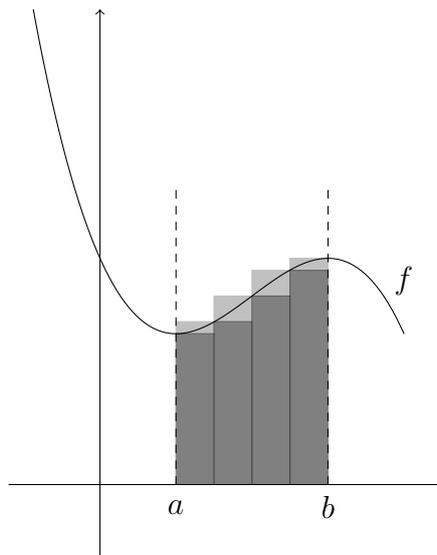
Wir haben in den letzten Tagen die Ableitung, respektive das Differenzieren, kennengelernt. Nun kommen zweiten grossen Gebiet der Analysis, der Integralrechnung. Ziel des ersten Teils ist es zu zeigen, dass ein Zusammenhang besteht zwischen dem Ausrechnen des Flächeninhaltes unter dem Graphen einer Funktion  $f$  und dem Finden einer Funktion  $F$  mit der Eigenschaft  $F' = f$ , einer sogenannten **Stammfunktion** von  $f$ . Im zweiten und dritten Teil werden wir einige Integrationsregeln und -methoden behandeln, welche uns helfen, eine gegebene Funktion  $f$  zu integrieren. Schliesslich werden wir uns im vierten und letzten Teil noch mit sogenannten uneigentlichen Integralen beschäftigen.

## 1.1 Definition und Bedeutung

Wir betrachten eine Funktion  $f(x)$ , welche überall  $\geq 0$  ist. Wie gross ist die Fläche, welche zwischen dem Graphen der Funktion und der  $x$ -Achse sowie den vertikalen Geraden  $x = a$  und  $x = b$  liegt?



Wir teilen diese Fläche in  $n$  Stücke auf, und zwar so, dass wir sie einerseits von unten und andererseits von oben approximieren:



Wir brauchen folgende Bezeichnungen:

Innere Treppenfläche  $U_n$ : Die dunkel schattierte Fläche

Äussere Treppenfläche  $O_n$ : Die dunkel schattierte plus die hell schattierte Fläche

Unterteilen wir nun die Fläche in immer kleinere Stücke, so wird die Approximation immer besser. Anders gesagt, bekommen wir den korrekten Flächeninhalt, sobald wir  $n \rightarrow \infty$  laufen lassen.

**Definition 1.** Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n,$$

wird dieser Limes als *bestimmtes Integral* bezeichnet, und wir schreiben

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Für eine positive Funktion entspricht also das Integral gerade der Fläche unter der Kurve.

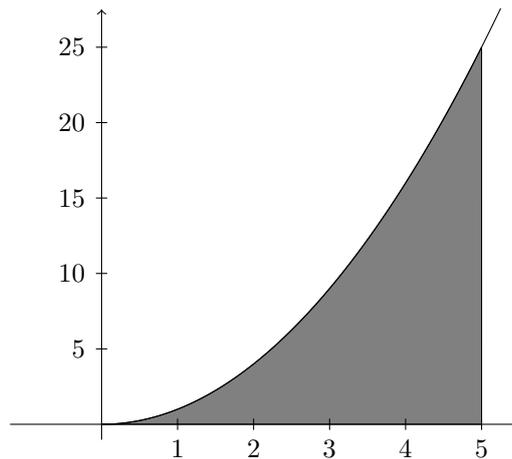
**Bemerkung.** Für eine stetige Funktion ist obige Bedingung immer erfüllt. Es gibt aber Funktionen, bei welchen das nicht mehr zutrifft. Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

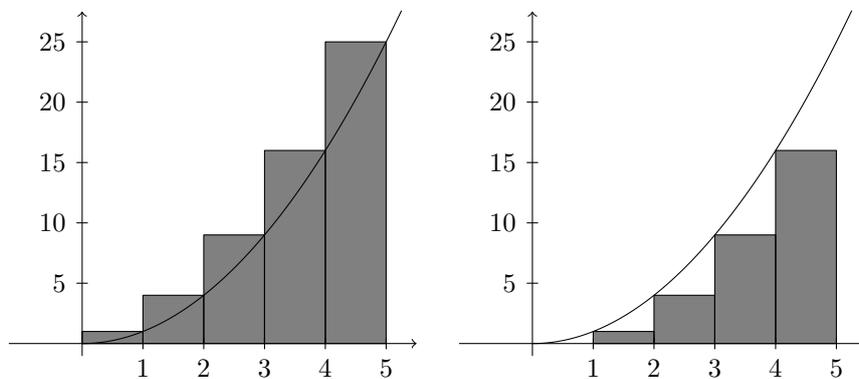
Dann gelten  $U_n = 0$  und  $O_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ . Der Graph dieser Funktion lässt sich nicht zeichnen, da der Wert beliebig schnell zwischen 0 und

1 hin und her springt. In diesem Fall ist auch nicht klar, was die Fläche unter diesem Graphen sein soll. Dies erfordert eine tiefere Behandlung der Integrationstheorie.

**Beispiel.** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x^2$  und wollen die Fläche von 0 bis zu einer Zahl  $b$  berechnen (in der Grafik unten ist  $b = 5$ ).



Wir unterteilen die Fläche zuerst wieder in  $n$  Teile und approximieren sie von oben sowie von unten.



Wir werden folgende Formel benutzen:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Wir erhalten für die äussere Treppenfläche

$$\begin{aligned}
 O_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{b}{n} \cdot \left( \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \right) \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{b^3}{n^3} \left( \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \left( \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) = b^3 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b^3 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{b^3}{3}.$$

Auf die gleiche Art und Weise erhalten wir für die innere Treppenfläche

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{b}{n} \cdot 0^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \left( \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} \right) = b^3 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)
 \end{aligned}$$

und für den Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b^3 \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{b^3}{3}.$$

Die zwei Grenzwerte stimmen überein, und somit erhalten wir

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

## 1.2 Das unbestimmte Integral

Eine Funktion  $F(x)$  heisst *Stammfunktion* der Funktion  $f(x)$ , falls  $F'(x) = f(x)$ .

Wenn  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist, dann bezeichnet man

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

als *unbestimmtes Integral*. Dabei ist  $C \in \mathbb{R}$  eine Konstante, die sogenannte *Integrationskonstante*. Da die Ableitung einer Konstanten 0 ist, können wir jeweils eine Konstante addieren, ohne dass sich die Ableitung ändert. Stammfunktionen sind daher nicht eindeutig. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich aber lediglich durch eine Konstante.

Es reicht aus, die Integrale von ein paar wichtigen Funktionen zu kennen, um integrieren zu können. Zusammen mit den Eigenschaften der Integration sowie wie mit den Methoden

- partielle Integration (Kapitel 2)
- Substitution (Kapitel 3)

können wir sehr viele Integrale berechnen. Es gibt jedoch Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht als eine geschlossene Funktionsgleichung bestimmen lassen.

Darum gleich zu Beginn die unbestimmten Integrale der wichtigsten Funktionen (überprüfen durch Ableiten):

1.  $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
2.  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ , wobei  $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3.  $\int e^x dx = e^x + C$
4.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$
5.  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
6.  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

Da eine Stammfunktion bestimmt wird, indem man die Operation des Ableitens umkehrt, überrascht es nicht, dass es analog zu den Ableitungsregeln auch entsprechende Integrationsregeln gibt. Die ersten beiden dieser Regeln sind die Konstanten- und die Summenregel.

**Eigenschaften:**

- $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$  für  $c \in \mathbb{R}$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

**1.3 Das bestimmte Integral**

Wir haben gesehen, dass das *bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x) dx$$

die Fläche zwischen dem Graphen der *positiven* Funktion  $f(x)$  und der  $x$ -Achse zwischen den *Integrationsgrenzen*  $a$  und  $b$  angibt. Im Unterschied zum unbestimmten Integral ist dies eine Zahl, keine Funktion.

**Zusätzliche Eigenschaften:**

- Für  $a \leq c \leq b$  gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Vertauschen der Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Die Berechnung des bestimmten Integrals der Funktion  $y = x^2$  war nur möglich, da eine Formel für die Summe der Quadratzahlen existiert. Wenn aber schon die Integration einer so einfachen Funktion schwierig ist, wie soll dann das bestimmte Integral komplizierterer Funktionen berechnet werden? Die entscheidende Idee ist der sogenannte *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, der grob gesagt besagt, dass zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral, zwei grundlegend verschiedenen Konzepten, eine sehr enge Beziehung besteht. Konkret ist die Aussage folgende:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}$$

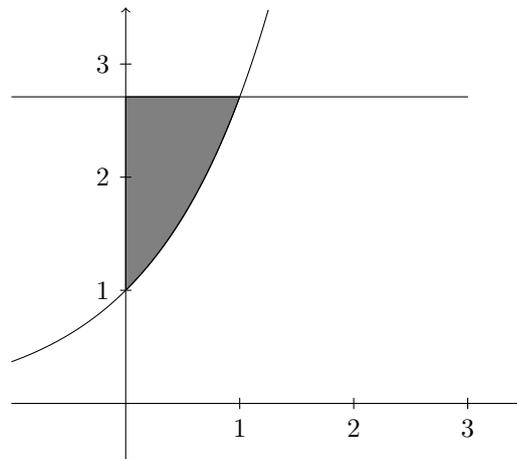
und wir schreiben auch

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

**Beispiele.**

$$(a) \int_3^5 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_3^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

- (b) Gesucht ist die Fläche, die zwischen der  $y$ -Achse, dem Graphen von  $e^x$  und der konstanten Funktion  $y = e$  eingeschlossen ist.

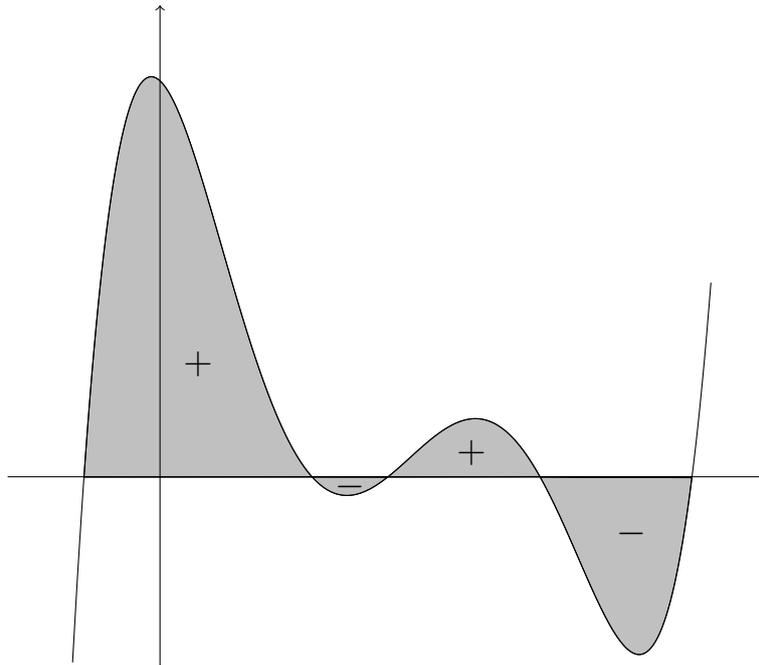


Der Schnittpunkt von  $e$  und  $e^x$  liegt bei 1, daher sind 0 und 1 die Integrationsgrenzen.

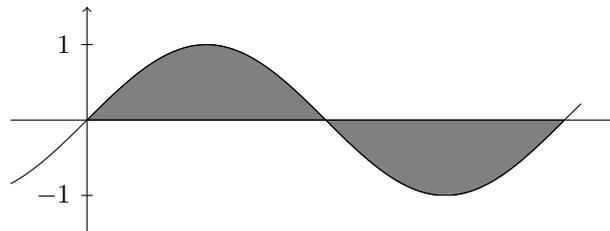
$$\int_0^1 (e - e^x) dx = ex - e^x \Big|_0^1 = e - e - (-1) = 1$$

Bis jetzt haben wir immer Funktionen  $f \geq 0$  betrachtet. Was passiert mit dem Flächeninhalt, wenn die Funktion negativ wird?

Flächen unterhalb der  $x$ -Achse werden negativ gezählt (denn bei der Berechnung der jeweiligen Ober- und Untersumme wird die Intervalllänge (positiv) mit dem Funktionswert (negativ!) multipliziert).



**Beispiel.** Wir wollen die Fläche zwischen dem Graphen von  $\sin(x)$  und der  $x$ -Achse zwischen  $0$  und  $2\pi$  berechnen:



Berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0,$$

entspricht dies nicht der Fläche. Die Fläche oberhalb der  $x$ -Achse und diejenige unterhalb der  $x$ -Achse heben sich gegenseitig auf.

Die Fläche aber entspricht dem Integral

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx.$$

Wir teilen die Funktion in die positiven und in die negativen Teile auf:

$$\sin(x) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ \leq 0, & \text{falls } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx &= \int_0^{\pi} \sin(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x)) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} + \cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4.\end{aligned}$$

Das Vorgehen bei der Flächenberechnung (Fläche zwischen einem Graphen und der  $x$ -Achse, bzw. zwischen zwei Graphen) ist also folgendes:

1. Man berechnet die Nullstellen der Funktion. (Soll die Fläche zwischen zwei Graphen berechnet werden, muss man die Schnittpunkte bestimmen.)
2. Man integriert von Nullstelle zu Nullstelle (bzw. von Schnittpunkt zu Schnittpunkt). Dabei wird das Integral negativ, wenn der Graph unter der  $x$ -Achse verläuft. Die Fläche ist dann der entsprechende positive Wert.
3. Man addiert schliesslich die verschiedenen Flächeninhalte, um so die Gesamtfläche zu erhalten.

## 2 Partielle Integration

Die Partielle Integration entspricht der Produktregel der Differentiation, welche lautet:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

respektive etwas umgeformt

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g.$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir

$$\int f \cdot g' dx = \int (f \cdot g)' dx - \int f' \cdot g dx$$

Da  $\int h' dx = h + C$  für jede Funktion  $h$ , entspricht dies

$$\boxed{\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx (+C)}$$

Dies nennt man die partielle Integration. Die zu integrierende Funktion muss also ausgedrückt werden können als Produkt zweier Funktionen  $f(x) \cdot g'(x)$ . Diese Regel gilt sowohl für unbestimmte als auch für bestimmte Integrale. In solchen Formeln wird die Konstante  $C$  häufig weggelassen, da sie in den unbestimmten Integralen absorbiert werden kann. Überhaupt muss man mit Formeln, die unbestimmte Integrale enthalten vorsichtig sein. Die Version für bestimmte Integrale nimmt folgende Form an:

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g dx}$$

### Beispiele.

(a) Um  $\int x \cos(x) dx$  zu bestimmen, wählen wir die Funktionen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \cos(x) \\ f'(x) = 1 & g(x) = \sin(x) \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle, dass dies auch die richtige Stammfunktion ist, können wir die Stammfunktion ableiten:

$$\begin{aligned}(x \sin(x) + \cos(x) + C)' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cos(x) - \sin(x) + 0 \\ &= x \cos(x),\end{aligned}$$

was der ursprünglichen Funktion entspricht. Wir haben also richtig integriert!

(b) Für  $\int_1^{e^2} \ln(x) dx$  betrachten wir:

$$\begin{array}{ll}f(x) = \ln(x) & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x\end{array}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} \ln(x) dx &= \int_1^{e^2} 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} x dx \\ &= e^2 \ln(e^2) - 1 \cdot \ln(1) - x \Big|_1^{e^2} \\ &= e^2 \cdot 2 - \ln(1) - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1.\end{aligned}$$

### 3 Integration durch Substitution

Die partielle Integration entsprach der Produktregel. Gibt es auch so etwas wie eine Kettenregel für Integrale? Tatsächlich gibt es eine Regel, die besonders geeignet ist, Integrale von verschachtelten Funktionen zu berechnen. Allerdings ist es so, dass diese Regel, die Substitutionsregel, nicht für jede verschachtelte Funktion zum Ziel führt.

Wenn die zu integrierende Funktion jedoch von der Form  $f(g(x))g'(x)$  ist, das heisst, das Integral hat folgende Form

$$\int f(g(x))g'(x) dx ,$$

dann können wir die Funktion  $g(x)$  durch eine Variable  $u$  ersetzen und danach über  $u$  integrieren. Nicht immer ist diese Form einfach abzulesen. Vermuten wir, dass wir Substitution anwenden können, probieren wir es einfach aus, und zwar wie folgt:

- (i) Suche eine Funktion, welche wir ersetzen wollen (üblicherweise die innere Funktion der Verschachtelung):  $u = g(x)$ .
- (ii) Leite  $u$  nach  $x$  ab:  $\frac{du}{dx} = g'(x)$ , wobei  $\frac{du}{dx}$  eine andere Schreibweise für die Ableitung von  $u$  nach  $x$  ist.
- (iii) Löse diese Gleichung nach  $dx$  auf:  $dx = \frac{du}{g'(x)}$ . Es handelt sich bei  $\frac{du}{dx}$  zwar nicht um einen wirklichen Bruch (es ist bloss eine Schreibweise). Es stellt sich jedoch heraus, dass man in vielen Situationen (so auch hier) damit Rechnen darf, wie wenn es ein Bruch wäre.
- (iv) Ersetze im Integral  $g(x)$  durch  $u$  und  $dx$  durch  $\frac{du}{g'(x)}$ . Falls es ein bestimmtes Integral ist und Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  vorkommen, werden diese ersetzt durch  $u(a)$  und  $u(b)$ .

$$\begin{aligned} g(x) &\longleftrightarrow u \\ dx &\longleftrightarrow \frac{du}{g'(x)} \\ \text{Integrationsgrenzen } a, b &\longleftrightarrow u(a), u(b) \end{aligned}$$

- (v) Das  $g'(x)$  sollte sich nun rauskürzen, so dass im Integral kein  $x$  mehr vorkommt. Passiert das nicht, können wir nicht Substitution anwenden oder wir müssen eine andere Substitution vornehmen.<sup>1</sup>Sonst weiter zum nächsten Schritt.

---

<sup>1</sup>Man kann auch die Variable  $x$  durch die neue Variable  $u$  ausdrücken,  $x = g^{-1}(u)$ . Dadurch wird das neue

(vi) Es gilt nun:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u)du$$

$$\text{respektive } \int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

Das neue Integral entspricht also dem alten Integral.

(vii) Beim unbestimmten Integral müssen wir wieder  $g(x)$  für  $u$  einsetzen, um die Lösung zu bekommen.

**Bemerkung.** Anstatt das bestimmte Integral mit Integrationsgrenzen direkt zu lösen, kann das Integral auch zuerst nur unbestimmt, das heisst ohne Integrationsgrenzen, betrachtet werden. Dann müssen nach dem Lösen des Integrals und der Rücksubstitution ( $u$  durch  $g(x)$  ersetzen) noch die Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

### Beispiele.

(a) Wir wollen das Integral  $\int xe^{x^2} dx$  lösen und setzen dafür  $u(x) = x^2$ . Es folgt, dass

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \text{und somit} \quad dx = \frac{du}{2x}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \int xe^{x^2} dx &= \int xe^u \frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

(b) Nun ein bestimmtes Integral. Wir berechnen  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ :

---

Integral durch die Substitution eher komplizierter als einfacher. In seltenen Fällen kann das trotzdem zielführend sein. Dies ist aber eher etwas für Fortgeschrittene und wird hier nicht vorkommen.

Wir setzen  $u = x + 1$  und erhalten  $\frac{du}{dx} = 1$ , also  $du = dx$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= \int_1^2 u^{-\frac{1}{2}} du = 2 u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2.\end{aligned}$$

**Bemerkung.** *Vergleich Partielle Integration  $\leftrightarrow$  Substitution:*

Wann benutzen wir partielle Integration, wann die Substitution? Grundsätzlich können wir drei Punkte festhalten.

1. Finden wir im Integral eine Funktion einer Funktion, eine Verschachtelung also? Also so etwas wie  $f(g(x))$ ?  
—→ Substitution (d.h.  $g(x)$  ersetzen)
2. Werden im Integral zwei Funktionen multipliziert, es kommen aber keine Funktionen in Funktionen vor? —→ Partielle Integration
3. Ist das Integral nach Anwendung einer der Methoden komplizierter als vor dem Integrieren, dann wurde entweder die falsche Methode gewählt, oder es muss etwas anderes substituiert oder die partielle Integration anders angewendet werden. (In seltenen Fällen muss das Integral zuerst komplizierter gemacht werden, um es dann lösen zu können, aber das ist für Fortgeschrittene.)

Es braucht etwas Intuition, um jeweils die richtige Methode richtig auszuwählen... Mit etwas Übung klappt das aber schon. Einfach nicht aufgeben und ausprobieren.

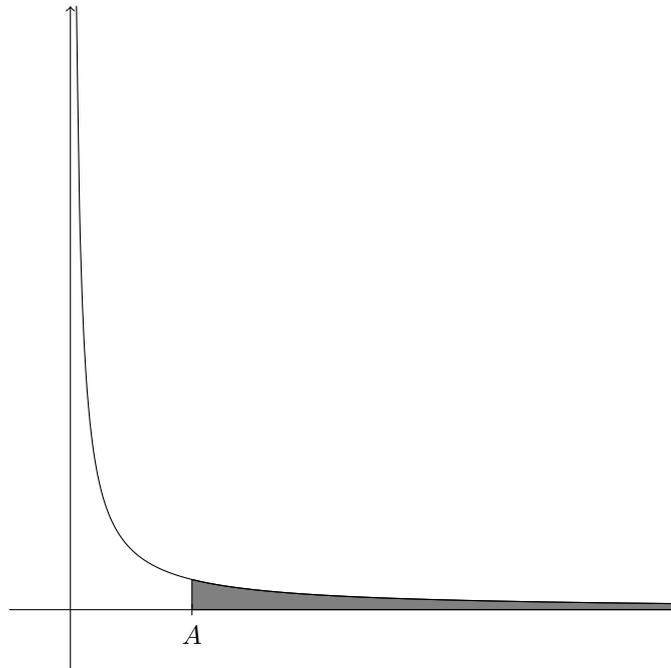
**Beispiel.** Wann soll welche Methode wie angewendet werden? Ein paar Beispiele:

Funktion	Methode	Was wird wie ersetzt?
$\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$		
$t \cdot \cos(t)$		
$e^y \cos(y)$		
$a^{5x}$		
$\ln(x)$		
$\ln\left(\frac{1}{8-3x}\right)$		
$\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$		
$x^2 \cos(x)$		
$(3x^2 - 5)^6$		

## 4 Uneigentliche Integrale

**Fragestellung:** Kann man eine nicht beschränkte Fläche berechnen? Was passiert, wenn die Integrationsgrenzen unendlich oder Polstellen der Funktion sind?

**Fall 1:** Kann man die Fläche unter dem Graphen von  $f(x)$  auf dem Intervall  $[A, \infty[$  messen?



Wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_A^N f(x) dx$$

existiert, dann nennt man dies ein *uneigentliches Integral* und schreibt:

$$\int_A^{\infty} f(x) dx$$

**Beispiel.**

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x \cdot e^{-x} dx.$$

Wir lösen das Integral  $\int_0^N x e^{-x} dx$  mit partieller Integration:

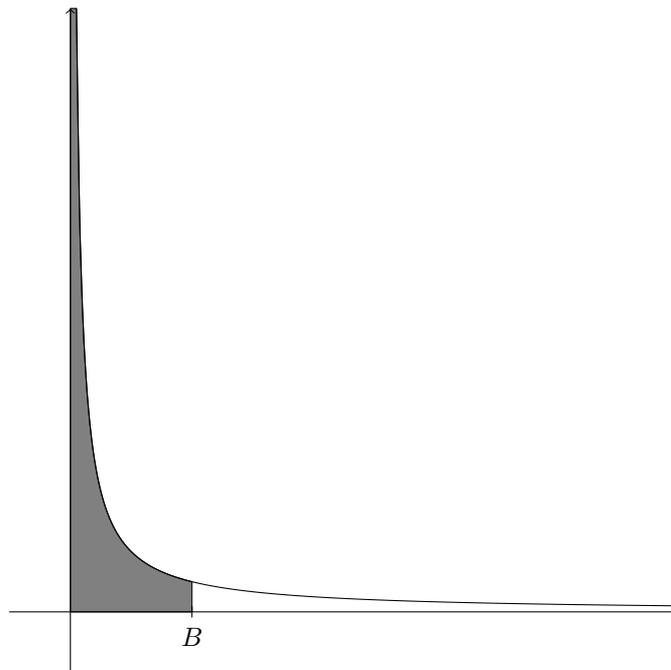
$$\begin{aligned} f(x) &= x & g'(x) &= e^{-x} \\ f'(x) &= 1 & g(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\int_0^N x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^N + \int_0^N e^{-x} dx = -N e^{-N} - e^{-N} - (-e^{-0}) = -e^{-N}(N+1) + 1$$

Wegen  $\lim_{N \rightarrow \infty} (-e^{-N}(N+1)) \rightarrow 0$  existiert der Grenzwert und es gilt:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N x e^{-x} dx = 1.$$

**Fall 2:** Kann man die Fläche unter dem Graphen von  $f(x)$  auf einem Intervall messen, welches eine Polstelle bei  $A$  beinhaltet?



Analog zum ersten Fall: Wenn

$$\lim_{\alpha \rightarrow A} \int_{\alpha}^B f(x) dx$$

existiert, dann existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_A^B f(x) dx$$

**Beispiel.** Betrachte  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . Da

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

und  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} = 0$ , folgt, dass  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$  existiert.

**Beispiel.** Betrachte  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$ . Da

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

existiert  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  nicht.