Nicht-Standard Modelle der Peano Arithmetik

Eine Betrachtung von Ultrafiltern und Isomorphismen zwischen Ultrapotenzen

Katja Warth

Masterarbeit

Bei:
Dr. Lorenz Halbeisen
Prof. Dr. Joachim Rosenthal

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Universität Zürich
Schweiz
4. Januar 2021

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit verschiedenen Arten von Ultrafiltern und mit Nicht-Standardmodellen der Peano Arithmetik, die als Ultrapotenzen anhand von Ultrafiltern konstruiert werden. Das Hauptziel ist dabei Kriterien für isomorphe und nicht-isomorphe Nicht-Standardmodelle zu liefern.

Verschiedene Arten von Ultrafiltern, Beweise ihrer Existenz und ihre Zusammenhänge werden zu Beginn dargelegt. Besonders ausführlich werden dabei Ramsey Ultrafilter behandelt. Wichtig ist hierbei die Erkenntnis, dass Ultrapotenzen konstruiert mit Hauptultrafiltern nur zu Standardmodellen der Peano Arithmetik führen und wir somit Nicht-Hauptultrafilter verwenden müssen, um Nicht-Standardmodelle zu erhalten.

Die beiden wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit sind jedoch, dass einerseits mit isomorphen Ultrafiltern isomorphe Ultrapotenzen des Standard-Modells (also Nicht-Standardmodelle) der Peano Arithmetik konstruiert werden, andererseits nicht-isomorphe Ultrafilter zu nicht-isomorphen Ultrapotenzen führen. Da ersteres leichter erkennbar ist, dient das betreffende Kapitel auch als Veranschaulichung anhand eines Beispiels. Für beide Ergebnisse, hauptsächlich aber für einen Beweis der Nicht-Isomorphie von Ultrapotenzen konstruiert mit nicht-isomorphen Ultrafiltern, wird eine Kategorie der Ultrafilter definiert und ein Funktor zur Kategorie der Ultrapotenzen verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Voraussetzungen **3**

2.1 Isomorphe und elementar äquivalente Modelle 3

2.2 Filter und Ultrafilter 4

2.3 Ultraprodukte und der Satz von Łoś 6

3 Arten von Filtern **8**

3.1 Hauptultrafilter 8

3.2 Nicht-Hauptultrafilter 10

3.3 Fréchet-Filter 11

3.4 Freie Filter 11

3.5 Uniforme Ultrafilter 12

3.6 α-vollständige und α-unvollständige Ultrafilter 13

3.7 Reguläre Ultrafilter 14

4 Ramsey Ultrafilter **16**

5 Das Isomorphismustheorem von Keisler und Shelah **21**

6 Die Kategorie der Ultrafilter **24**

7 Ultrapotenzen mit isomorphen Ultrafiltern **31**

8 Ultrapotenzen mit nicht-isomorphen Ultrafiltern **39**

9 Eigenständigkeitserklärung **44**

1 Einleitung

Obwohl viele nicht wissen, was unter dem Begriff „Peano Arithmetik“ zu verstehen ist, wird sie auch von diesen Leuten sehr häufig verwendet. Das Rechnen in den natürlichen Zahlen wird uns schon in der Unterstufe beigebracht und zählt damit zur absoluten Basis des Mathematikunterrichts. Nicht ganz so simpel wird die Lage jedoch, wenn wir nicht einfach nur in den natürlichen Zahlen rechnen, sondern sie als Standardmodell der Peano Arithmetik von aussen betrachten. Mit einem Mal werden da für scheinbar offensichtliche Gleichungen wie „1+1=2“ ziemlich komplizierte Beweise nötig, zumindest, wenn man sie formal beweisen möchte.

Noch eine Stufe komplexer wird es dann, wenn wir uns über Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik Gedanken machen. Dass es diese geben muss, ist seit Gödel eine bekannte Tatsache. Jedoch sind sie selbst unter Mathematikern nicht gerade jedem geläufig.

Daher sollen Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik in der vorliegenden Arbeit genauer untersucht werden. Dabei werden wir uns auf jene Modelle konzentrieren, welche als Ultrapotenzen anhand von Ultrafiltern konstruiert werden. Da solche Ultrapotenzen stark von den verwendeten Ultrafiltern abhängen, sollen auch diese hier Beachtung finden. Das Hauptaugenmerk liegt aber auf der Frage der Isomorphie resp. Nicht-Isomorphie von Ultrapotenzen, die aus der Isomorpie resp. Nicht-Isomorphie der verwendeten Ultrafilter resultieren. Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

Im Kapitel 2 werden einige Voraussetzungen angesprochen, die zum Verständnis dieser Arbeit notwendig sind. Besonders wichtig sind dabei die Definition von isomorphen Modellen, die Ultraprodukt-Konstruktion und der Satz von Łoś.

In den folgenden beiden Kapiteln werden einige Arten von Ultrafiltern wie beispielsweise der Fréchet-Filter, freie, unvollständige und reguläre Ultrafilter vorgestellt, ihre Existenz bewiesen und einige ihrer Beziehungen untereinander dargelegt. Die Hauptunterscheidung ist hierbei die zwischen Haupt- und Nicht-Hauptultrafiltern, wobei wir feststellen werden, dass uns nur letztere zu interessieren brauchen. Am weitläufigsten werden Ramsey-Ultrafilter behandelt, denen ein ganzes Kapitel gewidmet ist.

Das Kapitel 5 befasst sich dann kurz mit einigen Formulierungen des Isomorphismustheorems von Keisler und Shelah, das aussagt, dass zwei Modelle genau dann elementar äquivalent sind, wenn ihre Ultrapotenzen isomorph sind. Für dieses Theorem wird jedoch kein vollständiger Beweis angegeben.

In den letzten drei Kapiteln soll untersucht werden, ob einerseits isomorphe Ultrafilter zu isomorphen Ultrapotenzen und andererseits nicht-isomorphe Ultrafilter zu

nicht-isomorphen Ultrapotenzen des Standardmodells der Peano Arithmetik führen. Als Grundlage dazu wird im Kapitel 6 eine Kategorie der Ultrafilter definiert, wobei das Augenmerk hauptsächlich auf den Morphismen zwischen Ultrafiltern liegt. Im siebten Kapitel wird dann die Frage der Ultrapotenzen isomorpher Ultrafilter beantwortet und ein graphisch dargestelltes Beispiel isomorpher Nicht-Standardmodelle besprochen. Im Kapitel 8 werden wir dann mithilfe eines Funktors untersuchen, ob nicht-isomorphe Ultrafilter auch nicht-isomorphe Ultrapotenzen implizieren.

2 Voraussetzungen

Die wohl grundlegendsten Voraussetzungen in einer Arbeit über nicht-standard Modelle der Peano Arithmetik sind einerseits die Definition von Modellen, andererseits Kenntnisse über die Peano Axiome. Beides soll hier nicht weiter erläutert werden, sondern wird als Vorwissen vorausgesetzt. Ebenso wird vom Leser erwartet, dass er das Standardmodell der Peano Arithmetik bereits kennt und ihm somit auch die Definition von ω als kleinste induktive Menge bekannt ist.

Andere wichtige Begriffe wie Ultrafilter, Ultrapotenz und der Satz von Łoświerden in diesem Kapitel als Definitionen oder Theoreme kurz dargelegt. Damit sollten alle Voraussetzungen gegeben sein, um Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik studieren zu können. Das folgende Grundwissen findet man zumindest teilweise in vielen verschiedenen Büchern zum Thema Modelle und Ultrafilter, zum Beispiel in [10], [6] oder [5].

2.1 Isomorphe und elementar äquivalente Modelle

Auch die Definitionen von isomorphen und elementar äquivalenten Modellen sollten eigentlich bereits bekannt sein, da sie aber im Laufe dieser Arbeit eine wesentliche Rolle spielen, werden sie hier dennoch kurz in Erinnerung gerufen:

Definition 2.1. *Seien M, N zwei Modelle. Dann ist M **elementar äquivalent** zu N, in Zeichen $M \equiv_e N$, wenn jeder Satz σ, der in M wahr ist, auch in N wahr ist.*

Es lässt sich zeigen, dass $M \equiv_e N$ auch $N \equiv_e M$ impliziert.

Definition 2.2. *Seien M, N zwei Modelle über $\mathcal{L}$ mit Bereich A resp. B. M ist isomorph zu N, in Zeichen $M \cong N$ wenn es eine bijektive Funktion $f : A \longrightarrow B$ gibt, sodass gilt:*

- $f(c^M) = c^N$ *für alle Konstantensymbole aus* $\mathcal{L}$
- $f(F^M a_1 ... a_n) = F^N f(a_1) ... f(a_n)$ *für n-stellige Funktionssymbole*
- $\langle a_1, ... a_n \rangle \in R^M \Leftrightarrow \langle f(a_1), ... f(a_n) \rangle \in R^N$ *für n-stellige Relationssymbole*

Mehr soll an dieser Stelle nicht über die Eigenschaften von Modellen im Allgemeinen oder ihre möglichen Verhältnisse zueinander gesagt werden. Daher wenden wir uns nun den Filtern und Ultrafiltern, sowie der Ultraproduktkonstruktion zu. Auch hier wird vieles nur kurz angesprochen werden.

2.2 Filter und Ultrafilter

Ein Filter oder Ultrafilter wird oft allgemein über Boolschen Algebren definiert. Da im Laufe dieser Arbeit aber lediglich Ultrafilter über der Algebra ($\mathcal{P}$(X), $\subseteq$) verwendet werden, soll hier auch nur diese eingeschränkte Definition wiedergegeben werden.

Definition 2.3. *Ein **Filter** über einer Menge X ist eine nicht-leere Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $X \in \mathcal{F}, \emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F}$ *und* $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F}$ *und* $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Definition 2.4. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über der Menge X. Eine **Filterbasis** für $\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ sodass $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } B \subseteq A\}$*

Definition 2.5. *Die **Grösse eines Filters** (geschrieben als $|\mathcal{F}|$) ist definiert als die Kardinalität der kleinsten in $\mathcal{F}$ enthaltenen Menge.*

Ist zusätzlich zu den drei Filterbedingungen eine vierte erfüllt, dann sprechen wir von einem Ultrafilter:

Definition 2.6. *Ein Filter über X ist ein **Ultrafilter**, wenn er zusätzlich zu den Filter-Axiomen auch*

(iv) Für alle $A \subseteq X$ gilt: Entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $A^c \in \mathcal{F}$

erfüllt.

Beispiel. *Sei X eine (nicht-leere) Menge. Dann ist $\{X\}$ ein Filter. Er wird der **triviale Filter** genannt. Wir werden später sehen, dass der triviale Filter genau dann ein Ultrafilter ist, wenn $X = \{x\}$ ist.*

Bemerkung. *Manchmal werden Filter als Mengen von Teilmengen definiert, die nur die Eigenschaften (ii) und (iii) erfüllen. Wenn zusätzlich auch (i) erfüllt ist, spricht man dann von einem **echten** Filter. Unsere Definition beinhaltet jedoch (i), daher ist mit „Filter“ immer ein echter Filter gemeint.*

Es gibt verschiedene Arten von Ultrafiltern, die durch bestimmte Eigenschaften unterschieden werden können. Diese werden im nächsten Kapitel dargelegt.

Ein besonders wichtiger Satz im Zusammenhang mit Filtern und Ultrafiltern ist das Ultrafiltertheorem, welches uns etwas über die Erweiterung von Filtern zu Ultrafiltern verrät:

Theorem 2.7 (Ultrafiltertheorem)**.** *Jeder Filter auf $\mathcal{P}(X)$ kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über einer beliebigen Menge X (also ein Filter auf $\mathcal{P}(X)$). Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Filter auf $\mathcal{P}(X)$, die $\mathcal{F}$ enthalten. Da $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$, ist $\mathfrak{F}$ nicht leer.

Wir erinnern uns an das Lemma von Zorn (das, wie vielen nicht bekannt ist, eigentlich Lemma von Kuratovski-Zorn genannt werden sollte):

Eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, hat mindestens ein maximales Element.

Durch die Mengeninklusion kann $\mathcal{P}(X)$ halbgeordnet werden. Um das Lemma von Zorn zu verwenden, muss also noch gezeigt werden, dass jede Kette in $\mathfrak{F}$ eine obere Schranke besitzt.

Sei I eine Indexmenge. Wir betrachten die Kette von Filtern $\mathfrak{S} = \{S_i : i \in I\}$ in $\mathfrak{F}$ und definieren $S := \bigcup_{i \in I} S_i$. Zuerst wollen wir zeigen, dass S ein Filter ist. Seien $x, y \in S$. Dann existieren $i, j \in I$ so dass $x \in S_i$ und $y \in S_j$. Da $\mathfrak{S}$ eine Kette bezüglich der Mengeninklusion ist, muss eine der beiden Filter im anderen enthalten sein. O.b.d.A. nehmen wir an, dass $S_i \subseteq S_j$ gilt. Somit sind $x, y \in S_j$ und da S_j ein Filter ist, gilt auch $x \cap y \in S_j \subseteq S$.

Sei $z \in \mathcal{P}(X)$ eine Menge mit $x \subseteq z$. Da $x \in S_j$ und S_j ein Filter ist, gilt auch $z \in S_j \subseteq S$.

Zuletzt sehen wir, dass für alle $i \in I$ gilt: $\emptyset \notin S_i$. Daher ist auch $\emptyset \notin S$. Also ist S ein Filter. Da ausserdem $\mathcal{F}$ in jedem S_i enthalten ist, ist auch $\mathcal{F} \subseteq S$ und somit $S \in \mathfrak{F}$. Dies zeigt, dass S eine obere Schranke für die Kette $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{F}$ ist. Wir können also Zorns Lemma anwenden und wissen, dass es ein maximales Element $\mathcal{U}$ in $\mathfrak{F}$ gibt und das ist der gesuchte Ultrafilter. □

Das Ultrafiltertheorem ist sehr wichtig, da es in vielen Beweisen Verwendung findet. Auch im Abschnitt 2.3 werden wir auf ein häufig verwendetes Theorem stossen.

2.3 Ultraprodukte und der Satz von Łoś

Es gibt zwei mögliche Ansätze, Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik zu konstruieren. Die Erste ist die, dem Standardmodell ein Konstantensymbol c hinzuzufügen, mit der Eigenschaft $c > 1, c > 2, \ldots$. Sprich, ein Konstantensymbol, das grösser ist als jedes einzelne der unendlich vielen anderen Konstantensymbole. Im Modell wird dieses c daher als unendliche Zahl α interpretiert. Da dann auch $s(\alpha), ss(\alpha), ...$ und auch alle Vorgänger von α unendliche Zahlen sind, wird das Standardmodell um unendlich viele unendliche Zahlen ergänzt.

Die zweite Möglichkeit basiert auf sogenannten Ultraprodukten. Diese werden wie folgt erstellt:

Seien I eine beliebige nicht-leere Indexmenge und $\mathcal{U}$ ein beliebiger Ultrafilter über I. Für jedes $i \in I$ sei M_i ein Modell mit Bereich A_i. Wir definieren:

$$\mathcal{A} := \prod_{i \in I} A_i$$

wobei damit das Kartesische Produkt gemeint ist. Elemente in A identifizieren wir mit Funktionen.

Nun definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ bezüglich des Ultrafilers $\mathcal{U}$ wie folgt:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$$

Weiter definieren wir:

$$\mathcal{A}/_{\mathcal{U}} := \mathcal{A}/_{\sim} = \{[f] : f \in \mathcal{A}\}.$$

$\mathcal{A}/_{\mathcal{U}}$ ist der Bereich des Ultraprodukts $\mathcal{M}(\mathcal{A}/_{\mathcal{U}})$. Das Ultraprodukt ist ein Modell, daher definieren wir nun die Interpretationen der Konstanten-, Funktions- und Relationssymbole:

- Konstantensymbole: Für jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{L}$, sei f_c die Konstantenfunktion definiert durch $f_c(i) = c^{M_i}$, wobei c^{M_i} das entsprechende Konstantensymbol interpretiert im Modell M_i bezeichnet. Dann ist $c^{\mathcal{M}} := [f_c]$ das Konstantensymbol interpretiert im Modell $\mathcal{M}(\mathcal{A}/_{\mathcal{U}})$.

- Funktionssymbole: Ein Funktionssymbol $F \in \mathcal{L}$ interpretiert in $\mathcal{M}(\mathcal{A}/_{\mathcal{U}})$ wird anhand des Ultrafilters $\mathcal{U}$ definiert.

$$F^{\mathcal{M}}([f_0], ..., [f_n]) = [f] \Leftrightarrow \{i \in I : F^{M_i}(f_0(i), ..., f_n(i)) = f(i)\} \in \mathcal{U}.$$

- Relationssymbole: Analog zu den Funktionssymbolen werden auch die Relationssymbole anhand des Ultrafilters interpretiert:

$$\langle [f_0], ..., [f_n] \rangle \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \{i \in I : \langle f_0(i), ..., f_n(i) \rangle \in R^{M_i}\} \in \mathcal{U}.$$

Falls in der obigen Definition alle A_i gleich sind, also $A_i = A$ für alle $i \in I$, dann spricht man von einer **Ultrapotenz**. Da wir in diesem Fall auch $M_i = M$ für alle $i \in I$ annehmen, verwenden wir für die Ultrapotenz die Notation $\mathcal{M}^I/_{\mathcal{U}}$.

Der folgende Satz sagt uns, wann ein $\mathcal{L}$-Satz im Ultraprodukt $\mathcal{M}(\mathcal{A}/_{\mathcal{U}})$ wahr ist.

Theorem 2.8 (Satz von Łoś)**.** *Sei σ ein beliebiger $\mathcal{L}$-Satz. Dann gilt:*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}/_{\mathcal{U}}) \models \sigma \Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \sigma\} \in \mathcal{U}.$$

Beweis. Der Beweis wird weggelassen. □

Im nächsten Kapitel werden wir uns mit verschiedenen Arten von Ultrafiltern, also Ultrafiltern mit verschiedenen zusätzlichen Eigenschaften, und deren Zusammenhängen beschäftigen.

3 Arten von Filtern

So wie es bei vielen mathematischen Strukturen verschiedene Arten gibt, die sich zwar alle durch ihre Definition als gleiche Struktur zusammenfassen, sich aber innerhalb der Struktur durch weitere Eigenschaften auch unterscheiden lassen, so kann man auch Filter und Ultrafilter anhand ihrer Eigenschaften einordnen. In diesem Kapitel werden einige dieser Eigenschaften zusammengefasst und es soll gezeigt werden, in welchem Verhältnis manche Filterarten zueinander stehen, in anderen Worten, welche unterscheidende Eigenschaften welche anderen implizieren. Die meisten Definitionen und Lemmas in diesem Kapitel sind in [5] zu finden, jedoch wurden die Beweise ergänzt.

3.1 Hauptultrafilter

Die erste und auch eine der wichtigsten, wenn nicht sogar die wichtigste Unterteilung von Ultrafiltern in verschiedene Arten ist die in Hauptultrafilter und Nicht-Hauptultrafilter. Im Folgenden werden wir feststellen, dass lediglich Nicht-Hauptultrafilter zu Nicht-Standardmodellen der Peano Arithmetik führen.

Definition 3.1. *Ein Filter $\mathcal{F}$ über X heisst **Hauptfilter**, wenn er von der Form $\mathcal{F} = \{Z \subseteq X : Y \subseteq Z\}$ ist, wobei Y eine nicht-leere Teilmenge von X ist.*

In Worten bedeutet dies, dass ein Hauptfilter ein Filter bestehend aus allen Obermengen einer bestimmten Teilmenge Y ist. In diesem Fall sagen wir, Y **erzeugt** $\mathcal{F}$. Ein **Hauptultrafilter** ist ein Ultrafilter, der ein Hauptfilter ist.

Die nächsten beiden Lemmas erklären, wann ein Hauptfilter ein Ultrafilter und umgekehrt ist:

Lemma 3.2. *Wenn $\mathcal{F}$ ein Hauptfilter über X ist, dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter genau dann wenn $\mathcal{F}$ von $\{x\}$ erzeugt wird.*

Beweis. Seien $x \in X$ und $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X : x \in Y\}$. Da für jede Menge $Z \subseteq Y$ gilt: entweder $x \in Z$ oder $x \in Z^c$, so gilt auch für jede Menge $Z \subseteq Y$: entweder $Z \in \mathcal{F}$ oder $Z^c \in \mathcal{F}$. Folglich ist nach Definition 2.6 $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.

Umgekehrt sei $\mathcal{F}$ ein Hauptultrafilter. Wir definieren $X_0 = \bigcap\{Y \subseteq X : Y \in \mathcal{F}\}$. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass $X_0 = \{x, y\}$, also, dass $\mathcal{F}$ nicht von einer einelmentigen Menge erzeugt wird. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, gibt es zwei Fälle:

1. Fall: $\{x\} \in \mathcal{F}$, dann wäre $X_0 = \{x\}$, was der Annahme widerspricht.
2. Fall: $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$, dann ist $x \notin X_0$, was der Annahme widerspricht.
Somit ist $X_0 = \{x\}$ und $\mathcal{F}$ wird von $\{x\}$ erzeugt. □

Lemma 3.3. *Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über X. Wenn $\mathcal{U}$ eine endliche Menge enthält, dann ist er ein Hauptultrafilter.*

Beweis. Sei $Y \in \mathcal{U}$.

1. Fall: $|Y| = 1$, d.h. $Y = \{x\}$. Dieses Y erzeugt dann $\mathcal{U}$ und mit Lemma 3.2 ist $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter.

2. Fall: $|Y| \neq 1$. Dann gibt es eine Menge Z, sodass $\emptyset \subset Z \subset Y$ eine Kette echter Teilmengen ist. Dann ist auch $\emptyset \subset (Y \setminus Z) \subset Y$ eine Kette echter Teilmengen. Auch hier gibt es zwei Möglichkeiten:

Entweder Z ist in $\mathcal{U}$. Dann ist $(Y \setminus Z) \notin \mathcal{U}$, denn wenn es in $\mathcal{U}$ wäre, dann müsste auch $Z \cap (Y \setminus Z) = \emptyset$ in $\mathcal{U}$ sein, da Ultrafilter geschlossen bezüglich endlicher Schnitte sind. Dies widerspricht aber der Definition von Filtern.

Oder Z ist nicht in $\mathcal{U}$. Dann ist $(Y \setminus Z) \in \mathcal{U}$, denn wenn $Z \notin \mathcal{U}$ ist, dann ist $Z^c = X \setminus Z \in \mathcal{U}$ wegen der Ultrafiltereigenschaft. Dann ist auch $(Y \setminus Z) = Y \cap (X \setminus Z) \in \mathcal{U}$.

Somit sehen wir, dass eine Menge $Z_0 \subset Y$ existiert, wobei entweder $Z_0 = Z$ oder $Z_0 = (Y \setminus Z)$ gilt, mit $Z_0 \in \mathcal{U}$ und $|Z_0| < |Y|$. Nach endlich vielen Anwendungen dieses Arguments haben wir eine Menge $Z_n = \{z\}$, die $\mathcal{U}$ erzeugt. Also ist $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter. □

Die beiden Lemmas 3.2 and 3.3 zeigen auch, dass es über einer Indexmenge X genau $|X|$ Hauptultrafilter gibt, wovon jeder von einem $\{x\}$ erzeugt wird. Zudem stellen wir fest, dass es über einer endlichen Indexmenge nur Hauptultrafilter gibt, denn jeder Ultrafilter, der eine endliche Menge enthält, ist ein Hauptultrafilter. Dies zeigt uns, dass wir unendliche Indexmengen betrachten müssen, wenn wir ein Ultraprodukt mit einem Nicht-Hauptultrafilter bilden wollen.

Des Weiteren führt die Tatsache, dass jeder Hauptultrafilter $\mathcal{U}$ von einem $\{x\}$ erzeugt wird zu einer wichtigen Erkenntnis über das Modell, das anhand dieses Filters erstellt werden kann, sprich die Ultrapotenz des Standardmodells $\mathcal{N}$ mit Bereich $\mathbb{N}$. Aufgrund der Definitionen der Interpretation von Funktions- und Relationssymbolen stellen wir fest, dass jeder Satz σ im erstellten Modell wahr ist, genau dann wenn er in der x-ten Kopie von $\mathcal{N}$ wahr ist, also genau dann, wenn er im Standardmodell wahr ist. Tatsächlich sind Modelle konstruiert mit Hauptultrafiltern alle isomorph zum Standardmodell, mit anderen Worten, sie sind Standardmodelle. Somit müssen wir, um

Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik zu konstruieren, Nicht-Hauptultrafilter verwenden.

3.2 Nicht-Hauptultrafilter

Definition 3.4. *Ein **Nicht-Hauptultrafilter** ist ein Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist.*

Wie wir bereits gesehen haben, sind die Modelle, die mit Hauptultrafiltern konstruiert werden, nicht allzu spannend. Viel interessanter wird es, wenn wir uns den Nicht-Hauptultrafiltern zuwenden. Darum seien auch hier einige wichtige Eigenschaften festgehalten:

Lemma 3.5. *Wenn ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ kein Hauptultrafilter ist, dann enthält er keine endlichen Mengen.*

Beweis. Kontraposition zu Lemma 3.3 □

Die Existenz von Nicht-Hauptultrafiltern ist durch das folgende Lemma gegeben:

Lemma 3.6. *Wenn X eine unendliche Menge ist, dann gibt es einen Nicht-Hauptultrafilter über X.*

Beweis. Sei $\overline{S}_\omega(X)$ die Menge aller kofiniten Teilmengen von X.

Wir stellen fest:

1. $X \in \overline{S}_\omega(X), \emptyset \notin \overline{S}_\omega(X)$
2. Wenn A in $\overline{S}_\omega(X)$ ist und $A \subseteq B$ gilt, dann gilt $|B^c| \leq |A^c| < \infty$, also gilt auch $B \in \overline{S}_\omega(X)$.
3. Seien A und B in $\overline{S}_\omega(X)$. Wir nehmen an, dass $|A^c| = n, |B^c| = m$, mit $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für den Schnitt $|(A \cap B)^c| = |A^c \cup B^c| \leq |A^c| + |B^c| = n + m < \infty$. Also ist auch $A \cap B \in \overline{S}_\omega(X)$.

Damit sind alle Filtereigenschaften erfüllt und somit kann $\overline{S}_\omega(X)$ mit dem Ultrafiltertheorem zu einem Ultrafilter erweiteret werden. Dieser enthält keine endlichen Mengen und ist somit ein Nicht-Hauptultrafilter. □

Nun können wir uns weiteren Arten von Ultrafiltern widmen und dabei auch in manchen Fällen festhalten, wann es sich um Haupt- oder Nicht-Hauptultrafilter handelt.

3.3 Fréchet-Filter

Definition 3.7. *Der **Fréchet-Filter** FR_X ist die Menge aller kofiniten Teilmengen von X, also $FR_X = \{Y \subseteq X : Y^c$ ist endlich$\}$.*

Im Beweis zum Lemma 3.6 haben wir gezeigt, dass die Menge aller kofiniten Teilmengen von X, $\overline{S}_\omega(X)$, ein Filter ist. Dies entspricht auch genau der Definition des Fréchet-Filters. Wenn wir also Nicht-Hauptultrafilter untersuchen wollen, so betrachten wir eigentlich die Ultrafilter, die den Fréchet-Filter enthalten.

Ausserdem stellen wir fest, dass für eine endliche Menge X jede Teilmenge $Y \subseteq X$ kofinit ist. Insbesondere ist $\emptyset$ kofinit, denn $\emptyset^c = X$ ist endlich. Dies sagt uns, dass es keinen Fréchet-Filter über endlichen Mengen gibt, denn so, wie FR_X definiert wurde, müsste auch $\emptyset \in FR_X$ sein, was der Definition von Filtern widerspricht.

Diese Erkenntnis ist nicht weiter verwunderlich, da wir bereits festgestellt haben, dass es über endlichen Mengen keine Nicht-Hauptultrafilter gibt. Nicht-Hauptultrafilter sind aber Ultrafilter, die den Fréchet-Filter (also keine endlichen Mengen) enthalten. Wir können also in Zukunft immer davon ausgehen, dass wir Ultrafilter über unendlichen Mengen betrachten, selbst wenn es nicht explizit angegeben wird.

3.4 Freie Filter

Definition 3.8. *Ein Filter $\mathcal{F}$ heisst **frei**, wenn gilt: $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$.*

Da Filter geschlossen unter endlichem Durchschnitt sind, gibt es keine freien Filter über endlichen Mengen.

Das nächste Lemma zeigt uns den Zusammenhang von freien Filtern und dem Fréchet-Filter:

Lemma 3.9. *Sei X eine unendliche Menge. Der Fréchet-Filter über X ist frei.*

Beweis. Sei FR_X der Fréchet-Filter über der Menge X. Als Widerspruch nehmen wir an, dass FR_X nicht frei ist. Sei $x \in \bigcap_{F \in FR_X} F$. Weiter sei $Y \in FR_X$ eine beliebige Menge im Filter. Somit ist auch $Y \setminus \{x\} \in FR_X$, denn wenn Y^c endlich ist, dann ist auch $(Y \setminus \{x\})^c = Y^c \cup \{x\}$ endlich. Da x im Schnitt aller Mengen im Filter liegt, gilt auch insbesondere $x \in Y$. Daher gilt: $x \in Y \in FR_X$, aber $x \notin Y \setminus \{x\} \in FR_X$, was der Tatsache widerspricht, dass x im Schnitt aller in FR_X enthaltener Mengen liegt. □

3.5 Uniforme Ultrafilter

Definition 3.10. *Ein Filter $\mathcal{F}$ über X heisst **uniform** wenn alle Mengen $F \in \mathcal{F}$ die gleiche Kardinalität wie X haben d.h. wenn $|\mathcal{F}| = |X|$ gilt.*

Die Existenz von uniformen Ultrafiltern ist gegeben durch das folgende Lemma:

Lemma 3.11. *Wenn X eine unendliche Menge ist, dann gibt es einen uniformen Ultrafilter $\mathcal{U}$ über X.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $|X| = \alpha$ gilt, wobei α nach Voraussetzung eine unendliche Zahl ist. Wir definieren $\overline{S}_\alpha(X) = \{Y \subseteq X : |Y^c| < \alpha\}$, in Worten: Die Menge aller Teilmengen von X, deren Komplement eine kleinere Kardinalität als α haben.

Wir stellen fest:

1. $X \in \overline{S}_\alpha(X)$, $\emptyset \notin \overline{S}_\alpha(X)$
2. Wenn A in $\overline{S}_\alpha(X)$ ist und $A \subseteq B$ gilt, dann gilt $|B^c| \leq |A^c| < \alpha$, also gilt auch $B \in \overline{S}_\alpha(X)$.
3. Wenn A und B in $\overline{S}_\alpha(X)$ sind, dann ist auch $A \cap B$ in $\overline{S}_\alpha(X)$, da α eine unendliche Zahl ist.

Somit sind alle Filtereigenschaften aus Definition 2.3 erfüllt und mit dem Ultrafiltertheorem wissen wir, dass $\overline{S}_\alpha(X)$ zu einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ über X erweitert werden kann. Dieser Ultrafilter enthält sicherlich keine Mengen mit Kardinalität $< \alpha$, womit die Uniformität von $\mathcal{U}$ gezeigt ist. □

Nun setzen wir uniforme Ultrafilter und Nicht-Hauptultrafilter in Zusammenhang:

Lemma 3.12. *Sei X eine unendliche Menge. Dann stimmen die Mengen der Nicht-Hauptultrafilter über X und die der uniformen Ultrafiltern über X überein genau dann, wenn X abzählbar ist.*

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass alle uniformen Ultrafilter keine Hauptultrafilter sind. Dies folgt aus der Tatsache, dass ein Hauptultrafilter von einer Menge $\{x\}$ erzeugt wird und $|\{x\}| = 1 < |X|$ gilt.

Sei X abzählbar. Dann zeigt Lemma 3.5, dass jeder Nicht-Hauptultrafilter über X uniform ist, da er keine endlichen Mengen enthält. Somit ist die eine Richtung des Beweises gezeigt.

Für die andere Richtung nehmen wir als Widerspruch an, X sei überabzählbar. Sei also $|X| = \alpha > \aleph_0$. Sei $\beta < \alpha$ eine andere unendliche Zahl und sei $Y \subset X$ eine Teilmenge mit Kardinalität β. Wir definieren $G := \{S \subseteq X : Y \setminus S \text{ ist endlich }\}$.

Wir stellen fest, dass G geschlossen unter endlichen Schnitten ist und sowohl X als auch Obermengen von in G enthaltenen Mengen enthält. Tatsächlich enthält G alle Elemente von $\overline{S}_\omega(X)$. Daher kann G zu einem Nicht-Hauptultrafiler $\mathcal{U}$ erweitert werden. Allerdings gilt $Y \in G \subseteq \mathcal{U}$, aber $|Y| < |X|$, also ist $\mathcal{U}$ nicht uniform. Dies vervollständigt den Beweis. □

3.6 α-vollständige und α-unvollständige Ultrafilter

Definition 3.13. *Sei α eine unendliche Kardinalszahl. Ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ über X heisst α-vollständig wenn, falls $\{Y_n : n < \alpha\}$ Mengen in $\mathcal{F}$ sind, auch $\bigcap\{Y_n : n < \alpha\}$ in $\mathcal{F}$ ist.*

Die nächsten Lemmas zeigen, dass α-Vollständigkeit respektive α-Unvollständigkeit eng damit zusammenhängen, ob ein Ultrafilter ein Hauptfilter ist oder nicht.

Lemma 3.14. *Ein Hauptultrafilter ist α-vollständig für alle α.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter über X erzeugt von $\{x\}$. Weiter sei für ein frei gewähltes α $\{Y_n : n < \alpha\}$ eine beliebige Sammlung von Mengen in $\mathcal{U}$. Dann ist $\{x\} \subseteq \bigcap\{Y_n : n < \alpha\}$ und da ein Ultrafilter Obermengen enthält, ist auch $\bigcap\{Y_n : n < \alpha\} \in \mathcal{U}$. Also ist $\mathcal{U}$ α-vollständig und da α beliebig gewählt war, ist $\mathcal{U}$ α-vollständig für alle α. □

Lemma 3.15. *Sei X eine abzählbare Menge mit $|X| = \alpha$. Dann gibt es keinen α-vollständigen Nicht-Hauptultrafilter über X.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ ein Nicht-Hauptultrafilter über X und sei $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ eine Aufzählung von X. Für $\xi < \alpha$ definieren wir $X_\xi = X \setminus \{x_\xi\}$. Da $\mathcal{U}$ ein Nicht-Hauptultrafilter ist, ist jede Menge X_ξ in $\mathcal{U}$ enthalten. Allerdings ist $\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi = \emptyset \notin \mathcal{U}$ nach der Definition von Filtern. Somit ist $\mathcal{U}$ nicht α-vollständig. □

Lemma 3.16. *Alle Nicht-Hauptultrafilter über einer abzählbaren Menge sind ω-unvollständig.*

Beweis. Folgt aus Lemma 3.15. □

3.7 Reguläre Ultrafilter

Definition 3.17. *Sei X eine Menge und $S_\omega(X)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X. Ein (Ultra)Filter $\mathcal{F}$ heisst **regulär**, wenn es eine Bijektion $f : X \longrightarrow S_\omega(X)$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt: $\{y \in X : x \in f(y)\} \in \mathcal{F}$.*

Die folgenden beiden Lemmas zeigen die Existenz von regulären Ultrafiltern und ihr Zusammenhang mit Uniformität und ω-Unvollständigkeit.

Lemma 3.18. *Sei X eine unendliche Menge. Dann gibt es einen regulären Ultrafilter über X.*

Beweis. Sei f eine bijektive Funktion von X nach $S_\omega(X)$. Wir definieren für jedes $x \in X$ die Menge $E_x := \{y \in X : x \in f(y)\}$. Sei $E = \{E_x : x \in X\}$.

Wir können verifizieren, dass E die Filtereigenschaften erfüllt. Hier soll nur beispielhaft die Geschlossenheit unter endlichen Schnitten gezeigt werden.

Seien E_{x_1} und E_{x_2} Mengen in E. $\{x_1, x_2\}$ ist eine endliche Teilmenge von X, ebenso wie $f(x_0)$ für ein $x_0 \in X$. Wenn x_0 richtig gewählt wurde, dann ist $x_i \in f(x_0)$ für $i = 1, 2$. Nach der Definition von E_x ist somit $x_0 \in E_{x_1}$ und $x_0 \in E_{x_2}$ und folglich $x_0 \in E_{x_1} \cap E_{x_2}$. Somit gibt es ein $E_{x_0} = E_{x_1} \cap E_{x_2} \in E$.

Also ist E ein Filter und kann mit dem Ultrafiltertheorem zu einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ erweitert werden. Dieser Ultrafilter ist nach Konstruktion regulär. □

Lemma 3.19. *Sei X eine unendliche Menge. Jeder reguläre Ultrafilter über X ist ω-unvollständig und uniform.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein regulärer Ultrafilter über der unendlichen Menge X. Dann gibt es eine Bijektion f von X nach $S_\omega(X)$ so dass für alle $x \in X$ die Menge $\{y \in X : x \in f(y)\} \in \mathcal{F}$.

Zuerst zeigen wir, dass $\mathcal{F}$ ω-unvollständig ist.

Sei $\{x_n : n \in \omega\}$ eine abzählbare unendliche Teilmenge von X. Für $n \in \omega$ definieren wir

$$X_n := \{x \in X : x_n \in f(x)\}.$$

Da $\mathcal{F}$ regulär ist, ist jedes X_n in $\mathcal{F}$. Allerdings gilt:

$$\bigcap_{n\in\omega} X_n = \{x \in X : \text{für alle } n \in \omega \text{ gilt } x_n \in f(x)\} = \emptyset$$

Da $\mathcal{F}$ ein Filter ist, ist $\emptyset$ nicht in $\mathcal{F}$. Somit ist auch der obige Schnitt nicht in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ ist ω-unvollständig.

Als Zweites zeigen wir die Uniformität von $\mathcal{F}$. Dazu sei $Y \subset X$ eine echte Teilmenge d.h. $|Y| < |X|$.

Dann gilt:

$$|\bigcap_{y \in Y} f(y)| < |X|$$

Somit existiert ein $x_0 \in X \setminus \bigcap_{y \in Y} f(y)$. Wenn ein $x \in X$ die Eigenschaft hat, dass $x_0 \in f(x)$, dann ist x nicht in Y, sonst müsste x_0 in $\bigcap_{x \in Y} f(x)$ sein.

Also gilt $\{x \in X : x_0 \in f(x)\} \subseteq X \setminus Y$.

Da $\{x \in X : x_0 \in f(x)\} \in \mathcal{F}$ ist und $\mathcal{F}$ ein Filter ist und daher Obermengen enthält, ist auch $X \setminus Y \in \mathcal{F}$. Wegen der Ultrafiltereigenschaft wissen wir, dass also $Y \notin \mathcal{F}$. Weil Y eine bliebige Menge mit kleinerer Kardinalität als X war, zeigt dies, dass $\mathcal{F}$ nur Mengen mit gleicher Kardinalität wie X enthält. Somit ist $\mathcal{F}$ uniform. □

4 Ramsey Ultrafilter

Die letzte Art von Filtern in unserer Liste sind Ramsey Ultrafilter. Sie stehen in engem Zusammenhang mit einem bestimmten Zweig der Kombinatorik, nämlich der Ramseytheorie. In der Ramseytheorie wird grob gesagt die Frage behandelt, in welchen Teilmengen eines mit einer bestimmten Struktur versehenen mathematischen Objekts man diese Struktur wiederfinden kann. Typischerweise betrachtet man Kolorierungen des gegebenen Objekts und fragt sich, welche monochromatischen Strukturen vorhanden sind.

Mit dieser sehr kurzen Beschreibung der Ramseytheorie im Hinterkopf können wir uns der Definition von Ramsey Ultrafiltern widmen. Die dazu verwendete Literatur besteht hauptsächlich aus [3], [14] und [15].

Definition 4.1. *Für eine gegebene Menge X der Kardinalität k definieren wir*

$$[X]^k = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}$$

Theorem 4.2 (Satz von Ramsey)**.** *Wann immer $k, r \in \mathbb{N}$ und $[\omega]^k$ r-farbig ist, dann gibt es eine unendliche Menge $A \subseteq \omega$, sodass $[A]^k$ monochrom ist.*

Nun können wir Ramsey Ultrafilter definieren:

Definition 4.3. *Ein Ultrafiler $\mathcal{U}$ heisst **Ramsey Ultrafilter** falls, wann immer $k, r \in \mathbb{N}$ und $[X]^k$ r-farbig ist, es eine Menge $A \in \mathcal{U}$ gibt, sodass $[A]^k$ monochrom ist.*

Das folgende Theorem zeigt uns, dass wir auch eine äquivalente Definition wählen könnten:

Theorem 4.4. *Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über ω. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{U}$ ist Ramsey

(2) Für jede 2-Färbung von $[\omega]^2$, gibt es ein A in $\mathcal{U}$, sodass $[A]^2$ monochrom ist.

(3) Für jede Partition $\{A_n : n < \omega\}$ von ω gilt entweder $A_n \in \mathcal{U}$ für ein $n < \omega$ oder es gibt ein A in $\mathcal{U}$ sodass $|A \cap A_n| \leq 1$ für alle $n < \omega$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Offensichtlich wahr für $k = r = 2$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $\{A_n : n < \omega\}$ eine Partition von ω. Wir definieren eine Funktion $\pi : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\pi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{x, y\} \subseteq A_n \text{ für ein } n < \omega \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Annahme (2) sagt uns, dass es ein $A \in \mathcal{U}$ gibt, sodass $[A]^2$ monochrom ist. Da π eine 2-Färbung von $[\omega]^2$ ist und alle zweielementigen Teilmengen von A die gleiche Farbe haben, ist dies gleichbedeutend mit $\pi \mid_{[A]^2}$ ist konstant.

Falls $\pi \mid_{[A]^2}$ konstant 0 ist, dann gibt es ein n, sodass $A \subseteq A_n$ gilt und da A in $\mathcal{U}$ ist und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, ist auch $A_n \in \mathcal{U}$. Somit ist (3) erfüllt.

Falls $\pi \mid_{[A]^2}$ konstant 1 ist, dann gilt für jede Teilmenge $\{x, y\} \subseteq A$ und jedes n, dass $\{x, y\} \nsubseteq A_n$. Dies bedeutet, dass $|\{x, y\} \cap A_n| \leq 1$ für jede zweielementige Teilmenge von A, also gilt auch $|A \cap A_n| \leq 1$. Somit ist (3) erfüllt.

(3) $\Rightarrow$ (1) Wir beweisen dies durch Induktion über k für ein festes r.

Für die Induktionsverankerung betrachten wir k=1. Dieser Fall ist offensichtlich wahr.

Nehmen wir nun an, dass (1) für ein beliebiges aber festes k gilt. Wir nehmen weiter an, die Funktion $\pi : [\omega]^{k+1} \to \{0, 1, 2, ..., r-1\}$ ist eine r-Färbung von $[\omega]^{k+1}$.

Für jedes $n < \omega$ definieren wir $\pi_n : [\omega]^k \to \{0, 1, 2, ..., r-1\}$ gegeben durch

$$\pi_n(A) = \begin{cases} \pi(A \cup \{n\}) & \text{falls } \min(A) > n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da (1) für unser fixiertes k gilt, finden wir für jedes $n < \omega$ ein $B_n \in \mathcal{U}$, sodass $[B_n]^k$ monochrom ist (aufgrund der Ramsey-Eigenschaft). Dies bedeutet, dass es ein $l_n < r$ gibt, sodass $\pi_n([B_n]^k)$ konstant gleich l_n ist.

Wir können die Indizes so anordnen, dass wir annehmen können, dass $\min(B_n) < n$ gilt und $(B_n)_{n<\omega}$ eine streng abnehmende Folge ist.

So erhalten wir eine Partition $C_n = \{B_n \setminus B_{n+1} : n < \omega\}$ von B_0, wobei jedes C_n nicht-leer ist.

Wir verwenden nun die angenommene Eigenschaft (3) und stellen fest, dass es eine Folge $(c_n)_{n<\omega}$ mit $c_n \in C_n$ gibt, sodass wir $C = \{c_n : n < \omega\} \in \mathcal{U}$ definieren können. (In der Tat ist so $|C \cap C_n| \leq 1$.)

Wir können Folgendes bemerken: Wann immer wir eine Folge $j_0 < j_1 < j_2 < ... < j_k < \omega$ mit $j_1 \geq c_{j_0}$ haben, dann gilt

$$\pi(\{c_{j_0}, c_{j_1}, c_{j_2}, ..., c_{j_k}\}) = \pi_{c_{j_0}}(\{c_{j_1}, c_{j_2}, ..., c_{j_k}\}) = l_{c_{j_0}}$$

Nun definieren wir rekursiv eine aufsteigende Folge $(n_k)_{k\in\omega}$ gegeben durch $n_0 = 0$ und $n_{k+1} = \max\{n_k + 1, \max\{c_n : n < n_k\}\}$. Die Intervalle $[n_k, n_{k+1})$ bilden nun eine Partition von ω. Somit können wir erneut (3) anwenden und erhalten so, dass es eine Menge $N \subseteq \omega$ gibt, sodass $|N \cap [n_k, n_{k+1})| \leq 1$ für alle $k < \omega$ und $\{c_n : n \in N\} \in \mathcal{U}$.

Wir teilen nun diese Intervalle in diejenigen, die mit geraden Zahlen anfangen und diejenigen, deren Anfangspunkt ungerade ist. Damit definieren wir die folgenden beiden Mengen:

$$N_0 = N \cap \bigcup_{k<\omega}[n_{2k}, n_{2k+1}); \quad N_1 = N \cap \bigcup_{k<\omega}[n_{2k+1}, n_{2k+2}$$

Dann gibt es ein $s \in \{0, 1\}$ sodass $N_s \in \mathcal{U}$ gilt. Ausserdem stellen wir fest, dass aufgrund der Definition für beide möglichen s gilt, wenn n_j in N_s ist, frühestens wieder n_{j+2} in N_s sein kann, aber nicht n_{j+1}.

Daher finden wir für alle $n, m \in N_s$ (O.B.d.A. können wir annehmen, dass $n < m$) ein $k < \omega$, sodass $n < n_k < n_{k+1} \leq m$. Nach der Definition von n_{k+1} muss daher auch $m \geq c_n$ gelten.

Zum Schluss finden wir ein $l < r$, sodass die Menge $A = \{c_n : n \in N_s \text{ und } l_{c_n} = l\}$ in $\mathcal{U}$ ist. Dies ist unsere gesuchte Menge A mit der Eigenschaft $\pi([A]^{k+1}) = \{l\}$, mit anderen Worten: Die Funktion ist konstant und $[A]^{k+1}$ somit monochrom. Dies schliesst den Beweis durch Induktion.

□

Da wir nun über drei äquivalente Definitionen von Ramsey Ultrafiltern verfügen, wird es Zeit zu zeigen, dass es Ramsey Ultrafilter überhaupt gibt. Diese Existenz zeigt uns ein Theorem, für das wir allerdings noch etwas Vorarbeit benötigen.

Definition 4.5. *Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen von X. $\mathcal{F}$ hat die **starke Eigenschaft der endlichen Schnitte (SEES)**, falls für jede endliche Unterfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ der Schnitt $\bigcap \mathcal{G}$ unendlich ist.*

Definition 4.6. *Sei X eine Menge. Wir sagen eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist ein **Pseudo-Schnitt** einer Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ wenn $A \setminus B$ für alle $B \in \mathcal{F}$ endlich ist.*

Definition 4.7. *Die **Pseudo-Schnitt Nummer** $\mathfrak{p}$ ist die kleinste Kardinalität einer Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, die die SEES, aber keine unendlichen Pseudo-Schnitte aufweist.*

Theorem 4.8. *Sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Dann gibt es einen Nicht-Haupt Ramsey Ultrafilter über ω.*

Beweis. Sei $\{X_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ eine Aufzählung von $\mathcal{P}(\omega)$ und $\{\pi_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ eine Aufzählung von 2-Färbungen $\pi : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$.

Wir definieren rekursiv eine Folge $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{c}}$ von unendlichen Teilmengen von ω mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $\beta < \alpha, |A_\alpha \setminus A_\beta| < \omega$.
(ii) $[A_\alpha]^2$ ist monochrom mit Respekt für π_α.
(iii) Entweder $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ oder $A_\alpha \subseteq \omega \setminus X_\alpha = X_\alpha^c$.

Der Satz von Ramsey sagt uns, dass es ein unendliches $B_0 \subseteq \omega$ gibt, sodass $[B_0]^2$ monochrom ist, sprich $\pi_0([B_0]^2) = \{k\}$ für ein konstantes k. Wir definieren A_0 gegeben durch:

$$A_0 = \begin{cases} B_0 \cap X_0 & \text{falls } |B_0 \cap X_0| = \omega \\ B_0 \cap (\omega \setminus X_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, wir haben die Folge $(A_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ für ein beliebiges aber festes γ bereits so konstruiert, dass die Bedingungen (i)-(iii) für alle $\alpha < \gamma$ erfüllt sind.

Da $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ gilt, finden wir ein $C_\gamma \subseteq \omega$, sodass $|C_\gamma \setminus \mathcal{A}_\alpha| < \omega$ für alle $\alpha < \gamma$. Nun können wir ein unendliches $B_\gamma \subseteq C_\gamma$ wählen, sodass $[B_\gamma]^2$ monochrom mit Respekt für π_γ ist. Ausgehend davon können wir nun A_γ definieren als:

$$A_\gamma = \begin{cases} B_\gamma \cap X_\gamma & \text{falls } |B_\gamma \cap X_\gamma| = \omega \\ B_\gamma \cap (\omega \setminus X_\gamma) & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit haben wir rekursiv eine Folge $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{c}}$ definiert, die die verlangten Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt. Nun definieren wir:

$$\mathcal{U} = \{A \subseteq \omega : |A_\alpha \setminus A| < \omega \text{ für ein } \alpha \in \mathfrak{c}\}$$

Dieses $\mathcal{U}$ ist ein Nicht-Haupt Ramsey Ultrafilter.

Um dies zu sehen, können zuerst die Filter-Eigenschaften überprüft werden. Hier soll nur exemplarisch die zweite Eigenschaft explizit gezeigt werden:

Sei $A \in \mathcal{U}$ und $A \subseteq B$. Da $A \in \mathcal{U}$ ist, ist $|A_\alpha \setminus A| < \omega$ für ein α. Wir sehen nun, dass $|A_\alpha \setminus B| \leq |A_\alpha \setminus A| < \omega$. Also ist $B \in \mathcal{U}$.

Weiter stellen wir fest, dass $\mathcal{U}$ in der Tat ein Ultrafilter ist und dass er keine endlichen Mengen enthalten kann. Somit ist nach Lemma 3.3 $\mathcal{U}$ kein Hauptultrafilter. Die Ramsey-Eigenschaft folgt aus der Konstruktion. □

Damit haben wir nun einige Arten von Ultrafiltern mit unterschiedlichen Eigenschaften und ihre Zusammenhänge kennengelernt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir uns nun fragen, welche Beziehung zwischen isomorphen oder nicht-isomorphen Ultrafiltern und ihren Ultrapotenzen bestehen. Dabei interessieren wir uns nur für Nicht-Hauptultrafilter, da Ultrapotenzen mit Hauptultrafiltern immer das Standardmodell ergeben. Wenn im Folgenden also von Ultrafiltern die Rede ist, können wir sie für uns immer auf den interessanten Fall der Nicht-Hauptultrafilter einschränken. Mit diesem Hintergrund im Kopf wollen wir also wissen: Führen isomorphe Ultrafilter zu isomorphen Ultrapotenzen, in unserem Fall also zu isomorphen Nicht-Standardmodellen der Peano Arithmetik? Und sind die Ultrapotenzen nicht-isomorpher Ultrafilter auch immer nicht-isomorph?

Diese Untersuchung beginnen wir leicht historisch angehaucht mit den Isomorphismustheoremen von Keisler und Shelah. Diese beschäftigen sich zwar noch nicht mit der Isomorphie von Ultrafiltern, aber mit der von Ultrapotenzen.

5 Das Isomorphismustheorem von Keisler und Shelah

Beschäftigt man sich mit isomorphen Ultrafiltern, Ultraprodukten und Modellen, so stösst man mit Sicherheit früher oder später auf das Isomorphismustheorem von Keisler und Shelah. Umgangssprachlich sagt dieses Theorem, dass zwei Modelle genau dann elementar äquivalent sind, wenn ihre Ultrapotenzen isomorph sind.

Die eine Richtung (isomorphe Ultrapotenzen implizieren elementar äquivalente Modelle) ist sehr viel einfacher zu zeigen als die Gegenrichtung und wurde bereits von Łoś bewiesen. Wir erinnern uns an den Satz von Łoś:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}/_{\mathcal{U}}) \models \sigma \Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \sigma\} \in \mathcal{U}.$$

Da wir von Ultrapotenzen sprechen, ist jedes $M_i = M$, folglich ist die Menge auf der rechten Seite immer ganz I, welches per Definition in $\mathcal{U}$ ist. Dementsprechend ist jeder Satz σ, der in M wahr ist, auch im Ultraprodukt wahr und umgekehrt. Mit anderen Worten: M und $\mathcal{M}(\mathcal{A}/_{\mathcal{U}})$ sind elementar äquivalent. Nun bleibt uns nur noch festzustellen, dass isomorphe Modelle offensichtlich auch elementar äquivalent sein müssen. Damit haben wir gezeigt, dass isomorphe Ultrapotenzen elementar äquivalente Modelle implizieren.

Für das Isomorphismustheorem (insbesondere die andere Richtung) gibt es verschiedene Beweise. Den ersten Beweis veröffentlichte Howard Jerome Keisler im Jahre 1961, ein zweiter, ebenfalls von Keisler, folgte 1964. Beide Beweise verwendeten die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (VKH). Im Jahre 1972 publizierte Saharon Shelah einen dritten Beweis, welcher auf die VKH verzichtete [13].

Im Folgenden werden verschiedene Versionen des Isomorphismustheorems dargelegt:

Theorem 5.1 (Keisler). *([7, S. 486]) Wir nehmen an, κ sei eine beliebige Kardinalzahl $\geq \omega$ und $2^\kappa = \kappa^+$. Weiter seien I eine Indexmenge mit $|I| = \kappa$ und $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ zwei Modelle mit den Bereichen A resp. B, sodass $|A| \leq 2^\kappa$ und $|B| \leq 2^\kappa$. Dann sind die Folgenden äquivalent:*

(i) Es gibt Ultrafilter $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ über I, sodass $\mathcal{M}^I/_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{N}^I/_{\mathcal{V}}$

(ii) $M \equiv_e N$

Beweis (skizziert). Eigentlich zeigt Keisler zuerst ein allgemeineres Theorem, von welchem das obige Isomorphismustheorem ein Spezialfall ist.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Wir nehmen an (i) gilt, aber es gibt einen Satz ϕ, sodass $\mathcal{M} \models \phi$ und $\mathcal{N} \models \neg\phi$. Da wir die Ultrapotenz betrachten, sprich wir nur Kopien desselben Modells

verwenden, ist $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi\} = I \in \mathcal{U}$ für jeden beliebigen Ultrafilter $\mathcal{U}$. Der Satz von Łoś sagt uns, dass dann auch ${}^{\mathcal{M}^I}\!/_{\mathcal{U}} \models \phi$. Analog gilt auch $\{i \in I : \mathcal{N}_i \models \neg\phi\} = I \in \mathcal{V}$ und daher ${}^{\mathcal{N}^I}\!/_{\mathcal{V}} \models \neg\phi$. Dies widerspricht aber der Annahme, dass die Ultrapotenzen isomorph sind. Also kann es keinen Satz geben, der in $\mathcal{M}$ wahr ist und in $\mathcal{N}$ nicht, was wiederum $\mathcal{M} \equiv_e \mathcal{N}$ bedeutet.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Diese Richtung ist wesentlich schwieriger und verwendet einige Definitionen, die nicht in dieser Arbeit vorkommen. Daher wird hier nur das Vorgehen in einzelnen Schritten dargelegt, wobei der Inhalt der Schritte grob umrissen wird. Für einen vertieften Beweis, siehe [7].

Schritt 1: Finde mithilfe des Wohlordnungsprinzips zwei Folgen a und b beide mit Definitionsbereich κ^+ und den Lösungsmengen A resp. B.

Schritt 2: Definiere eine Menge F als die Menge aller $c \times d$, welche für ein $\xi < \kappa^+$ drei bestimmte Eigenschaften erfüllt, von welchen die dritte Eigenschaft lautet: Es gibt keinen Satz Φ, sodass $\{i \in I : \Phi \in (\mathcal{N}, c(i))^*\} \in \overline{S}_\kappa(I)$ und $\{i \in I : (\neg\Phi) \in (\mathcal{M}, d(i))^*\} \in \overline{S}_\kappa(I)$. In diesem Fall bedeutet * die Menge aller wahren Aussagen.

Schritt 3: Finde eine maximale Kette G in F, sodass in $\bigcup G$ die obigen Bedingungen erfüllt sind und für ein $\xi \leq \kappa^+$ $c \in A^\xi$ und $d \in B^\xi$ ist.

Schritt 4: Überprüfe die Fälle $\xi = 0$ und $\xi > 0$ und stelle fest, dass der erste Fall trivial ist und im zweiten Fall $\xi = \kappa^+$ gilt.

Schritt 5: Nutze die dritte Eigenschaft aus Schritt 2 um die Mengen $Y(\Phi) = \{i \in I : \Phi \in (N, c(i))^*\}$, $Z(\Phi) = \{i \in I : \Phi \in (M, d(i))^*\}$ und dann diese Mengen und das Ultrafiltertheorem um die Ultrafilter $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ über I zu definieren.

Schritt 6: Definiere einen Isomorphismus $f : {}^{\mathcal{N}^I}\!/_{\mathcal{U}} \to {}^{\mathcal{M}^I}\!/_{\mathcal{V}}$.

□

In einem späteren Artikel hat Keisler dieses Theorem reformuliert und dabei aus zwei Ultrafiltern einen gemacht hat (siehe [6]). Es wird hier ohne Beweis wiedergegeben:

Theorem 5.2 (Keisler). *Sei $2^\kappa = \kappa^+$. Weiter sei $|\mathcal{L}| \leq \kappa$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ Modelle mit Kardinalität $\leq 2^\kappa$ und $\mathcal{M} \equiv_e \mathcal{N}$. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ über einer Menge I mit $|I| = \kappa$, sodass ${}^{\mathcal{M}^I}\!/_{\mathcal{U}} \cong {}^{\mathcal{N}^I}\!/_{\mathcal{U}}$.*

Die Version von Shelah verwendet zwar nicht die Kontinuumshypothese, doch dafür gilt sie auch nur für überabzählbare Indexmengen I.

Theorem 5.3 (Shelah). *([11], [6]) Seien M, N zwei Modelle mit den Bereichen A resp. B, sodass $|A| < \kappa$ und $|B| < \kappa$ für eine Kardinalzahl κ und $M \equiv_e N$. Weiter sei I eine Indexmenge mit $|I| = 2^\kappa$. Dann gilt: ${}^{\mathcal{M}^I}\!/_{\mathcal{U}} \cong {}^{\mathcal{N}^I}\!/_{\mathcal{U}}$.*

Diese Theoreme erläutern also, dass isomorphe Ultrapotenzen zu elementar äquivalenten Modellen und elementar äquivalente Modelle zu isomorphen Ultrapotenzen führen. Natürlich zeigt das auch, dass isomorphe Modelle (welche insbesondere elementar äquivalent sind) isomorphe Ultrapotenzen implizieren. Wir haben hier also Eigenschaften der Modelle angenommen und gezeigt, wie sich diese auf die Ultrapotenzen übertragen, ohne jedoch ein genaues Augenmerk auf die Ultrafilter zu richten. Nun wollen wir es anders herum machen: Wir betrachten die Isomorphie oder auch Nicht-Isomorphie von Ultrafiltern und schauen, was diese für die Ultrapotenzen bedeuten. Da wir Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik erhalten wollen, sind es immer Ultrapotenzen des Standardmodells $\mathcal{N}$ mit Bereich $\mathbb{N}$.

6 Die Kategorie der Ultrafilter

Nun wollen wir untersuchen, wie sich (nicht-)isomorphe Ultrafilter auf die Ultrapotenzen von $\mathcal{N}$ auswirken, sprich, ob (nicht-)isomorphe Ultrafilter zu (nicht-)isomorphen Modellen führen. Um es einfacher zu machen, über Isomorphismen von Ultrafiltern zu sprechen, werden wir eine Kategorie definieren, deren Objekte Ultrafilter sind und deren Morphismen Funktionen zwischen Ultrafiltern sind. Dazu müssen wir zuerst definieren, was das Bild eines Ultrafilters unter einer Funktion ist.

Die Ergebnisse in diesem Kapitel können wiederum in verschiedenen Büchern gefunden werden, hier wurde als Vorlage aber hauptsächlich [2] verwendet. Viele der Beweise sind jedoch hier ausführlicher aufgeschrieben, auf die in dieser Arbeit zu untersuchende Situation angepasst oder zusätzlich eingefügt worden.

Definition 6.1. *Seien X und Y zwei Mengen, $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über X und $f : X \to Y$ eine Funktion. Das **Bild von $\mathcal{U}$ unter** f ist der Ultrafilter $f(\mathcal{U}) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{U}\}$*

In der Tat ist $f(\mathcal{U})$ ein Ultrafilter über Y:

Beweis. Per Definition ist klar, dass $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Es bleibt demnach nur zu zeigen, dass $f(\mathcal{U})$ tatsächlich ein Ultrafilter ist. Wir zeigen also die Definition:

(i) $f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\} = X$, also ist $Y \in f(\mathcal{U})$. Ausserdem ist $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X : f(x) \in \emptyset\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$, also ist $\emptyset \notin f(\mathcal{U})$.

(ii) Sei $A \in f(\mathcal{U})$ und $A \subseteq B$. Also ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ und wir wollen zeigen, dass auch $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ ist. Dazu stellen wir fest, dass $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \subseteq \{x \in X : f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$ da $A \subseteq B$. Weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, wissen wir, dass $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ impliziert, dass auch $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$. Folglich ist $B \in f(\mathcal{U})$.

(iii) Seien $A \in f(\mathcal{U})$ und $B \in f(\mathcal{U})$. Per Definition sind dann $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ und da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist auch $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$. Aber $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in A\} \cap \{x \in X : f(x) \in B\} = \{x \in X : f(x) \in A \wedge f(x) \in B\} = \{x \in X : f(x) \in (A \cap B)\} = f^{-1}(A \cap B)$, also ist $A \cap B \in f(\mathcal{U})$.

Somit ist $f(\mathcal{U})$ ein Filter über Y.

(iv) Sei $B \in f(\mathcal{U})$, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$. Wir wollen zeigen, dass $B^C \notin f(\mathcal{U})$, also $f^{-1}(B^C) \notin \mathcal{U}$ ist. Da eine Funktion linkstotal sein muss, stellen wir fest:

$f^{-1}(B^C) = \{x \in X : f(x) \in B^C\} = \{x \in X : f(x) \notin B\} = \{x \in X : f(x) \in B\}^C = (f^{-1}(B))^C$

Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist und $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ gilt, ist in der Tat $(f^{-1}(B))^C = f^{-1}(B^C) \notin \mathcal{U}$.

Dasselbe gilt auch umgekehrt: Wenn $B^C \in f(\mathcal{U})$ ist, dann ist $f^{-1}(B^C) \in \mathcal{U}$ und somit $(f^{-1}(B^C))^C = ((f^{-1}(B))^C)^C = (f^{-1}(B)) \notin \mathcal{U}$, also $B \notin f(\mathcal{U})$.

□

Einige Eigenschaften solcher Bilder sind im folgenden Lemma festgehalten:

Lemma 6.2. *Seien X, Y und Z Mengen, $\mathcal{U}$ ein Utrafilter über X und $f, f' : X \to Y$, $g, g' : Y \to Z$ Funktionen.*

(1) Wenn $\mathcal{B}$ eine Filterbasis für $\mathcal{U}$ ist, dann ist $\mathcal{B}' = \{f(A) : A \in \mathcal{B}\}$ eine Basis für $f(\mathcal{U})$.

(2) $(g \circ f)(\mathcal{U}) = g(f(\mathcal{U}))$

(3) Sei id die Identität auf X. Dann ist $id(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

(4) Wenn $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter erzeugt von $\{x\}$ ist, dann ist $f(\mathcal{U})$ ein Hauptultrafilter erzeugt von $\{f(x)\}$.

(5) Wenn $f \equiv f'$ mod $\mathcal{U}$ ist, dann ist $f(\mathcal{U}) = f'(\mathcal{U})$.

(6) Wenn $f \equiv f'$ mod $\mathcal{U}$ ist, dann ist $g \circ f \equiv g \circ f'$ mod $\mathcal{U}$.

(7) $g \equiv g'$ mod $f(\mathcal{U})$ genau dann wenn $g \circ f \equiv g' \circ f$ mod $\mathcal{U}$.

Beweis. (1) Offensichtlich ist $\mathcal{B}'$ eine Teilmenge von $f(\mathcal{U})$. Wir müssen zeigen, dass es tatsächlich eine Filterbasis ist.

Sei $B \in f(\mathcal{U})$. Dann ist per Definition $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \in \mathcal{U}$. Sei A eine Menge in der Filterbasis $\mathcal{B}$, sodass $A \subseteq f^{-1}(B)$. Dann ist $f(A)$ eine Teilmenge von B. Also $f(\mathcal{U}) \subseteq \{B \subseteq Y : \exists f(A) \in \mathcal{B}' \text{ s.d. } f(A) \subseteq B\}$.

Sei $B \in \{B \subseteq Y : \exists f(A) \in \mathcal{B}' \text{ s.d.} f(A) \subseteq B\}$. Da $f^{-1}(B)$ definiert ist als $\{x \in X : f(x) \in B\}$ und $f(A) \subseteq B$ gilt, muss $f^{-1}(f(A)) = A \subseteq f^{-1}(B)$ sein. Da $A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ ist, muss auch $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ sein. Damit ist gezeigt: $f(\mathcal{U}) = \{B \subseteq Y : \exists f(A) \in \mathcal{B}'$ s.d. $f(A) \subseteq B\}$. Also ist $\mathcal{B}'$ eine Filterbasis für $f(\mathcal{U})$.

(2)

$$\begin{aligned} g(f(\mathcal{U})) = g(\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{U}\}) & \\ &= \{C \subseteq Z : g^{-1}(C) \in \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{U}\}\} \\ &= \{C \subseteq Z : f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{U}\} \\ &= \{C \subseteq Z : (f^{-1} \circ g^{-1})(C) \in \mathcal{U}\} \\ &= \{(g \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{U}\} = (g \circ f)(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

(3) $id(\mathcal{U}) = \{B \subseteq X : id^{-1}(B) \in \mathcal{U}\} = \{B \subseteq X : B \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}$

(4) Folgt aus (1) und der Tatsache, dass $\{x\}$ in diesem Fall eine Basis für $\mathcal{U}$ ist.

(5) $f \equiv f'$ mod $\mathcal{U}$ heisst, dass $\{x \in X : f(x) = f'(x)\} \in \mathcal{U}$. Sei $B \in f(\mathcal{U})$. Dann ist $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \in \mathcal{U}$ nach der Definition von $f(\mathcal{U})$. Aufgrund der Filtereigenschaften ist auch $\{x \in X : f'(x) \in B\} = \{x \in X : f(x) \in B\} \cap \{x \in X : f(x) = f'(x)\} \in \mathcal{U}$. Also ist $B \in f'(\mathcal{U})$. Das gleiche Argument kann auch für $B \in f'(\mathcal{U})$ angewandt werden, daher ist $f(\mathcal{U}) = f'(\mathcal{U})$.

(6) Folgt aus (5).

(7) ($\Rightarrow$) Sei $g \equiv g'$ mod $f(\mathcal{U})$. Das heisst, dass $\{y \in Y : g(y) = g'(y)\} \in f(\mathcal{U})$ Nach Definition bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{y \in Y : g(y) = g'(y)\}) &= \{x \in X : f(x) \in \{y \in Y : g(y) = g'(y)\}\} \\ &= \{x \in X : g(f(x)) = g'(f(x))\} \\ &= \{x \in X : (g \circ f)(x)) = (g' \circ f)(x))\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Also ist $g \circ f \equiv g' \circ f$ mod $f(\mathcal{U})$.

($\Leftarrow$) Verwende die Symmetrie von „=“ und dasselbe Argument wie zuvor.

□

Punkt (5) des Lemmas zeigt uns, dass es durchaus Sinn macht, nicht nur einzelne Funktionen sondern Äquivalenzklassen von Funktionen zu betrachten. Dazu erinnern wir uns zuerst noch einmal an die Definition eines Ultraprodukts. Der Bereich $\mathcal{A}/_{\mathcal{U}}$ wurde definiert als $\{[f] : f \in \mathcal{A}\}$. Somit wird jede Zahl in einem Ultraprodukt mit einer Äquivalenzklasse $[f]$ identifiziert. Im Folgenden werden wir auch die Notation $[f]_{\mathcal{U}}$ verwenden, um anzuzeigen, dass das Ultraprodukt, dessen Element $[f]$ ist, mithilfe von $\mathcal{U}$ gebildet wurde. Es fällt auf, dass die Definition eines Elements in einem Ultraprodukt und die der Äquivalenzklasse einer Funktion, die einen Ultrafilter auf einen anderen abbildet, gleich sind.

Wir können also sagen, dass $[f]_{\mathcal{U}}$ $\mathcal{U}$ auf $f(\mathcal{U})$ abbildet.

Nun sind wir in der Lage, eine Kategorie der Ultrafilter zu definieren: Die Objekte sind Ultrafilter $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, ...$ (über beliebigen Mengen $X, Y, Z, ...$) und die Morphismen sind Äquivalenzklassen von Funktionen $[f]_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Die Komposition zweier Morphismen $[f]_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ und $[g]_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ ist definiert als $[f]_{\mathcal{U}} \circ [g]_{\mathcal{V}} = [f \circ g]_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$. Falls keine Verwechslung möglich ist, wird $[f]_{\mathcal{U}}$ auch abgekürzt als $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ geschrieben.

Wir bezeichnen die Ultrafilterkategorie mit $\mathfrak{U}$. Falls wir nur die Ultrafilter über einer bestimmten Menge X betrachten wollen, so schreiben wir $\mathfrak{U}_X$.

Es ist klar, dass die Komposition assoziativ ist und $[id_X]_{\mathcal{U}}$ der Identitätsmorphismus ist. Somit ist $\mathfrak{U}$ tatsächlich eine Kategorie.

Die nächsten Sätze helfen uns, Isomorphismen in $\mathfrak{U}$ zu charakterisieren.

Theorem 6.3. *Der einzige Morphismus in $\mathfrak{U}$ von einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ zu sich selbst ist die Identität.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über X, $f : X \to X$, $[f]_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Wir haben $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ und wollen zeigen, dass $f = id_X \bmod \mathcal{U}$.

Wir iterieren nun die Anwendung von f und definieren dann eine Äquivalenzrelation damit. Sei $n \geq 0, f^0 = id_X$ und $f^{n+1} = f \circ f^n$. Für $x, y \in X$ sei $x \sim y$ genau dann wenn es $n, m \geq 0$ gibt, sodass $f^n(x) = f^m(y)$. Da = eine Äquivalenzrelation ist, ist $\sim$ klarerweise auch eine. Ausserdem gilt $f(x) \sim x$ (wähle $m = n + 1$). Wir nennen x periodisch, wenn es ein $k \geq 0$ gibt, sodass $f^k(x) = x$.

Wir betrachten nun eine Partition von X in Äquivalenzklassen und wählen (was dank des Auswahlaxioms möglich ist) eine Menge $A \subseteq X$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält und zwar so, dass, falls es in einer Äquivalenzklasse ein periodisches Element gibt, eben dieses Element in A enthalten ist.

Für den Moment wählen wir eine beliebige aber feste Äquivalenzklasse E aus und nennen das eine Element in $A \cap E$ a. Für jedes $x \in E$ definieren wir $m(x)$ als das kleinste m, sodass $f^n(x) = f^m(a)$ für ein n und $n(x)$ als das kleinste n, sodass $f^n(x) = f^{m(x)}(a)$. Da x in der gleichen Äquivalenzklasse wie a ist, muss es sowohl $m(x)$ als auch $n(x)$ aufgrund der Definition von $\sim$ geben.

Weiter definieren wir $d(x) = m(x) - n(x)$.

Behauptung: $d(f(x)) = d(x) + 1$ oder $x = a$ (oder beides)

Sei $y = f(x)$. Dann ist

$$f^{n(y)+1}(x) = f^{n(y)}(f(x)) = f^{n(y)}(y) = f^{m(y)}(a) \tag{1}$$

Klarerweise ist $m(x) \leq m(y)$. Wir können also eine Fallunterscheidung machen:

1. Fall: $m(x) < m(y)$

Falls $n(x) \geq 1$ ist, dann gilt:

$$f^{n(x)-1}(y) = f^{n(x)}(x) = f^{m(x)}(a) \tag{2}$$

Dies widerspricht aber der Annahme, dass $m(y)$ das kleinste m ist, sodass für ein n $f^n(y) = f^{m(y)}(a)$. Also ist $n(x) = 0$ und somit $f^{n(x)}(x) = f^0(x) = x = f^{m(x)}(a)$.

Dann ist $y = f(x) = f^{m(x)+1}(a)$ und daher muss $m(y) \leq m(x) + 1$ sein. Durch die Annahme $m(x) < m(y)$ können wir schliessen, dass $m(y) = m(x) + 1$ sein muss.

Ausserdem wissen wir durch die Definition von $n(y)$ und der Tatsache, dass $y = f^0(y) = f^{m(y)}(a)$, dass $n(y) = 0$ sein muss.

Wenn wir dies nun alles zusammennehmen erhalten wir:

$$d(y) = m(y) - n(y) = m(x) + 1 - 0 = m(x) + 1$$
$$d(x) = m(x) - n(x) = m(x) - 0 = m(x)$$

Somit gilt wie behauptet $d(y) = d(x) + 1$.

2. Fall: $m(x) = m(y) = m$

In diesem Fall zeigt uns die Gleichung (1) zusammen mit der Definition von $n(x)$, dass $n(x) \leq n(y) + 1$ sein muss. Falls $n(x) = n(y) + 1$, dann ist $d(y) = m - n(y) = m - (n(y) + 1) + 1 = m - n(x) + 1 = d(x) + 1$ und die Behauptung stimmt.

Nehmen wir also an, dass $n(x) < n(y)+1$. Wenn $n(x) \geq 1$, dann haben wir wieder Gleichung (2). Diesmal widerspricht die Gleichung der Tatsache, dass $n(x) - 1 < n(y)$ ist, denn da $m(x) = m(y)$ müsste laut Gleichung (2) $n(x) - 1 = n(y)$ gelten.

Also müssen $n(x) = 0$ und $x = f^m(a)$ sein. Wir stellen fest, dass dieses x periodisch ist. In der Tat ist $f^{n(y)+1}(x) = f^{n(y)}(f(x)) = f^{n(y)}(y) = f^m(a) = x$. Da $x = f^0(x)$ ist, gilt auch $x \sim a$.

Wir haben A so definiert, dass entweder x bereits der Repräsentant dieser Äquivalenzklasse ist, also $x = a$, oder aber auch a periodisch ist. Es gibt also ein $k \geq 1$, sodass $f^k(a) = a$. Wir können sicherlich ein c wählen, sodass $ck \geq m$ gilt und stellen fest, dass

$$f^{ck-m}(x) = f^{ck-m}(f^m(a)) = f^{ck}(a) = a.$$

Die Definition von $m(x)$ impliziert, dass $m = 0$ und somit $x = a$ gilt, wodurch die Behauptung bestätigt ist.

Da unsere Äquivalenzklasse E zwar fest, aber beliebig gewählt war, gelten die obigen Ausführungen für jede Äquivalenzklasse und somit für ganz X. Also haben wir auf ganz X solche d's definiert und festgestellt, dass für alle $x \in X \setminus A$ gilt: $d(f(x)) = d(x) + 1$.

Wir definieren nun zwei Mengen, X_0 und X_1, gegeben durch:

$$X_i = \{x \in X : d(x) \equiv i \,(\text{mod } 2)\} \quad i = 0, 1$$

Somit ist $X_i \cap f^{-1}(X_i) = X_i \cap \{x \in X : f(x) \in X_i\} = X_i \cap \{x \in X : d(f(x)) = i \text{ (mod } 2)\} = \{x \in X : d(x) = i \text{ (mod } 2) \wedge d(f(x)) = i \text{ (mod } 2)\}$. Da wir gesehen haben, dass $d(f(x)) = d(x) + 1$ für alle $x \notin A$, muss $X_i \cap f^{-1}(X_i) \subseteq A$ gelten.

Des Weiteren stellen wir fest, dass $X = X_0 \cup X_1$, da jedes x ein gerades oder ungerades $d(x)$ haben muss. Weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über X ist, muss entweder X_0 oder X_1 ein Element in $\mathcal{U}$ sein.

O.B.d.A. nehmen wir an, es sei $X_0 \in \mathcal{U}$.

Da wir angenommen haben, dass $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, wissen wir auch, dass $f^{-1}(X_0)$ ebenfalls ein Element in $\mathcal{U}$ sein muss und daher auch $X_0 \cap f^{-1}(X_0)$, was wiederum $A \in \mathcal{U}$ impliziert. Aus den gleichen Gründen müssen auch $f^{-1}(A)$ und $A \cap f^{-1}(A)$ Elemente in $\mathcal{U}$ sein.

Sei nun $x \in (A \cap f^{-1}(A))$. Dann ist sowohl $x \in A$ als auch $f(x) \in A$. Ausserdem haben wir bereits bei der Definition der Äquivalenzrelation festgestellt, dass $x \sim f(x)$ gilt. Da wir aber A so definiert haben, dass es aus jeder Äquivalenzklasse nur ein Element enthält, muss $x = f(x)$ sein. Also ist $A \cap f^{-1}(A) = \{x \in X : x = f(x)\} \in \mathcal{U}$. Mit anderen Worten: $f = id_X \bmod \mathcal{U}$. □

Wir brauchen dieses Theorem hauptsächlich wegen folgendem Korollar:

Korollar 6.4. *Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ Ultrafilter über den Mengen X resp. Y. Falls es Morphismen $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ und $g : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ gibt, dann sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ isomorph; in der Tat sind f und g Inverse.*

Des Weiteren ist unter diesen Umständen f der einzige Morphismus von $\mathcal{U}$ nach $\mathcal{V}$ und g der einzige Morphismus von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{U}$.

Beweis. Der erste Teil wird gezeigt indem wir das vorherige Theorem auf die Morphismen $g \circ f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ und $f \circ g : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ anwenden.

Die Einzigartigkeit von f ist gegeben durch die Tatsache, dass ein $f' : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ aufgrund derselben Argumentation wie beim ersten Teil eine Inverse zu g sein müsste, die Inverse jedoch eindeutig ist. Natürlich gilt dasselbe für ein $g' : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, welches eine Inverse von f sein müsste. □

Bemerkung. *Die vorherige Proposition und ihr Korollar mit Ultrafiltern über ω wird auch mithilfe der Rudin-Keisler-Ordnung wiedergegeben. Dabei ist*

$$\mathcal{U} <_{RK} \mathcal{V} :\Leftrightarrow \exists f : \omega \to \omega \text{ sodass } \mathcal{U} = f(V)$$
$$\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{V} :\Leftrightarrow \mathcal{U} = f(\mathcal{V}) \text{ für eine Bijektion } f : \omega \to \omega.$$

Das Korollar wird dann zu:

$$(\mathcal{U} <_{RK} \mathcal{V} \wedge \mathcal{V} <_{RK} \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{V}$$

Für einen Beweis des Theorems mit der Notation der Rudin-Keisler-Ordnung siehe [3].

Da wir mit $\mathfrak{U}$ eine gute Grundlage geschaffen haben, können wir uns nun dem widmen, was wir eigentlich untersuchen wollten: Die (Nicht-)Isomorphie von Ultrafiltern und ihren Ultrapotenzen.

7 Ultrapotenzen mit isomorphen Ultrafiltern

Das Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass isomorphe Ultrafilter auch isomorphe Ultrapotenzen und somit isomorphe Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik implizieren.

Von nun an sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_\omega$, das heisst die Kategorie aller Ultrafilter über ω. Weiter seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ zwei isomorphe Ultrafilter, also $\mathcal{V} = \sigma(\mathcal{U})$ für eine Bijektion $\sigma : \omega \to \omega$. Diese Bijektion ist nichts anderes als eine Permutation der natürlichen Zahlen.

Wir werden nun zeigen, dass die Ultrapotenzen $\mathcal{N}^I/_\mathcal{U}$ und $\mathcal{N}^I/_\mathcal{V}$ auch isomorph sind, wobei wir annehmen können, dass $I = \omega$. Dies ist im folgenden Theorem festgehalten:

Theorem 7.1. *Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ Ultrafilter über ω. Dann gilt:*

$$\mathcal{U} \cong \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U} \cong \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}$$

Auf den ersten Blick mag es logisch erscheinen, dass man mit dem Ultrafilter auch die Ultrapotenz permutiert und diese dann isomorph zur ursprünglichen Ultrapotenz ist, doch soll dieses Kapitel auch zur Veranschaulichung dienen. Darum werde ich den gesuchten Isomorphismus zwischen den Nicht-Standardmodellen explizit definieren und seine Richtigkeit für alle Symbole der Sprache $\mathcal{L}_{PA}$ überprüfen.

Dafür erinnern wir uns an das erste Kapitel und die dortige Definition von Isomorphie von Modellen und wenden sie auf die vorliegende Situation an:

$\mathcal{N}^I/_\mathcal{U}$ ist isomorph zu $\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}$ wenn es eine bijektive Funktion f von einem Bereich $\mathbb{N}^\omega$ zum anderen gibt, sodass gilt:

- $f(c^{\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U}}) = c^{\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}}$ für alle Konstantensymbole aus $\mathcal{L}_{PA}$
- $f(F^{\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U}} a_1 ... a_n) = F^{\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}} f(a_1) ... f(a_n)$ für n-stellige Funktions-Symbole
- $\langle a_1, ... a_n \rangle \in R^{\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U}} \Leftrightarrow \langle f(a_1), ... f(a_n) \rangle \in R^{\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}}$ für n-stellige Relationssymbole

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir die Notation $c^\mathcal{U}, F^\mathcal{U}, R^\mathcal{U}$ resp. $c^\mathcal{V}, F^\mathcal{V}$, $R^\mathcal{V}$ verwenden, um die Zugehörigkeit zu den Modellen $\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}$ anzuzeigen. Analog dazu bezeichnen wir wie im vorherigen Kapitel eine Äquivalenzklasse $[f]$ mit $[f]_\mathcal{U}$, wenn die Äquivalenzrelation mit $\mathcal{U}$ gebildet wurde, $[f]_\mathcal{V}$ wenn sie mit $\mathcal{V}$ gebildet wurde.

Wir treffen die folgende Wahl für f:

Behauptung: $f = \sigma^{-1}$ wobei $\sigma^{-1}([f]_\mathcal{U}) = [f \circ \sigma^{-1}]_\mathcal{V}$.

Diese Definition ist nicht zufällig gewählt und wird im folgenden Kapitel noch einmal allgemeiner definiert, wobei auch die Wohldefiniertheit und weitere Eigenschaften bewiesen werden.

Wir überprüfen nun:

Die Sprache $\mathcal{L}_{PA}$ besteht aus dem konstanten Symbol „0“, dem einstelligen Funktionssymbol „s“ und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen „$+$“ und „$\cdot$“. Wir müssen also jeweils überprüfen, ob σ^{-1} die gegebenen Anforderungen erfüllt.

Dafür stellen wir zuerst für beliebige f und g fest:

$$\sigma(\{i \in \omega : f(i) = g(i)\}) = \{i \in \omega : f(\sigma^{-1}(i)) = g(\sigma^{-1}(i))\}$$
$$\sigma^{-1}(\{i \in \omega : f(i) = g(i)\}) = \{i \in \omega : f(\sigma(i)) = g(\sigma(i))\}$$

Wir zeigen nun, dass σ^{-1} tatsächlich ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{N}^{\omega}/_{\mathcal{U}}$ und $\mathcal{N}^{\omega}/_{\mathcal{V}}$ ist.

Konstantensymbol „0“:

Sei $f_0(i) = 0$ für alle $i \in \omega$.

Wir wollen zeigen: $\sigma^{-1}([f_0]_{\mathcal{U}}) = [f_0]_{\mathcal{V}}$

Wir stellen fest:

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}([f_0]_{\mathcal{U}}) &= [f_0 \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}} \\ &= \{g \in \mathbb{N}^{\omega} : \{i \in \omega : g(i) = f_0(\sigma^{-1}(i))\} \in \mathcal{V}\} \\ &= \{g \in \mathbb{N}^{\omega} : \{i \in \omega : g(i) = f_0(i)\} \in \mathcal{V}\} \\ &= [f_0]^{\mathcal{V}}\end{aligned}$$

wobei $f_0(i) = 0$ für alle $i \in \omega$, also kann im vorletzten Schritt die Permutation einfach weggelassen werden.

Also ist $\sigma^{-1}([f_0]_{\mathcal{U}}) = [f_0]_{\mathcal{V}}$ erfüllt.

Funktionssymbol „s“:

Sei $[f]_{\mathcal{U}}$ ein beliebiges Element in $\mathcal{N}^{\omega}/_{\mathcal{U}}$.

Wir wollen zeigen: $\sigma^{-1}(s^{\mathcal{U}}([f]_{\mathcal{U}})) = s^{\mathcal{V}}(\sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}}))$

Wir nehmen an, dass $s^{\mathcal{U}}([f]_{\mathcal{U}}) = [f']_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \omega : s(f(i)) = f'(i)\} \in \mathcal{U}$ gilt. Dann ist $\sigma^{-1}(s^{\mathcal{U}}([f]_{\mathcal{U}})) = \sigma^{-1}([f']_{\mathcal{U}} = [f' \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}}$.

Wir sehen nun, dass

$$\begin{aligned}\{i \in \omega : s(f(i)) = f'(i)\} \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow \sigma^{-1} \circ \sigma(\{i \in \omega : s(f(i)) = f'(i)\}) \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \sigma(\{i \in \omega : s(f(i)) = f'(i)\}) \in \mathcal{V} \\ &\Leftrightarrow \{i \in \omega : s(f(\sigma^{-1}(i))) = f'(\sigma^{-1}(i))\} \in \mathcal{V} \\ &\Leftrightarrow s^{\mathcal{V}}([f \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}}) = [f' \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}} \\ &\Leftrightarrow s^{\mathcal{V}}(\sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}})) = \sigma^{-1}([f']_{\mathcal{U}}) = \sigma^{-1}(s^{\mathcal{U}}([f]_{\mathcal{U}}))\end{aligned}$$

Das ist, was wir zeigen wollten.

Funktionssymbol „+“:

Seien $[f]_{\mathcal{U}}$ und $[f']_{\mathcal{U}}$ zwei beliebige Elemente in ${}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{U}}$. Wir schreiben $[f]_{\mathcal{U}} +^{\mathcal{U}} [f']_{\mathcal{U}}$ für $+^{\mathcal{U}}([f]_{\mathcal{U}}, [f']_{\mathcal{U}})$.

Wir wollen zeigen: $\sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}} +^{\mathcal{U}} [f']_{\mathcal{U}}) = \sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}}) +^{\mathcal{U}} \sigma^{-1}([f']_{\mathcal{U}})$

Wir nehmen an, dass $[f]_{\mathcal{U}} +^{\mathcal{U}} [f']_{\mathcal{U}} = [g]_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \omega : f(i) + f'(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$ gilt.

Wir sehen nun, dass

$$\begin{aligned}\{i \in \omega : f(i) + f'(i) = g(i)\} \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow \sigma^{-1} \circ \sigma(\{i \in \omega : f(i) + f'(i) = g(i)\}) \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \sigma(\{i \in \omega : f(i) + f'(i) = g(i)\}) \in \mathcal{V} \\ &\Leftrightarrow \{i \in \omega : f(\sigma^{-1}(i)) + f'(\sigma^{-1}(i)) = g(\sigma^{-1}(i))\} \in \mathcal{V} \\ &\Leftrightarrow [f \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}} +^{\mathcal{V}} [f' \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}} = [g \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}} \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}}) +^{\mathcal{V}} \sigma^{-1}([f']_{\mathcal{U}}) = \sigma^{-1}([g]_{\mathcal{U}}) \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}}) +^{\mathcal{V}} \sigma^{-1}([f']_{\mathcal{U}}) = \sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}} +^{\mathcal{U}} [f']_{\mathcal{U}})\end{aligned}$$

Das ist, was wir zeigen wollten.

Funktionssymbol „$\cdot$“:

Analog zum Funktionssymbol „+“.

Damit haben wir gezeigt, dass $\sigma^{-1} : \omega \to \omega$ in der Tat ein Isomorphismus zwischen den Ultrapotenzen ${}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{U}}$ und ${}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{V}}$ ist.

Dass wir diesen Isomorphismus explizit definiert und überprüft haben, anstatt einfach hinzunehmen, dass permutierte Ultrapotenzen isomorph sein müssen, wurde dadurch begründet, dass dieses Kapitel auch eine Veranschaulichung sein soll. Denn auf den ersten oder auch noch zweiten Blick mögen die Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik (oder auch allgemein Ultraprodukte) für manch einen verwirrend erscheinen. Es braucht etwas Zeit und Vorstellungsvermögen, bis man richtig verstanden hat,

wie sie funktionieren. Darum wollen wir nun ein Beispiel zweier isomorpher Ultrapotenzen betrachten, welche jeweils durch die Konstruktion eines Ultrafilters und einer Permutation desselben konstruiert wurden.

Beispiel:

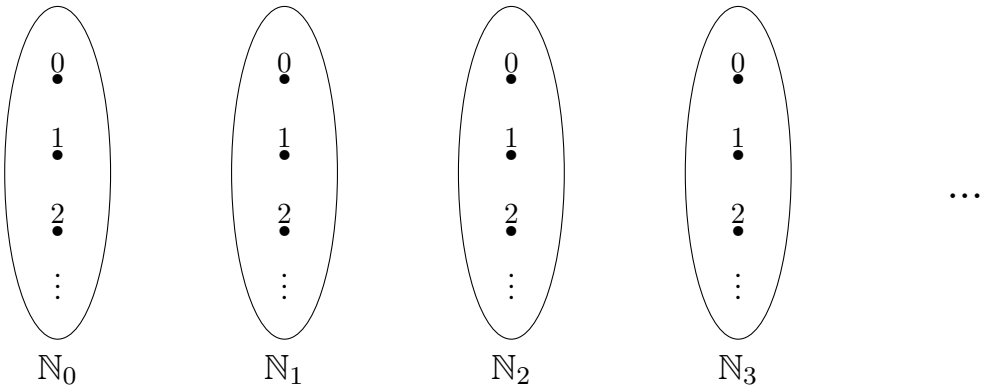
Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über ω, der den Fréchet-Filter enthält. Insbesondere sei $\mathcal{U}$ also ein Nicht-Hauptultrafilter. Weiter sei die Menge aller ungeraden Zahlen in $\mathcal{U}$ enthalten, also $\{2n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$. Natürlich enthält $\mathcal{U}$ noch weitere Mengen, doch diese werden nicht explizit angegeben.

Weiter sei $\sigma : \omega \to \omega$ die Permutation $\sigma = (01)(23)(45)...((2n)(2n+1))...$ Es wird also jede gerade Zahl mit der nächst grösseren ungeraden Zahl vertauscht. Da σ aus lauter Transpositionen besteht, ist $\sigma^{-1} = \sigma$.

Wie sieht $\mathcal{V} = \sigma(\mathcal{U})$ aus?

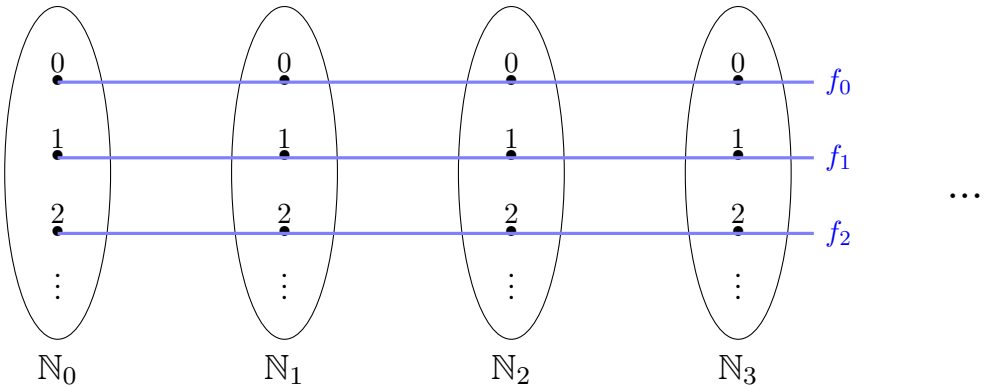
- Sei B eine kofinite Menge. B kann geschrieben werden als $B = \omega \setminus \{b_0, b_1, ..., b_k\}$. Dann ist $\sigma^{-1}(B) = \sigma(B) = \omega \setminus \{a_0, a_1, ..., a_k\}$, wobei für alle i gilt: $\sigma(b_i) = a_i$. Somit ist $\sigma^{-1}(B)$ auch kofinit. Da wir dies für alle kofiniten Mengen machen können und auch alle kofiniten Mengen erhalten werden, ist der Fréchet-Filter auch in $\mathcal{V}$ enthalten.
- Sei $B = \{2n : n \in \omega\}$. Dann ist $\sigma^{-1}(B) = \sigma(B) = \{2n+1 : n \in \omega\} \notin \mathcal{U}$. Also ist $B \notin \mathcal{V}$.
- Sei $B = \{2n+1 : n \in \omega\}$. Dann ist $\sigma^{-1}(B) = \sigma(B) = \{2n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$. Also ist $B \in \mathcal{V}$.
- Alle weiteren in $\mathcal{V}$ enthaltenen Mengen werden nicht spezifiziert.

Um das nun Kommende leichter vorstellbar zu machen, stellen wir die Ultrapotenz von $\mathcal{N}$ nun bildlich dar:



Dies ist unser Bereich bestehend aus unendlich, aber abzählbar vielen Kopien des Bereichs $\mathbb{N}$ des Standardmodells, wobei $\mathbb{N}_i$ die i+1-te Kopie ist. Nun können wir die „Standard-Zahlen“ als Funktionen definieren:

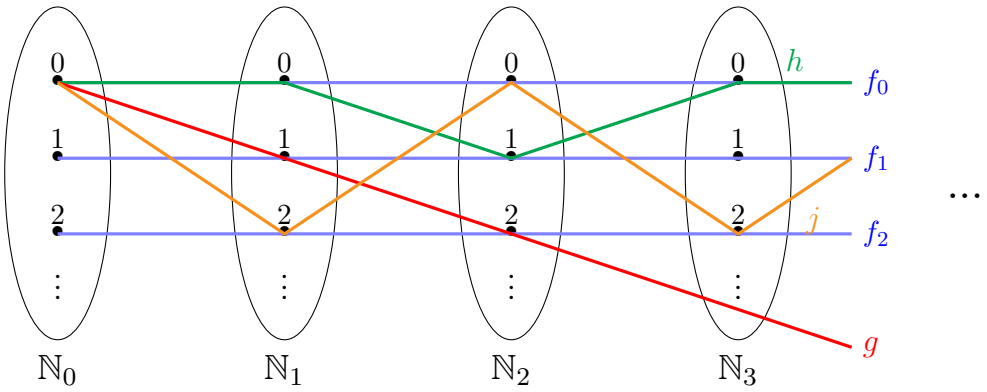
f_0 definiert durch $f_0(i) = 0$ für alle $i \in \omega$ entspricht der Zahl 0.
f_1 definiert durch $f_1(i) = 1$ für alle $i \in \omega$ entspricht der Zahl 1.
usw.



Im Nicht-Standardmodell lassen sich weitere Zahlen definieren, z.B.:
g definiert durch $g(i) = i$ für alle $i \in \omega$

h definiert durch $h(i) = \begin{cases} 0 & i \neq 2 \\ 1 & i = 2 \end{cases}$

j definiert durch $j(i) = \begin{cases} 0 & \text{falls i gerade ist} \\ 2 & \text{falls i ungerade ist} \end{cases}$



Jetzt können wir einige Beispiele von Aussagen betrachten und dabei jeweils den Ultrafilter $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$ verwenden. Da diese isomorph sind und somit auch die Ultrapotenzen isomorph sind, sollten alle Aussagen, die hinsichtlich des einen Ultrafilters wahr oder falsch sind, auch hinsichtlich des anderen den gleichen Wahrheitswert aufweisen.

1. Ist „$1 + 1 = 2$“ wahr im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$?

   Wir betrachten 1 und 2 als Äquivalenzklassen $[f_1]$ und $[f_2]$.

   - Konstruktion mit $\mathcal{U}$

     „+“ ist ein Funktionssymbol, also verwenden wir die Definition von Funktionssymbolen in Ultraprodukten:

     $$[f_1] +^{\mathcal{M}} [f_1] = [f_2] \Leftrightarrow \{i \in \omega : f_1(i) +^{M_i} f_1(i) = f_2(i)\} \in \mathcal{U}.$$

     Da „$1 + 1 = 2$“ im Standardmodell (und somit in jeder Kopie) wahr ist, ist $\{i \in \omega : f_1(i) +^{M_i} f_1(i) = f_2(i)\} = \omega \in \mathcal{U}$. Somit ist $[f_1] + [f_1] = [f_2]$, also „$1 + 1 = 2$“, auch im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ wahr.

   - Konstruktion mit $\mathcal{V}$

     Da $\omega \in \mathcal{V}$ ist, gilt die gleiche Argumentation wie oben auch in diesem Fall. Somit ist „$1 + 1 = 2$“ auch im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{V}$ wahr.

2. Ist „$g < 2$“ wahr im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$?

   Wir betrachten 2 als Äquivalenzklasse $[f_2]$.

   - Konstruktion mit $\mathcal{U}$

     „$<$“ ist ein Relationssymbol, also verwenden wir die Definition von Relationssymbolen in Ultraprodukten:

     $$\langle [f_0], ..., [f_n] \rangle \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \{i \in \omega : \langle f_0(i), ..., f_n(i) \rangle \in R^{M_i}\} \in \mathcal{U}.$$

     Es gilt: $\{i \in \omega : \langle g(i), f_2(i) \rangle \in <^{M_i}\} = \{0, 1\} \notin \mathcal{U}$, da $\mathcal{U}$ alle kofiniten und daher wegen der Ultrafiltereigenschaft keine endlichen Mengen enthält. Daher ist im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ „$g < 2$“ falsch.

   - Konstruktion mit $\mathcal{V}$

     Da auch $\mathcal{V}$ den Fréchet-Filter und somit alle kofiniten, aber keine endlichen Mengen enthält, gilt die obige Argumentation auch hier. „$g < 2$“ ist also im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{V}$ falsch.

3. Ist „$h = 0$“ wahr im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$?

   Wir betrachten wiederum die Zahl 0 als Äquivalenzklasse $[f_0]$.

   - Konstruktion mit $\mathcal{U}$

     Wir stellen fest: $\{i \in \omega : h(i) = f_0(i)\} = \omega \setminus \{2\} \in \mathcal{U}$, da dies eine kofinite Menge ist und $\mathcal{U}$ den Fréchet-Filter enthält. Somit ist die Aussage „$h = 0$“ im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ wahr.

   - Konstruktion mit $\mathcal{V}$

     Erneut ist der Fréchet-Filter in $\mathcal{V}$ enthalten, also gilt die obige Argumentation auch für diesen Fall und die Aussage ist wahr im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{V}$.

4. Ist „$j < 1$ “ wahr im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$?

   Wir betrachten die Zahl 1 als Äquivalenzklasse $[f_1]$.

   - Konstruktion mit $\mathcal{U}$

     Wir können feststellen: $\{i \in \omega : j(i) < f_1(i)\} = \{2n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$. Somit ist „$j < 1$“ im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{U}$ wahr.

   - Konstruktion mit $\mathcal{V}$

     Wir können feststellen: $\{i \in \omega : j(i) < f_1(i)\} = \{2n : n \in \omega\} \notin \mathcal{V}$. Somit könnte man denken, „$j < 1$“ sei im Nicht-Standardmodell konstruiert mit $\mathcal{V}$ falsch. Dies würde aber der Tatsache widersprechen, dass isomorphe Ultrafilter zu ismorphen Ultrapotenzen führen. Mit anderen Worten: Da die Aussage im ersten Nicht-Standardmodell wahr ist, muss sie das auch in diesem Modell sein. Wie kann das gehen?

     Der wichtige Unterschied ist die Äquivalenzklasse, in der sich j befindet. Wir dürfen nicht vergessen, dass wir in den Ultrapotenzen nicht nur einzelne Funktionen, sondern immer deren Äquivalenzklassen betrachten. In der ersten Ultrapotenz gilt: $\{i \in \omega : j(i) = f_0(i)\} = \{2n : n \in \omega\} \in \mathcal{U}$. Also ist $[j] = [f_0]$ und die Aussage wird zu „$0 < 1$“, was in beiden Nicht-Standardmodellen wahr ist.

     In der zweiten Ultrapotenz hingegen ist $\{i \in \omega : j(i) = f_2(i)\} = \{2n+1 : n \in \omega\} \in \mathcal{V}$, dass heisst $[j] = [f_2]$. Somit kann die Aussage geschrieben werden als „$2 < 1$“, was in beiden Nicht-Standardmodellen falsch ist.

Dieses Beispiel sollte gezeigt haben, wie man Aussagen in Ultrapotenzen betrachten muss. Dies schliesst unsere Untersuchung zu isomorphen Ultrafiltern und ihren Ultrapotenzen ab. Wir haben festgestellt, dass isomorphe Ultrafilter in der Tat isomorphe Ultrapotenzen implizieren. Im nächsten Kapitel werden wir das Gegenteil zeigen: Nicht-isomorphe Ultrafilter führen zu nicht-isomorphen Ultrapotenzen.

8 Ultrapotenzen mit nicht-isomorphen Ultrafiltern

Im vorherigen Kapitel haben wir den Isomorphismus σ^{-1} als $\sigma^{-1}([f]_{\mathcal{U}}) = [f \circ \sigma^{-1}]_{\mathcal{V}}$ definiert. Wie bereits angekündigt, ist diese Wahl nicht zufällig. In diesem Kapitel werden wir eine Verallgemeinerung davon verwenden.

Wie auch im Kapitel 6 ist die Hauptquelle dieses Kapitels [2], wobei einige fehlende Beweise ergänzt wurden.

Für die angekündigte Verallgemeinerung definieren wir eine induzierte Funktion wie folgt:

Definition 8.1. *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{M}$ ein Modell in dieser Sprache. Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ Ultrafilter über den Mengen X resp. Y. Weiter sei $[f]_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ ein Morphismus in $\mathfrak{U}$. Wir definieren $[f]^*_{\mathcal{V}}$ (oder abgekürzt auch einfach f^*) von $\mathcal{M}^X/_{\mathcal{U}}$ nach $\mathcal{M}^Y/_{\mathcal{V}}$ durch $f^*([g]_{\mathcal{U}}) = [g \circ f]_{\mathcal{V}}$ für ein beliebiges $[g]_{\mathcal{U}}$.*

Lemma 8.2.

(1) * ist wohldefiniert.

(2) f^* ist injektiv.

(3) $id^*_{\mathcal{U}} = id_{\mathcal{M}^I/_{\mathcal{U}}}$

(4) Sei $\mathcal{W}$ ein weiterer Ultrafilter über der Menge Z und $[f'] : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$. Dann ist $(f \circ f')^* = f'^* \circ f^*$.

Beweis. (1) + (2) Folgen beide aus der Definition $f^*([g]_{\mathcal{U}}) = [g \circ f]_{\mathcal{V}}$ und den Punkten (6) und (7) von Lemma 6.2.

(3) Seien $[f]_{\mathcal{U}} = id_{\mathcal{U}}$ und $[g]_{\mathcal{U}}$ in $\mathcal{M}^X/_{\mathcal{U}}$ beliebig gewählt. Dann ist $[f]^*_{\mathcal{U}}([g]_{\mathcal{U}}) = id^*_{\mathcal{U}}([g]_{\mathcal{U}}) = [g \circ id_{\mathcal{U}}]_{\mathcal{U}} = [g]_{\mathcal{U}}$.

(4) Sei $[g]_{\mathcal{U}}$ in $\mathcal{M}^X/_{\mathcal{U}}$ beliebig gewählt. Dann ist $(f \circ f')^*([g]_{\mathcal{U}}) = [g \circ (f \circ f')]_{\mathcal{U}} = [(g \circ f) \circ f']_{\mathcal{U}} = f'^*([g \circ f]_{\mathcal{U}}) = f'^*(f^*([g]_{\mathcal{U}})) = (f'^* \circ f^*)([g]_{\mathcal{U}})$.

□

Wichtig zu beachten ist hierbei, dass die Notation dieselbe bleibt, ganz egal, ob wir die Modelle $\mathcal{M}^X/_{\mathcal{U}}$ etc. oder nur ihre Bereiche betrachten.

Ausserdem ist die obige Definition für allgemeine Modelle definiert. Wir jedoch wollen die Nicht-Standardmodelle der Peano Arithmetik betrachten. Daher werden von nun an lediglich die Ultrapotenzen der natürlichen Zahlen, also von $\mathcal{N}$ mit Bereich $\mathbb{N}$ und Indexmenge $I = \omega$, in Betracht gezogen. Ausserdem ist unsere Sprache $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PA}$.

Proposition 8.3. *Sei $[f]_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$. Dann ist f^* eine elementare Einbettung von ${\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{U}}$ in ${\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{V}}$ (Hier wird die Notation für Modelle verwendet).*

Beweis. Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PA}$ die Sprache der Peano Arithmetik und sei $\phi(x_1, ...x_n)$ eine Formel in $\mathcal{L}_{PA}$, sodass sich alle freien Variablen in $\{x_1, ...x_n\}$ befinden. Weiter seien $[g_1]_{\mathcal{U}}, [g_2]_{\mathcal{U}}, ..., [g_n]_{\mathcal{U}}$ Elemente in ${\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{U}}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
{\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{U}} \models \phi([g_1]_{\mathcal{U}}, [g_2]_{\mathcal{U}}, ..., [g_n]_{\mathcal{U}}) &\Leftrightarrow \{i \in \omega : \mathcal{N} \models \phi(g_1(i), ..., g_n(i))\} \in \mathcal{U} \\
&\Leftrightarrow = f^{-1}(\{i : \mathcal{N} \models \phi(g_1(i), ..., g_n(i)\}) \in \mathcal{V} \\
&\Leftrightarrow \{i \in \omega : \mathcal{N} \models \phi(g_1(f(i)), ...g_n(f(i))\} \in \mathcal{V} \\
&\Leftrightarrow {\mathcal{N}^{I}}/_{\mathcal{V}} \models \phi([g_1 \circ f]_{\mathcal{V}}, ..., [g_n \circ f]_{\mathcal{V}}) \\
&\Leftrightarrow {\mathcal{N}^{I}}/_{\mathcal{V}} \models \phi(f^*([g_1]_{\mathcal{U}}), ..., f^*([g_n]_{\mathcal{U}}))
\end{aligned}$$

□

Es bleibt zu bemerken, dass nicht jede elementare Einbettung von der Form f^* ist. Es gibt triviale Gegenbeispiele, man könnte beispielsweise endliche Modelle und nicht isomorphe Ultrafilter wählen. Wenn wir jedoch Ultrapotenzen von $\mathcal{N}$ betrachten, gilt die folgende Proposition:

Proposition 8.4. *Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ Ultrafilter über ω. Dann ist jede elementare Einbettung $e : {\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{U}} \to {\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{V}}$ von der Form $[f]^*_{\mathcal{V}}$ für irgendein $[f]_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ (Wir kürzen dies als f ab). Des Weiteren ist $[f]_{\mathcal{V}}$ eindeutig.*

Beweis. Sei e eine solche elementare Einbettung. Da die Identität $id : \omega \to \omega$ einen Morphismus $[id]_{\mathcal{U}}$ in ${\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{U}}$ definiert, ist $e([id]_{\mathcal{U}}) \in {\mathcal{N}^{\omega}}/_{\mathcal{V}}$.

Wir definieren dieses Element als $[f]_{\mathcal{V}}$ für ein $f : \omega \to \omega$.

Notation: Für jedes Element $n \in \omega$ bezeichnen wir den entsprechenden Term in $\mathcal{L}_{PA}$ mit $\underline{n}$. Die gleiche Notation verwenden wir für Mengen von Elementen X, Funktionen f und Relationen R.

Sei $X \subseteq \omega$, dann gilt:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow \{i \in \omega : \mathcal{N} \models \underline{X}(i)\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow {}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{U}} \models \underline{X}([id]_{\mathcal{U}}) \\ &\Leftrightarrow {}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{V}} \models \underline{X}([f]_{\mathcal{V}}) \\ &\Leftrightarrow \{i \in \omega : \mathcal{N} \models \underline{X}(f(i))\} \in \mathcal{V} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(\{i \in \omega : \mathcal{N} \models X(i)\}) \in \mathcal{V} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(X) \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{U} = f(\mathcal{V})$ und $[f]_{\mathcal{V}}$ ist ein Morphismus von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{U}$. Als nächstes wollen wir zeigen, dass $[f]^*_{\mathcal{V}}$ und die Einbettung e übereinstimmen.

Sei $[g]_{\mathcal{U}} \in {}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{U}}$. Dann ist $g : \omega \to \omega$ und $\{i \in \omega : \mathcal{N} \models g(i) = \underline{g}(id(i))\} = \omega \in \mathcal{U}$, also ist ${}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{U}} \models [g]_{\mathcal{U}} = \underline{g}([id]_{\mathcal{U}})$.

Da e eine elementare Einbettung ist, gilt: ${}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{V}} \models e([g]_{\mathcal{U}}) = \underline{g}([f]_{\mathcal{V}})$.

Wir definieren nun $e([g]_{\mathcal{U}}) = [h]_{\mathcal{V}}$ und stellen fest, dass $\{i \in \omega : \mathcal{N} \models h(i) = \underline{g}(f(i))\} \in \mathcal{V}$. Dies bedeutet, dass $h = g \circ f$ mod $\mathcal{V}$ und somit $e([g]_{\mathcal{U}}) = [h]_{\mathcal{V}} = [g \circ f]_{\mathcal{V}} = f^*[g]_{\mathcal{U}}$ ist. Somit stimmen e und f^* in der Tat überein.

Nun bleibt nur noch die Eindeutigkeit von $[f]_{\mathcal{V}}$ zu zeigen.

Nehmen wir an, es gibt ein $f' : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, sodass $f'^* = e$. Dann ist $[f]_{\mathcal{V}} = e([id]_{\mathcal{U}}) = f'^*([id]_{\mathcal{U}}) = [id \circ f']_{\mathcal{V}} = [f']_{\mathcal{V}}$.

Also ist $[f]_{\mathcal{V}}$ eindeutig. □

Dieser Beweis kann so angepasst werden, dass er auch für Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $|\mathcal{U}| \leq \omega$ und Ultrafilter $\mathcal{V}$ über beliebigen Mengen Y gilt. Dazu können wir vereinfachend feststellen, dass $|\mathcal{U}| < \omega$ bedeutet, dass $\mathcal{U}$ eine endliche Menge enthält und somit nach Lemma 3.3 ein Hauptultrafilter ist. Demnach ist ${}^{\mathcal{N}^{\omega}}\!/_{\mathcal{U}}$ das Standardmodell. Also muss vor allem der Fall $|\mathcal{U}| = \omega$ eingebracht werden.

Inzwischen haben wir schon viele Eigenschaften von * bewiesen und einen Zusammenhang mit elementaren Einbettungen hergestellt. Doch nun stellt sich natürlich die Frage, was genau uns dieses f^* nützt. Die Antwort ist die: * ist ein Funktor!

Wir haben mit $\mathfrak{U}_\omega$ bereits die Kategorie der Ultrafilter über ω definiert. Es bleibt also nur noch festzustellen, dass sich auch die Ultrapotenzen in einer Kategorie befinden. Doch da wir Funktionen zwischen Modellen haben und diese klarereweise assoziativ sind und auch eine Identätsabbildung existiert, ist leicht erkennbar, dass dem so ist.

Wir stellen nun Folgendes fest:

- Wir haben bisher lediglich die Anwendung von * auf Morphismen zwischen Ultrafiltern definiert. Allerdings können wir für die Objekte der Kategorie $\mathfrak{U}_\omega$, sprich

die Ultrafilter selbst, sagen: * sendet Ultrafilter zu Ultrapotenzen (in unserem Fall der Ultrapotenz des Modells $\mathcal{N}$ der natürlichen Zahlen) gebildet mit dem betreffenden Ultrafilter. Somit hat jedes Objekt $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}_\omega$ ein assoziiertes Objekt $^*(\mathcal{U}) = \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U}$.

- Für jeden Morphismus $[f]_\mathcal{U} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ haben wir ein $^*([f]_\mathcal{U}) = [f]^*_\mathcal{U}$ definiert.
- $^*(id_\mathcal{U}) = id_{^*(\mathcal{U})}$ ist genau die Aussage (3) von Lemma 8.2.
- $^*(f \circ f') = {}^*(f) \circ {}^*(f')$ ist genau die Aussage (4) von Lemma 8.2.

Damit ist gezeigt, dass * die Definition eines Funktors erfüllt.

Nun wissen wir aus der Kategorientheorie, dass Funktoren Isomorphismen erhalten. Dies zeigt zusammen mit Proposition 8.4 erneut, dass isomorphe Ultrafilter zu isomorphen Ultrapotenzen und somit isomorphen Nicht-Standardmodellen der Peano Arithmetik führen. Da wir dies aber schon wissen, interessieren wir uns an dieser Stelle eher für das folgende Resultat:

Korollar 8.5. *Seien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ Ultrafilter über ω. Weiter sei $g : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, sodass $g^* : \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V} \to \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U}$ ein Isomorphismus ist. Dann ist auch g ein Isomorphismus.*

Beweis. Laut Proposition 8.4 ist $(g^*)^{-1}$ ein f^* für ein $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. Nun können wir Korrolar 6.4 anwenden. □

Bemerkung. *Wie in der vorherigen Proposition kann auch hier $\mathcal{V}$ zu einem Ultrafilter über einer beliebigen Menge Y verallgemeinert werden.*

Nun können wir die bisherigen Ergebnisse in einem Theorem zusammenfassen, dessen Korollar uns genau das Resultat liefert, das wir in diesem letzten Kapitel erreichen wollten:

Theorem 8.6. *Für das Standardmodell $\mathcal{N}$ und Ultrafilter $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ über ω gilt die folgende Äquivalenz:*

$$\mathcal{U} \cong \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U} \cong \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}$$

Korollar 8.7.

$$\mathcal{U} \ncong \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{U} \ncong \mathcal{N}^\omega/_\mathcal{V}$$

Beweis. Das ist die Kontraposition zur Richtung „⇐“ des Theorems.

Somit haben wir gezeigt, dass nicht-isomorphe Ultrafilter zu nicht-isomorphen Ultrapotenzen, also nicht-isomorphen Nicht-Standardmodellen der Peano Arithmetik führen. □

9 Eigenständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig und ohne unerlaubte Hilfestellung Dritter verfasst habe. Weiter erkläre ich ausdrücklich, dass ich alle verwendeten Quellen im Verzeichnis angegeben habe. Überdies bestätige ich, diese Arbeit nicht schon anderweitig als Leistungsnachweis verwendet zu haben.

Datum, Ort

07.01.21, Wil SG

Unterschrift

K. Warth

Literatur

[1] Vitaly Bergelson. "Ultrafilters across Mathematics". In: Hrsg. von Dennis DeTurck. American Mathematical Society, 2010. Kap. Ultrafilters, IP sets, Dynamics, and Combinatorial Number Theory, S. 23–47.

[2] Andreas Raphael Blass. "Orderings of Ultrafilters". Diss. Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1970.

[3] Lorenz J. Halbeisen. "Combinatorial Set Theory - With a Gentle Introduction to Forcing". In: Second. Springer International Publishing AG, 2017. Kap. Overture: Ramseys Theorem, S. 87–102.

[4] Aaron Halper. *Ultraproducts and Model Theory*. Techn. Ber. University of Chicago, 2010.

[5] A.B. Slomson J.L. Bell. *Models and Ultraproducts: An Introduction*. Dover Publications, Inc., 2006.

[6] H. Jerome Keisler. "Ultrafilters across Mathematics". In: Hrsg. von Dennis DeTurck. Bd. 530. American Mathematical Society, 2010. Kap. The Ultraproduct Construction, S. 163–179.

[7] H. Jerome Keisler. "Ultraproducts and elementary classes". In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 64 (1961), S. 477–495. ISSN: 1385-7258.

[8] H. Jerome Keisler. "Ultraproducts and Saturated Models". In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 67 (1964), S. 178–186. ISSN: 1385-7258.

[9] Tycho Neve. *Theorems on ultrafilters*. Bachelorproject Leiden University, Supervisor: Dr. K.P. Hart. Aug. 2013.

[10] Hans Schoutens. "The Use of Ultraproducts in Commutative Algebra". In: Hrsg. von B. Teissier J.-M. Morel F. Takens. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. Kap. Ultraproduct and Los Theorem, S. 7–27.

[11] Saharon Shelah. "Every two elementary equivalent models have isomorphic ultrapowers". In: *Israel Journal of Mathematics* 10 (1971), S. 224–233.

[12] S. Negrepontis W.W. Comfort. "The Theory of Ultrafilters". In: Hrsg. von B.L. van der Waerden B. Eckmann J.K. Moser. Springer-Verlag, 1974. Kap. Chapter 7: Basic Facts on Ultrafilters, S. 142–160.

[13] George Weaver. “Henkin-Keisler Models”. In: Hrsg. von M. Hazewinkel. Kluwer Academic Publishers, 1997. Kap. The Keisler-Shelah Isomorphism Theorems, S. 151–198.

[14] Yevhen G. Zelenyuk. “Ultrafilters and Topologies on Groups”. In: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2011. Kap. 1.5 Metrizable Refinements, S. 14–18.

[15] Yevhen G. Zelenyuk. “Ultrafilters and Topologies on Groups”. In: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2011. Kap. 2.4 Ramsey Ultrafilters and P-points, S. 36–38.

[16] Pawel Zbierski Zofia Adamowicz. “Logic of Mathematics: A Modern Course of Classical Logic”. In: Hrsg. von Myron B. Allen III Peter Hilton. John Wiley & Sons, Inc., 1997. Kap. 15. Ultraproducts, S. 111–120.