Teorie topologiche di tipo BF ed invarianti dei nodi

Alberto S. Cattaneo

Università degli Studi di Milano

Indice

1 Introduzione **3**

2 La teoria di Chern–Simons **14**
2.1 Generalità 14
2.1.1 La simmetria BRST 15
2.2 La funzione di partizione per $k \to \infty$ 18
2.3 L'introduzione delle osservabili 20
2.3.1 Il caso abeliano 22
2.4 La quantizzazione canonica 24
2.5 Il gauge di cono di luce 31
2.5.1 L'equazione di Knizhnik–Zamolodchikov 34
2.5.2 Lo sviluppo perturbativo 36
2.6 Il gauge covariante 38
2.6.1 Le regole di Feynman 38
2.6.2 Lo sviluppo perturbativo 41
2.7 L'approccio variazionale 43
2.8 Conclusioni 47

3 La teoria BF **49**
3.1 Il caso abeliano 49
3.1.1 Le osservabili 50
3.2 Il caso non abeliano 51
3.3 Deformazioni della teoria BF 52

4 La teoria BF con osservabili **55**
4.1 Gli sviluppi perturbativi nel caso tridimensionale 55
4.1.1 Invarianza BRST e finitezza 55

4.1.2 Calcolo variazionale 59
4.2 Le osservabili 61
4.2.1 La teoria BF pura 62
4.2.2 La teoria BF con termine cosmologico 63
4.3 La teoria BF con termine cosmologico ed i polinomi di Jones . 65
4.3.1 La relazione con la teoria di Chern–Simons 66
4.3.2 La relazione con i polinomi di Jones 69
4.3.3 I gauge assiali 76
4.3.4 Il gauge covariante 81
4.4 La teoria BF pura ed i polinomi di Alexander–Conway 83
4.4.1 Le osservabili per un nodo 84
4.4.2 Il calcolo degli invarianti di tipo finito 87
4.4.3 La relazione di matassa (cenni) 91
4.4.4 Discussione 93
4.5 La teoria BF pura in quattro dimensioni ed i 2-nodi 95
4.5.1 L'introduzione delle osservabili 96
4.5.2 Il calcolo degli invarianti 98
4.6 Conclusioni 100

A Gli invarianti dei nodi **101**

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi studio un tipo particolare di teoria di campo topologica detta *teoria BF*.

In generale una *teoria di campo topologica* è una teoria di campo quantistica che all'invarianza per diffeomorfismi[1] della funzione di partizione e dei valori di aspettazione delle sue osservabili unisce l'indipendenza dalla metrica. A differenza della *gravità quantistica*, dove la metrica partecipa alla dinamica, qui essa è un campo esterno da cui la teoria risulta indipendente.

Le teorie di campo topologiche Le teorie di campo topologiche sono particolarmente interessanti poiché sono un esempio di teorie di campo non banali, che in generale non devono essere rinormalizzate[2] e che spesso possono

[1]Nella letteratura matematica si distingue tra *invarianti topologici* e *invarianti lisci (smooth);* i primi sono legati all'invarianza per *omeomorfismi* [connessi all'identità] mentre i secondi a quella per *diffeomorfismi* [connessi all'identità]. Una teoria di campo topologica dunque produce invarianti lisci e non topologici. È la coincidenza di invarianti topologici e lisci in tre dimensioni (dove le teorie topologiche hanno cominciato ad essere studiate), la causa dell'abuso di linguaggio usato in fisica.

[2]La rinormalizzabilità delle teorie di campo è legata alla divergenza degli integrali negli sviluppi perturbativi. Poiché una teoria topologica è indipendente dalla metrica, i concetti di punti infinitamente vicini, da cui nascono le divergenze ultraviolette, o infinitamente lontani, da cui nascono le divergenze infrarosse, perdono significato. Perciò in generale non è necessario effettuare rinormalizzazioni in una teoria topologica come in un'usuale teoria di campo quantistica. Equivalentemente possiamo dire che i valori di aspettazione nelle teorie di campo topologiche possono essere solo quantità che sono invarianti lisci (o topologici) della varietà M dove la teoria di campo è definita o invarianti di sottovarietà immerse in M. Si può pensare ad una connessione tra teorie fisiche e teorie topologiche, assumendo che le

essere risolte esattamente. Queste teorie sono anche di grande interesse per la matematica, in particolare per la topologia delle varietà di basse dimensioni, in quanto permettono di esprimere invarianti topologici (o lisci) conosciuti attraverso espressioni analitiche, ovvero attraverso gli integrali dello sviluppo perturbativo. Inoltre nuovi invarianti possono essere costruiti a partire dalle teorie di campo topologiche.

Bisogna tuttavia osservare, a questo proposito, che l'integrale funzionale, su cui si basa la quantizzazione delle teorie topologiche, non è rigorosamente definito da un punto di vista matematico. Il che significa che, in matematica, i risultati ottenuti devono spesso essere sottoposti a prove rigorose alternative, le cui linee generalmente sono suggerite dai metodi stessi della teoria di campo. Quindi le teorie di campo topologiche svolgono il compito essenziale di *suggerire* nuove formule e di aprire nuove prospettive per il calcolo rigoroso degli invarianti topologici. Il risultato complessivo è un'interazione estremamente articolata e proficua tra fisica e matematica.

Le teorie topologiche sono teorie di *gauge* il cui tensore energia-impulso (la derivata della Lagrangiana rispetto alla metrica) è Q-esatto, dove Q è un operatore nilpotente $Q^2 = 0$;[3] detto operatore BRST. Dire che il tensore energia-impulso è Q-esatto significa dire che l'accoppiamento della teoria con la gravità è banale e che la teoria non dipende dalla metrica. Vi sono essenzialmente due situazioni in cui ciò si verifica; le cosidette *teorie alla Schwarz* e le *teorie di tipo coomologico*.

- Le teorie alla Schwarz sono teorie di *gauge* con azione classica indipendente dalla metrica (e dunque con tensore energia-impulso classicamente nullo). Per quantizzare, tuttavia, bisogna fissare il *gauge* e ciò richiede l'introduzione di una metrica. I termini che si debbono aggiungere all'azione sono Q-esatti, dove Q è l'operatore BRST [14][70]. Quin-

teorie fisiche siano limiti di bassa energia di teorie topologiche rotte. In altri termini nel limite di alta energia, dove la non rinormalizzabilità costituisce in generale un problema, le teorie fisiche dovrebbero essere sostituite da teorie topologiche (finite). Le infinite costanti di accoppiamento che compaiono nelle teorie non rinormalizzabili dovrebbero essere assorbite in uno dei campi della corrispondente teoria topologica.

[3]Poiché Q è nilpotente, esso definisce una coomologia. In questo contesto un elemento T di uno spazio lineare (o di un gruppo abeliano) su cui Q agisce è per definizione Q-chiuso se $QT = 0$ e Q-esatto se esiste un t tale che $T = Qt$. Ovviamente se T è Q-esatto è anche Q-chiuso ma non è detto il viceversa. I gruppi (o gli spazi) di coomologia sono definiti dallo spazio dei T chiusi modulo i T esatti.

di il tensore energia-impulso quantistico è Q-esatto, cioè non *anomalo*. Ciò è sufficiente perché i valori di aspettazione di osservabili invarianti per trasformazioni di *gauge*, e quindi Q-chiuse, siano indipendenti dalla metrica (v. Sez. 2.1 per la dimostrazione). Ovvero l'invarianza per diffeomorfismi, rotta dalla fissazione del *gauge*, è recuperata grazie alla simmetria BRST quantistica. Esempi di queste teorie sono la teoria BF [64] e la teoria di Chern–Simons [75].

- Le teorie di tipo coomologico sono teorie supersimmetriche non manifestamente indipendenti dalla metrica la cui azione è tuttavia Q-esatta. Ciò implica che anche il tensore energia-impulso è Q-esatto e che quindi i valori di aspettazione di osservabili Q-chiuse sono indipendenti dalla metrica. Queste teorie risultano indipendenti anche dal valore della costante di accoppiamento. In queste teorie i fermioni che generano la supersimmetria hanno spin intero (questo è l'effetto del cosiddetto *twisting*) e quindi assomigliano molto ai *ghost* che, in una teoria di *gauge*, vengono introdotti a seguito della rottura dell'invarianza di gauge stessa. È dunque legittimo domandarsi se tutte queste teorie possano essere viste come derivanti dalla rottura di teorie di *gauge*. Il primo esempio di teorie di questo tipo è dato nella Ref. [73].

In questa tesi considererò solo teorie del primo tipo: in particolare la teoria di Chern–Simons, Cap. 2, e la teoria BF, Capp. 3 e 4.

La teoria di Chern–Simons La teoria di Chern–Simons [75], v. Cap. 2, rappresenta il primo esempio di teoria topologica alla Schwarz in cui è possibile considerare, accanto alla funzione di partizione (che dà un invariante topologico della varietà M su cui la teoria è definita), anche i valori di aspettazione di osservabili (le *Wilson loop*) associate a curve chiuse C immerse (*"imbeddeded"*) in M. L'azione della teoria di Chern–Simons e la *Wilson loop* si scrivono

$$\begin{aligned} S_{\rm CS}[A,M] &:= \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right), \\ W_R(C) &:= \mathrm{Tr}_R\mathrm{Hol}(C,x_0), \end{aligned}$$

dove M è una varietà di tridimensionale e A è una connessione su M a valori nell'algebra di Lie di un gruppo G (generalmente $G=SU(N)$ o $G=$

$SO(N)$). Il simbolo Hol denota l'*olonomia* di A lungo la curva chiusa (*nodo*) C con punto base x_0 e R è una rappresentazione del gruppo di struttura G. L'espressione analitica dell'olonomia è data da

$$\mathrm{Hol}(C, x_0) = \mathcal{P} \exp \oint_C A,$$

dove $\mathcal{P}\exp$ indica l'esponenziale ordinato secondo il cammino.

A questo proposito useremo il termine *nodo* per indicare le classi di equivalenza di curve chiuse in M (ovvero gli *imbedding* di S^1 nello spazio ambiente M). Due curve qui sono equivalenti, quando sono mandate una nell'altra da trasformazioni di M connesse all'identità [4]. Indicheremo col termine "*link*" una collezione di tali curve non intersecantesi (*imbedding* di $S^1 \cup S^1 \cup \cdots \cup S^1$ in M) sempre definite a meno di trasformazioni di M connesse all'identità.

La teoria di Chern–Simons dunque produce invarianti di 3-varietà e di nodi o *link* in 3-varietà.

È necessario notare, tuttavia, che a livello quantistico la simmetria BRST non è sufficiente a garantire l'indipendenza dalla metrica. Infatti nella teoria quantistica di Chern–Simons è necessario procedere a diverse regolarizzazioni (*non* indipendenti dalla metrica), che comportano [75]:

1. l'assegnazione di un *framing alla 3-varietà* M, cioè la scelta di una classe di omotopia di banalizzazioni del fibrato tangente TM

2. l'assegnazione di un *framing* al nodo contenuto in M, cioè la scelta di una sezione mai nulla del fibrato dei vettori *normali* al nodo in M.

Inoltre nello sviluppo perturbativo compaiono termini Q-esatti. Questi termini, per alcune scelte del *gauge* (*gauge* assiali), non possono essere eliminati ordine per ordine.

Il problema del *framing* (o dei *framing*) ci segnala che gli invarianti topologici costruiti attraverso la teoria quantistica di Chern–Simons sono in realtà invarianti di nodi o di 3-varietà *con framing*. Occorre cioè determinare l'effetto della variazione di framing prima di poter parlare di invarianti *topologici* a tutti gli effetti. Quello che risulta è che il comportamento degli invarianti

[4] Per abuso di linguaggio, useremo spesso il termine nodo anche per indicare un rappresentativo di tale classe di equivalenza.

di Chern–Simons sotto un cambio di *framing* è "benigno", cioè che è effetivamente possibile ricostruire invarianti topologici di 3-varietà (invarianti di Jones generalizzati [62][67][75]).

Bisogna qui notare che la relazione con le teorie conformi mostra che è necessario, nella costruzione degli invarianti di cui sopra, sostituire la costante di accoppiamento k (che è quantizzata a causa della non invarianza della teoria per trasformazioni di *gauge* non connesse all'identità) con $k+c_v$, dove c_v è il Casimir quadratico della rappresentazione aggiunta. Come conseguenza l'analiticità in k della teoria è esplicitamente rotta; ciò ha ovviamente delle conseguenze sugli sviluppi perturbativi in $1/k$.

Tali sviluppi, considerati per la prima volta nel *gauge* covariante (di Landau) nelle Reff. [41] e [10], sono molto importanti perché permettono, in linea di principio, di esprimere i coefficienti dei polinomi di Jones in termini di integrali di linea su copie dei nodi. In tali sviluppi dobbiamo tener conto essenzialmente di due difficoltà:

1. interpretare lo *shift* $k \to k + c_v$ nel quadro dello sviluppo perturbativo

2. verificare che la struttura coomologica dell'operatore Q e l'invarianza per diffeomorfismi siano mantenute.

Riguardo al primo punto le opinioni sono molto diverse. Alcuni autori [59][5][54][39] cercano di recuperare lo *shift* con procedure *ad hoc* nello sviluppo perturbativo. L'approccio seguito in questa tesi è piuttosto quello di considerare lo *shift* come un effetto non perturbativo [41]. Questo è coerente con il punto di vista secondo cui lo *shift* è una conseguenza della non invarianza dell'azione di Chern–Simons per trasformazioni di *gauge* non connesse all'identità, che non possono essere considerate nel contesto perturbativo. Vi sono inoltre lavori che mostrano l'esistenza di una struttura supersimmetrica, soggiacente alla teoria di Chern–Simons, che coinvolge la connessione A ed i *ghost*; la forma dei generatori di questa supersimmetria dipende da come viene fissato il *gauge* (nelle Reff. [33], [18] e [51] sono discussi, rispettivamente, il caso del *gauge* covariante, del *gauge* assiale e di un *gauge* interpolante tra i primi due), ma è sempre sufficiente a garantire la finitezza della teoria senza ulteriori correzioni.

La seconda difficoltà non permette di fidarsi degli sviluppi perturbativi e richiede di verificare esplicitamente che i risultati siano degli invarianti topologici, v. Ref. [10]. Il fatto che nel *gauge* covariante l'invarianza per

diffeomorfismi non sia rotta può essere visto come un effetto della supersimmetria $N = 2$ [33] soggiacente alla teoria; i termini Q-esatti possono essere eliminati poiché i termini di "bordo" dello spazio funzionale delle connessioni e dei *ghost* si cancellano a vicenda. Ciò non avviene[5] nel caso di *gauge* assiali in cui la supersimmetria è rotta a $N = 1$.

Nell'ambito perturbativo esiste infine una tecnica generale che si rivela molto utile per studiare le caratteristiche dei valori di aspettazione delle osservabili, prima ancora di effettuare esplicitamente i calcoli perturbativi. Questa tecnica è il cosiddetto "calcolo variazionale" [30] che permette di trattare, nel formalismo funzionale, le deformazioni delle curve su cui sono definite le osservabili. Poiché questa tecnica si basa su di un'integrazione per parti nell'integrale funzionale, la sua validità si basa sull'annullamento dei contributi di bordo e quindi, in ultima analisi, sull'esistenza di una supersimmetria sufficientemente elevata. Questa tecnica permette inoltre di considerare deformazioni singolari delle curve e quindi di dedurre le "relazioni di matassa (*skein*)" (2.49), (A.7), (A.13) e (A.14), che portano al riconoscimento degli invarianti.

La teoria BF La teoria BF, v. Capp. 3 e 4, è il primo tipo di teoria alla Schwarz considerato nella letteratura [64] (v. anche la Ref. [16]). Essa ha come azione

$$S_{BF}[A, B; M] := \frac{1}{2\pi} \int_{M^d} \mathrm{Tr} B \wedge F,$$

dove M^d è una varietà di dimensione d, F è la curvatura di una connessione A su M a valori nell'algebra di Lie di un gruppo G (generalmente $G = SU(N)$ o $G = SO(N)$), e B è una $(d-2)$-forma a valori nella stessa algebra di Lie. La teoria BF in linea di principio è definibile in ogni dimensione, mentre la teoria di Chern–Simons esiste solo in tre dimensioni.

La teoria BF ha altri vantaggi rispetto alla teoria di Chern–Simons. Prima di tutto poiché è una vera teoria di *gauge*, in cui l'azione è invariante anche per trasformazioni non connesse all'identità, il che elimina gli effetti

[5] Questi *gauge* non sono mai stati studiati nel caso della teoria di Chern–Simons (fatta eccezione per la Ref. [37], dove si mostra che la quantizzazione nel *gauge* di cono luce porta naturalmente all'equazione di Knizhnik–Zamolodchikov [48]), a causa delle ambiguità cui porta la regolarizzazione. Se intendiamo gli sviluppi perturbativi in questo *gauge* come quelli che otteniamo nell'ambito della teoria BF, allora i valori di aspettazione non producono dei veri invarianti, come sarà discusso più avanti.

non perturbativi che affliggono la teoria di Chern–Simons. Inoltre poiché essa è una vera teoria topologica in ogni dimensione [16] e, nel caso particolare delle tre dimensioni, a differenza della Chern–Simons non richiede un *framing* per la varietà su cui è definita. Infine la teoria BF è direttamente collegata a teorie fisiche. In tre dimensioni con gruppo $SO(3)$ essa *è* la teoria della gravità quantistica euclidea [74]. In generale poi la teoria BF è ragionevolmente connessa alla teoria di Yang–Mills nel limite in cui la costante di accoppiamento va a zero [24]. Infine, nel caso abeliano[6], la teoria BF è stata usata per bosonizzare sistemi fermionici in ogni dimensione [36].

In tre e quattro dimensioni esistono anche altri tipi di teorie BF le cui azioni sono date da

$$\begin{aligned}\widetilde{S_{BF}}[A,B;M^3] &= \int_{M^3} \mathrm{Tr}\left(B\wedge F+\frac{\kappa^2}{3}B\wedge B\wedge B\right),\\ \widetilde{S_{BF}}[A,B;M^4] &= \int_{M^4} \mathrm{Tr}\left(B\wedge F+\frac{\kappa^2}{2}B\wedge B\right).\end{aligned}$$

Le teorie corrispondenti sono dette teorie BF con *termine cosmologico,* così chiamato perché in tre dimensioni esso corrisponde al termine cosmologico della gravità quando si lavora col gruppo $SO(3)$.

Sinora tuttavia l'utilità della teoria BF è stata *gravemente limitata dalla mancanza di osservabili non banali.* Queste osservabili sono state introdotte di recente nelle Reff. [31] e [25] rispettivamente in quattro e tre dimensioni. In questa tesi si studiano le osservabili anche nel caso di teoria BF con *termine cosmologico.* Nelle teorie BF tridimensionali (con o senza termine cosmologico) le osservabili sono associate a nodi e *link.* In quattro dimensioni invece le osservabili sono associate 2-sfere immerse in M^4. La descrizione dettagliata di queste osservabili è più complessa che nel caso di Chern–Simons e per questo si rinvia alla Sez. 4.2.

Uno degli obiettivi principali di questa tesi è quello di studiare il significato topologico dei valori di aspettazione delle osservabili nelle varie teorie BF. In particolare si mostra che la teoria BF con termine cosmologico coincide, a livello perturbativo, con la teoria di Chern–Simons e quindi fornisce i polinomi di Jones generalizzati. La struttura supersimmetrica presente anche in questo

[6]Nel caso non abeliano ($G = SU(2)$), la teoria BF è stata usata per la bosonizzazione di sistemi bidimensionali [20]. È interessante notare che in questo contesto si debbono usare delle osservabili analoghe a quelle introdotte in dimensione più alta [31][25].

caso [53] garantisce la non rinormalizzazione della costante di accoppiamento a livello perturbativo. Tuttavia l'assenza di effetti non perturbativi rende la teoria veramente finita e analitica nella costante di accoppiamento, che non è soggetta ad alcuno *shift*. Come nella teoria di Chern–Simons anche nella teoria BF è necessario regolarizzare le osservabili con un *framing* per i nodi; in maniera molto naturale, tuttavia, il *framing* può essere introdotto direttamente nelle osservabili anziché nello sviluppo perturbativo come nel caso della teoria di Chern–Simons. Tutte queste caratteristiche permettono di studiare in dettaglio gli sviluppi perturbativi compresi quelli in cui si fissi il *gauge* in maniera singolare, come accade nel caso di *gauge* assiali. Ciò permette di ottenere i coefficienti dei polinomi di Jones [45] e HOMFLY [34] in tre differenti modi:

1. nel *gauge* covariante in termini di integrali multipli su copie del nodo (come nelle Reff. [41] e [10]);

2. nel *gauge* di cono di luce complessificato in termini di olonomie di connessioni di Knizhnik–Zamolodchikov [48] (integrali di Kontsevich [50][11]);

3. nel *gauge* assiale in termini di opportuni tensori (4.117) con indici corrispondenti agli incroci che compaiono nella proiezione del nodo sul piano ortogonale alla direzione scelta per fissare il *gauge* [23].

Il legame tra i primi due approcci non era stato sinora chiarito[7] mentre il terzo costituisce una novità. Tuttavia, come già ho osservato nel caso della teoria di Chern–Simons, lo sviluppo perturbativo può rompere la struttura BRST della teoria e di conseguenza l'invarianza per diffeomorfismi. Ciò non accade nel caso del *gauge* covariante, dove la supersimmetria $N = 2$ soggiacente è sufficientemente ampia a garantire la compensazione di effetti di "bordo". Nel caso dei *gauge* assiali, invece, dove la supersimmetria è rotta a $N = 1$, parte dell'invarianza è persa. Le "mosse proibite" hanno tuttavia un'interpretazione geometrica. Nel caso del *gauge* di cono di luce complesso, dove il nodo è rappresentato in termini di una funzione di Morse, le mosse proibite (fig. 7) corrispondono a cambiare in maniera singolare tale funzione.

[7] Se si lavora nel contesto della teoria di Chern–Simons, le regolarizzazioni necessarie a definire lo sviluppo perturbativo nel *gauge* di cono di luce non permettono di dare un significato rigoroso a questo legame.

Nel caso del *gauge* assiale (reale), dove il nodo è rappresentato in termini della sua proiezione sul piano normale alla direzione usata per fissare il *gauge*, le mosse proibite (fig. 12) corrispondono a cambi singolari di proiezione. È in ogni caso possibile calcolare esattamente l'effetto di queste mosse proibite, il che permette di costruire dei veri invarianti.

Il caso della teoria BF senza costante cosmologica [25] è particolarmente interessante e non riconducibile alla teoria di Chern–Simons. In questo caso si ottiene il polinomio di Alexander–Conway [1][29], che corrisponde ad un limite singolare dei polinomi di HOMFLY. Tale polinomio non è legato ai gruppi quantici e, a differenza del polinomio di HOMFLY, ha un chiaro significato topologico[8]. Un risultato notevole di questa tesi, v. anche [25], è che viene trovata per la prima volta una relazione tra una teoria quantistica di campo ed il polinomio di Alexander–Conway.

In tutte le teorie BF (con o senza termine cosmologico) è possibile inoltre definire un "calcolo variazionale", valido se si usano *gauge* non singolari. Tale calcolo permette di mostrare l'invarianza per diffeomorfismi e di dedurre la "relazione di matassa". Quando si lavora con i *gauge* assiali la tecnica del calcolo variazionale non è disponibile; tuttavia è possibile dimostrare direttamente quali sono le mosse proibite, qual è il loro effetto e qual è la relazione di matassa.

La conclusione di questa tesi è che le teorie BF in tre dimensioni con opportune osservabili producono tutti gli invarianti di nodi orientati disponibili oggi. Questo non è vero per la teoria di Chern–Simons.

Ulteriori applicazioni del formalismo della teoria BF, che non discuto in questa tesi, sono legate allo studio dei polinomi di Donaldson–Witten [32][73][76] in quattro dimensioni [24] (in tre dimensioni ci si aspetta invece una relazione con l'invariante di Casson) ed allo studio del settore topologico della gravità in tre e quattro dimensioni [26].

Piano della tesi

Nel capitolo 2 descrivo la teoria di Chern–Simons. Mi soffermo sulla quantizzazione canonica [75], che porta al riconoscimento degli invarianti, e sulla teoria perturbativa nel *gauge* covariante [41][10], che porta a formule analitiche

[8] Se $M = S^3$ il polinomio di Alexander è connesso all'omologia del ricoprimento ciclico del complemento del nodo. Non esistono simili interpretazioni per i polinomi di Jones e HOMFLY.

per il calcolo esplicito degli invarianti stessi. Accenno anche ai *gauge* assiali [37], poco considerati nella letteratura, ed al cosiddetto *calcolo variazionale* [30].

Nel capitolo 3 passo in rassegna quanto finora si conosce sulle teorie BF senza osservabili [64][16], sia nel caso abeliano che in quello non abeliano. Accenno anche alla relazione con la gravità in $2+1$ dimensioni [74].

Il capitolo 4 tratta le teorie BF non abeliane in presenza di osservabili. Esso costituisce la parte originale di questa tesi, i cui risultati sono frutto di una collaborazione con M. Martellini e con P. Cotta–Ramusino, ai quali si aggiunge J. Fröhlich per le pagine riguardanti lo studio dei *gauge* assiali [23]. In tale capitolo è discussa la costruzione generale delle osservabili ed è affrontata, in maniera esauriente, la tecnica del *calcolo variazionale*. Nella seconda parte vi discuto la teoria BF con termine cosmologico, che mostro essere legata alla teoria di Chern–Simons, non solo nel *gauge* covariante ma anche in quelli assiali; ne seguono così relazioni tra gli invarianti tipo GMM [41], gli integrali di Kontsevich [50] ed alcuni nuovi invarianti di tipo combinatorio [23]. Nell'ultima parte discuto la teoria BF pura mostrando [25] come si ottengano da essa invarianti di tipo finito legati ai coefficienti del polinomio di Alexander–Conway. Infine accenno brevemente alla generalizzazione delle osservabili in quattro dimensioni [31].

Per comodità del lettore ho aggiunto una breve appendice contenente le informazioni essenziali sulla teoria dei nodi (per approfondimenti si rimanda alla Ref. [46]).

Ringraziamenti

Per la stesura di questa tesi ho goduto della collaborazione di M. Martellini, mio tutore, e di P. Cotta–Ramusino, che ringrazio calorosamente per il sostegno e l'aiuto accordatomi. Ringrazio inoltre J. Fröhlich per le proficue discussioni, da cui deriva parte del capitolo 4, e per la cordiale ospitalità presso l'ETH di Zurigo.

Ringrazio L. Girardello, che è stato mio relatore durante la tesi di laurea, per il continuo incoraggiamento datomi nel corso di questa ricerca.

Ringrazio F. Fucito e A. Sagnotti per le interessanti discussioni su problemi di gravità quantistica correlati a questa tesi.

Per numerose ed utili discussioni ringrazio A.Yu. Alekseev, D. Altschuler,

R. Attal, F. Belgiorno, J.S. Carter, M. Dedò, S. De Santis, A. Gamba, V. Goriounov, P.A. Marchetti, S. Ramgoolam, M. Rinaldi e V. Sadov.

Un ringraziamento particolare va ai colleghi del Dottorato di Ricerca di Milano che hanno condiviso con me le gioie e i dolori di questa attività.

Ringrazio infine il M.U.R.S.T. per avermi assegnato una borsa di studio per il conseguimento del Dottorato di Ricerca e l'I.N.F.N. per il sostegno economico accordatomi durante questi anni.

Capitolo 2

La teoria di Chern–Simons

In questo capitolo descriverò la teoria di *gauge* topologica nota come teoria di Chern–Simons. Essa è stata studiata per la prima volta da Witten [75] allo scopo di ottenere una descrizione intrinsecamente tridimensionale dei polinomi di Jones (v. App. A e Ref. [45]) al posto della descrizione bidimensionale data a partire dai *gruppi quantici* [45][34]. Nelle prime sezioni descriverò gli aspetti generali della teoria e la quantizzazione canonica della stessa, seguendo essenzialmente la Ref. [75]. In seguito descriverò l'approccio funzionale della Ref. [37] con *gauge* di cono di luce e quello delle Reff. [41] e [10] con *gauge* covariante. Completerò il capitolo descrivendo le tecniche di integrazione per parti esposte nelle Reff. [30] e [19].

Lo scopo di questo capitolo consiste nell'introdurre concetti e tecniche che saranno utili quando descriverò la teoria BF. Poiché gli argomenti qui esposti sono ben noti mi limiterò all'essenziale rimandando alla bibliografia il lettore interessato.

2.1 Generalità

L'azione di Chern–Simons è ottenuta integrando la 3-forma di Chern–Simons [28] su una 3-varietà M:

$$S_{\rm CS}[A,M] := \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{2.1}$$

$$= \frac{k}{8\pi}\int_M \epsilon^{ijk}\mathrm{Tr}\left(A_i(\partial_j A_k-\partial_k A_j)+\frac{2}{3}A_i[A_j,A_k]\right), \tag{2.2}$$

dove A è una 1-forma di connessione sul fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$. Salvo avviso contrario supporremo sempre che il gruppo di struttura G sia semplice e compatto[1]. Una trasformazione di *gauge* agisce sulla connessione come segue:

$$A(x) \to g(x)A(x)g^{-1}(x) + g(x)dg^{-1}(x), \tag{2.3}$$

dove g è una funzione da M in G. Per trasformazioni di *gauge* connesse all'identità $g(x) = \mathbf{1} + \omega(x) + o(\|\omega(x)\|)$, possiamo riscrivere la (2.3) in forma infinitesima:

$$\delta A = -d_A \omega. \tag{2.4}$$

L'azione (2.1) è invariante solo sotto trasformazioni di *gauge* connesse all'identità. Sotto una trasformazione generale si ha invece

$$S_{\mathrm{CS}}[A] \to S_{\mathrm{CS}}[A] + 2\pi k S_{\mathrm{WZ}}[g], \tag{2.5}$$

dove

$$S_{\mathrm{WZ}}[g] = \frac{1}{24\pi^2} \int_M \mathrm{Tr}\left(g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg\right) \tag{2.6}$$

è il funzionale di Wess–Zumino che misura il *numero di avvolgimenti* $m \in \pi_3(G)$, che per trasformazioni non connesse all'identità è diverso da zero. Tuttavia, come già osservava Dirac nel suo lavoro sui monopoli magnetici, la consistenza della teoria quantistica richiede solo l'invarianza del "peso di Gibbs" $\exp iS_{\mathrm{CS}}$. Tale invarianza impone una quantizzazione della costante di accoppiamento k. Nel caso di gruppi compatti e semplici, si mostra che $\pi_3(G) \simeq \mathbf{Z}$, e quindi la condizione di normalizzazione risulta essere:

$$k \in \mathbf{Z}. \tag{2.7}$$

2.1.1 La simmetria BRST

Per quantizzare la teoria è necessario fissare il *gauge* con una condizione del tipo

$$\mathcal{F}^a[A](x) = 0, \quad \forall a \ \forall x \tag{2.8}$$

dove $\mathcal{F}$ è un funzionale di A. Nell'integrale funzionale ciò è ottenuto introducendo dei nuovi campi ϕ, c e $\bar{c}$ a valori nell'algebra di Lie di G (c e $\bar{c}$ sono variabili di Grassmann) e considerando l'azione:

$$S_{\mathrm{TOT}}[A, \phi, c, \bar{c}] := S_{\mathrm{CS}}[A] + S_{\mathrm{gf}}[A, \phi] + S_{\mathrm{FP}}[A, c, \bar{c}], \tag{2.9}$$

[1] Il caso di gruppi non compatti è trattato nella Ref. [13].

dove

$$S_{\rm gf} = \int d^3x \, \sqrt{\gamma(x)} \, {\rm Tr}\phi(x)\mathcal{F}(x), \tag{2.10}$$

$$S_{\rm FP} = \int d^3x \, \sqrt{\gamma(x)} \, {\rm Tr}\bar{c}(x)\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A_\mu}(x)D_\mu c(x). \tag{2.11}$$

L'azione (2.9) chiaramente non è più invariante sotto la (2.4). Tuttavia si può verificare che essa è invariante sotto una trasformazione BRST [14][70], il cui generatore Q è nilpotente ed agisce come segue:

$$QA_\mu = -D_\mu c, \tag{2.12}$$

$$Q\phi = 0, \tag{2.13}$$

$$Q\bar{c} = \phi, \tag{2.14}$$

$$Qc = \frac{1}{2}[c,c]; \tag{2.15}$$

l'ultimo termine è non nullo poiché i campi c anticommutano. È ora immediato mostrare che $S_{\rm gf} + S_{\rm CS} = Q\Sigma$, con

$$\Sigma[A,\bar{c}] := \int d^3x \, \sqrt{\gamma(x)} \, {\rm Tr}\bar{c}(x)\mathcal{F}(x)$$

Poiché $S_{\rm CS}$ non dipende dalla metrica γ, si verifica immediatamente che il tensore energia-impulso è Q-esatto:

$$\frac{\delta S_{\rm TOT}}{\delta\gamma} = Qt, \tag{2.16}$$

dove $t := \frac{\delta\Sigma}{\delta\gamma}$. Ne segue che il valore di aspettazione[2]

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\, e^{iS_{\rm TOT}}\, \mathcal{O} \tag{2.17}$$

è indipendente dalla metrica se

$$\frac{\delta\mathcal{O}}{\delta\gamma} = 0 \tag{2.18}$$

[2]Nel seguito per semplicità scriveremo

$$\int [\mathcal{D}A]\, e^{iS_{\rm CS}}\, \mathcal{O}.$$

e

$$Q\mathcal{O} = 0. \tag{2.19}$$

Infatti per le (2.16) e (2.18) una variazione rispetto alla metrica della (2.17) produce il termine

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\, e^{iS_{\rm TOT}}\,(Qt)\mathcal{O}$$

che dopo un'integrazione per parti[3] porta al valore di aspettazione di $tQ\mathcal{O}$ che per la (2.19) vale zero. Si noti infine che tale condizione è automaticamente soddisfatta se consideriamo un'osservabile $\mathcal{O}$ che dipende solo da A ed è invariante sotto la (2.4).

Possiamo concludere questa sezione dicendo che la scelta di un *gauge* rompe l'invarianza per diffeomorfisimi; tale invarianza è tuttavia restaurata dalla simmetria BRST. Questa dimostrazione tuttavia è formale e sarebbe corretta se il calcolo esplicito degli sviluppi perturbativi della (2.17) non introducesse delle divergenze che devono essere regolarizzate. L'effetto di quest'ultime, come vedremo, consiste nel rompere, anche se in maniera debole, l'invarianza per diffeomorfismi. È infine interessante notare che nel *gauge* covariante $\mathcal{F} = \partial^\mu A_\mu$ è possibile introdurre [33] un secondo operatore (vettoriale) $\widetilde{Q}_\mu$, tale che

$$\widetilde{Q} S_{\rm TOT} = 0, \tag{2.20}$$

$$\{\widetilde{Q}, \widetilde{Q}\} = 0, \tag{2.21}$$

$$\{Q, \widetilde{Q}\} = d + \text{equazioni del moto}. \tag{2.22}$$

Ciò significa che *on-shell* è realizzata una supersimmetria $N = 1$. La possibilità di scambiare i *ghost* $c \leftrightarrow \bar{c}$ permette di introdurre altre due cariche $\bar{Q}, \overline{\widetilde{Q}}$. Si verifica esplicitamente che, in questo *gauge*, l'unione di queste due supersimmetrie genera una supersimmetria $N = 2$. Nel caso dei *gauge* assiali $\mathcal{F} = n^\mu A_\mu$, dove n è un versore arbitrario, c'è ancora la possibilità di definire

[3] L'*integrazione per parti* ha un significato puramente formale in quanto la misura sullo spazio funzionale non è definita. L'idea è che tutti i termini Q-esatti all'interno di un integrale funzionale, dove Q giuoca il ruolo di un operatore di *divergenza*, possano essere scartati; ovvero, parlando liberamente, che non ci siano contributi provenienti dalla "frontiera dello spazio funzionale." La formula di integrazione per parti non è quindi rigorosa; anzi essa è addirittura falsa in taluni casi, per esempio quando si considerano i *gauge* di tipo assiale. Torneremo sovente su questo problema, che considereremo sotto vari punti di vista.

la carica $\widetilde{Q}$ [18]; tuttavia l'unione delle due superalgebre $N = 1$ non genera una superalgebra $N = 2$. Nella Ref. [51] si studia infine un *gauge* interpolante tra il *gauge* covariante e quello assiale. In tale *gauge* è realizzata la supersimmetria $N = 2$ che viene rotta a $N = 1$ nel limite (singolare) in cui si ottiene il *gauge* assiale. La presenza della supersimmetria garantisce la rinormalizzazione finita della costante di accoppiamento k (a livello perturbativo k non rinormalizza affatto se si chiede che i controtermini non rompano la supersimmetria). La rottura della supersimmetria $N = 2$ in $N = 1$ nel *gauge* assiale è invece responsabile della non completa invarianza topologica della teoria in questo *gauge*. Riprenderemo questo discorso nel Cap. 4 a proposito della teoria BF, dove non ci sono effetti non perturbativi e dove quindi quest'analisi acquista un valore più rigoroso.

2.2 La funzione di partizione per $k \to \infty$

Come nella Ref. [75], cominciamo considerando il caso semplice in cui la funzione di partizione

$$Z(M) = \int [D\mathcal{A}] \exp iS_{\mathrm{CS}} \tag{2.23}$$

è calcolata nel limite di accoppiamento debole ($k \to \infty$). In questo limite l'integrazione funzionale è dominata dai minimi dall'azione, ossia dalle connessioni piatte:

$$F = d_A A = 0 \tag{2.24}$$

Indicando con α le classi di equivalenza di tali connessioni piatte, possiamo scrivere

$$Z(M) = \sum_{\alpha} \mu(A^{(\alpha)}). \tag{2.25}$$

I termini $\mu(A^{(\alpha)})$ possono quindi essere calcolati col metodo della *fase stazionaria*, e danno

$$\mu(A^{(\alpha)}) = \exp(ikI(A^{(\alpha)})) \frac{\det(\Delta)}{\sqrt{\det(L_-)}}, \tag{2.26}$$

dove:

- $I(A^{(\alpha)})$ è l'invariante topologico di Chern–Simons

$$I(A^{(\alpha)}) = \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A^{(\alpha)} \wedge dA^{(\alpha)} + \frac{2}{3}A^{(\alpha)} \wedge A^{(\alpha)} \wedge A^{(\alpha)}\right) \qquad (2.27)$$

- L_- è l'operatore che compare nella parte quadratica di $S_{\mathrm{CS}} + S_{\mathrm{gf}}$ nella (2.9)

- Δ è l'operatore che compare nella parte quadratica di S_{FP} nella (2.9)

A meno di una fase il rapporto $\sqrt{\det(L_-)}/\det(\Delta)$ fornisce la radice quadrata dell'invariante topologico noto come *torsione di Ray–Singer*,[4] che indicherò nel seguito con $\mathcal{T}$ (o $\mathcal{T}_\alpha$ per ricordare la dipendenza dalla classe di equivalenza). Per calcolare esplicitamente la fase è necessario scegliere una regolarizzazione e quindi non ci si deve aspettare di trovare un'invariante topologico. Il risultato finale, ottenuto nella Ref. [75], è il seguente:

$$Z(M) \overset{k\to\infty}{\cong} \exp\left[i\pi d\left(\frac{\eta_{\mathrm{grav}}}{2} + \frac{1}{12}\frac{I(g)}{2\pi}\right)\right]\sum_\alpha e^{i(k+c_v)I(A^{(\alpha)})}\mathcal{T}_\alpha^{-\frac{1}{2}}, \qquad (2.28)$$

dove:

- d è la dimensione del gruppo G

- c_v è il Casimir quadratico della rappresentazione aggiunta di G (nel caso $G = SU(N)$, si ha $c_v = N$); si noti che, a questo livello, appare necessario sostituire la costante di accoppiamento k con $k + c_v$

- $I(g)$ è il termine gravitazionale di Chern–Simons:

$$I(g) = \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right),$$

  con ω la connessione di Levi–Civita sul fibrato di spin di M

- η_{grav} è l'"invariante eta" di Atiyah–Patodi–Singer [9] per la parte gravitazionale dell'operatore L_-; tutto quello che qui ci interessa sapere

[4] Per la definizione della torsione di Ray–Singer seguo la convenzione della Ref. [64]. Altri, p.es. [75], definisce invece $\mathcal{T} := \det(\Delta)^2/\det(L_-)$.

sull'invariante eta è che, in base al teorema di Atiyah–Patodi–Singer, la combinazione

$$\frac{\eta_{\text{grav}}}{2} + \frac{1}{12}\frac{I(g)}{2\pi}$$

è un invariante topologico della varietà M con una scelta di *framing* (ossia con la scelta di una classe di omotopia di banalizzazioni del fibrato tangente).

Come si vede, quindi, la funzione di partizione di Chern–Simons dà un invariante topologico della 3-varietà M con una scelta di *framing*. Tuttavia, poiché è possibile trovare la legge di trasformazione della funzione di partizione sotto un cambiamento di *framing* di s unità[5]

$$Z \to Z \exp(2\pi i s d/24), \tag{2.29}$$

ciò equivale ad avere un vero invariante topologico di M.

2.3 L'introduzione delle osservabili

Come osservato nella Sez. 2.1, per ottenere ulteriori invarianti a partire da una teoria topologica, dobbiamo considerare i valori di aspettazione di un'osservabile che sia, allo stesso tempo, invariante di *gauge* (2.19) e indipendente dalla metrica (2.18). È possibile mostrare che l'unica osservabile nella connessione A che soddisfi ad entrambe queste proprietà è la *"Wilson loop"*

$$W_R(C) := \text{Tr}_R \text{Hol}(C, x_0), \tag{2.30}$$

dove R indica una rappresentazione del gruppo G e $\text{Hol}(C, x_0)$ è l'*olonomia* calcolata lungo la curva chiusa C:

$$\text{Hol}(C, x_0) = \mathcal{P} \exp \oint_C A; \tag{2.31}$$

$\mathcal{P}\exp$ indica l'esponenziale ordinato lungo il cammino, mentre x_0 rappresenta un punto base per la curva C; sotto trasformazioni di *gauge* (2.3) l'olonomia trasforma come segue:

$$\text{Hol}(C, x_0) \to g(x_0)\text{Hol}(C, x_0)g^{-1}(x_0), \tag{2.32}$$

[5]Lavorando con k finito si ottiene la (2.57).

e quindi la traccia in (2.30) elimina ogni dipendenza sia dal *gauge* sia dal punto base.

È interessante considerare un approccio costruttivo per ottenere la (2.31), soprattutto in vista di un'analoga costruzione necessaria per la teoria BF dove il punto di vista geometrico non aiuta più di tanto. Cominciamo dal caso abeliano. Poiché A è una 1-forma è naturale integrarla lungo una linea (si noti che questo integrale è indipendente dalla struttura metrica di M). Nel caso abeliano la derivata covariante che compare nella (2.4) si riduce ad una derivata ordinaria; per il teorema di Stokes, allora, l'osservabile

$$h_1(A) := \oint_C A$$

è invariante se C è una curva chiusa. Nel caso non abeliano, tuttavia, sotto una trasformazione di *gauge* infinitesima si ha

$$\delta h_1(A) = -\widetilde{h_1}(A, \omega),$$

con

$$\widetilde{h_1}(A, \omega) := \oint_C [A, \omega].$$

Bisogna quindi introdurre altre osservabili che, combinate assieme alla h_1, producano un invariante. Consideriamo

$$h_n(A) := \oint_{x_0}^{x_0} dx_n^{\mu_n} \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1}^{\mu_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_2} dx_1^{\mu_1} \; A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) = \mathcal{P} \oint_C A^n, \tag{2.33}$$

dove l'ordinamento è reso necessario dalla non commutatività delle A (nel caso abeliano banalmente $h_n(A) = h_1(A)^n/n!$). È utile introdurre anche h_0 definito come l'elemento unità di G. Non è difficile mostrare che, sotto una trasformazione di *gauge* infinitesima, si ha

$$\delta h_n(A) = -\widetilde{h_n}(A, \omega) + \widetilde{h_{n-1}}(A, \omega) + [\omega(x_0), h_{n-1}(A)], \tag{2.34}$$

dove $\widetilde{h_n}(A, \omega)$ è ottenuto da $h_n(A)$ rimpiazzando in tutti gli n modi possibili un A con un commutatore $[A, \omega]$, se $n > 0$; inoltre si intende $\widetilde{h_0} = \widetilde{h_{-1}} = 0$. La struttura della (2.34) suggerisce di sommare tutti gli h_n ottenendo così l'olonomia nella forma

$$\mathrm{Hol}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(A). \tag{2.35}$$

È facile vedere che dalla (2.34) segue

$$\delta \mathrm{Hol}(A) = [\omega(x_0), \mathrm{Hol}(A)], \tag{2.36}$$

che è la forma infinitesima della (2.32).

A partire dalla (2.30) è possibile ottenere gli invarianti topologici associati ad un insieme di nodi $\{C_i\}$ (ossia un *link*) e di rappresentazioni $\{R_i\}$ $(i = 1, \ldots, r)$, calcolando il valore di aspettazione delle *Wilson loop* corrispondenti[6]

$$Z(M; C_i, R_i) := \int [D\mathcal{A}]\, e^{iS_{\rm CS}} \prod_{i=1}^{r} W_{R_i}(C_i). \tag{2.37}$$

Nel caso in cui $M = S^3$ e le rappresentazioni R_i coincidono con R, il valore di aspettazione normalizzato

$$\langle C_1 \ldots C_r \rangle := \frac{Z(S^3, C_i, R)}{Z(S^3)} \tag{2.38}$$

fornisce gli invarianti che compaiono nella teoria di Jones [45], come sarà mostrato nel seguito. Per dare senso alla (2.38) tuttavia dobbiamo introdurre il concetto di *framing* per i nodi C_i che in essa compaiono. Conviene cominciare la discussione partendo da un caso semplice.

2.3.1 Il caso abeliano

Consideriamo $G = U(1)$. In questo caso l'azione (2.1) diventa quadratica. Una semplice integrazione gaussiana porta a

$$\langle C_1 \ldots C_r \rangle = \exp\left(\frac{2\pi i}{k} \sum_{i,j=1}^{r} n_i n_j \Phi(C_i, C_j) \right) \tag{2.39}$$

dove gli n_i sono degli interi (corrispondenti alle rappresentazioni di $U(1)$) e

$$\Phi(C, C') := \frac{1}{4\pi} \oint_C dx^i \oint_{C'} dx^j \; \epsilon_{ijk} \frac{(x-y)^k}{|x-y|^3} \tag{2.40}$$

[6]Se tutte le rappresentazioni R_i coincidono con una medesima rappresentazione R, la (2.37) si può anche scrivere

$$Z(M; C_i, R) := \int [D\mathcal{A}]\, e^{iS_{\rm CS}}\, {\rm Tr}_R[{\rm Hol}(C_1) \otimes \ldots \otimes {\rm Hol}(C_r)].$$

è il *numero di concatenazioni* di Gauss, che è un invariante topologico fintantoché C e C' sono curve distinte. Se $C = C'$ l'integrale (2.40), pur restando finito, non fornisce un invariante topologico di C. Questo significa che nella (2.39) dobbiamo preoccuparci dei termini in cui $i = j$; ossia dobbiamo dare un significato al *numero di autoconcatenazioni*.

La regolarizzazione

Come nel caso della funzione di partizione non è possibile trovare una regolarizzazione che preservi esattamente la covarianza generale e possa quindi fornire un vero invariante topologico del *link*. Tuttavia, anche in questo caso, la teoria può essere regolarizzata in maniera non ambigua se specifichiamo un dato supplementare: il *framing*[7] dei nodi che costituiscono il *link*. Dato un nodo C, per *framing* si intende una classe di omotopia di banalizzazioni del suo fibrato normale. Un altro modo di vedere il *framing*, consiste nel considerare accanto a C un secondo nodo C_f definito[8] da una sezione che non si annulla mai del fibrato normale di C. Per numero di autoconcatenazioni di C si intende quindi $\Phi(C, C_f)$ che è ben definito; inoltre si può mostrare che esso dipende solo dalla classe topologica del campo vettoriale usato per spostare C in C_f.

Esiste in S^3 un *framing canonico* che corrisponde a fissare a zero il numero di autoconcatenazioni (esso verrà sempre usato nel seguito, salvo avviso contrario). Tuttavia per ottenere dalla (2.38) un invariante topologico, è necessario trovare la legge di trasformazione sotto un cambiamento di *framing* di t unità; dalla (2.39) segue immediatamente che nel caso abeliano[9]

$$\langle W \rangle \to \exp(2\pi i t n_i^2/k) \cdot \langle W \rangle \,. \tag{2.41}$$

La necessità di un *framing* per i nodi è l'analogo in $2+1$ dimensioni delle

[7] Il problema del numero delle autoconcatenazioni, relativo all'integrale (2.40) per $C = C'$, fu affrontato per la prima volta nella letteratura matematica nella Ref. [21] e più tardi nella letteratura fisica nella Ref. [60], dove si mostrava che $\Phi(C, C) + \tau(C)/(4\pi)$ è un invariante. Con $\tau(C)$ s'intende la torsione integrata del nodo, per definire la quale è necessario specificare un *framing*. Per una discussione più approfondita del problema e per una bibliografia più estesa si consiglia la Ref. [10]. Per una versione combinatoria del problema si rimanda all'App. A ed alla Ref. [46].

[8] Questo tipo di regolarizzazione corrisponde a quella che i fisici in teoria di campo chiamano *"point-splitting"*.

[9] Nel caso non abeliano la (2.41) è sostituita dalla (2.54).

monodromie che nascono nelle teorie conformi razionali in $1+1$ dimensioni. Da un punto di vista fisico le linee di Wilson possono essere viste come le traiettorie di una particella carica con statistica frazionaria, ossia di una particella la cui funzione d'onda cambia di una fase $\exp 2\pi i\delta$ in seguito ad una rotazione di 2π. Il calcolo delle ampiezze di probabilità per particelle di questo tipo richiede oltre alla traiettoria un'ulteriore informazione: quante rotazioni di 2π la particella compia lungo il suo tragitto. La (2.41) indica che la statistica di queste particelle è data da $\delta = n_i^2/2k$ ($\delta = h_R$ nel caso non abeliano, dove con h_R si intende il peso conforme del campo primario nella rappresentazione R).

2.4 La quantizzazione canonica

Per effettuare la quantizzazione canonica, v. Ref. [75], è necessario scegliere arbitrariamente una direzione e interpretarla come *tempo*. Conviene quindi inizialmente pensare che la 3-varietà M abbia la forma $\Sigma \times \mathbf{R}$, dove Σ è una superficie di Riemann. Nel caso generale possiamo pensare di tagliare M in "pezzi" di questa forma e di reincollarli assieme. In termini di teoria quantistica quest'ultima operazione corrisponde a calcolare i prodotti scalari delle funzioni d'onda associate alle superficie di Riemann lungo le quali incolliamo i pezzi.

Nella quantizzazione canonica della teoria su $\Sigma \times \mathbf{R}$, è naturale scegliere il *gauge* temporale $A_0 = 0$ (dove l'indice 0 si riferisce alla direzione temporale $\mathbf{R}$). L'azione diventa così quadratica

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{k}{8\pi} \int dt \int_\Sigma \epsilon^{ij} \mathrm{Tr} A_i \frac{d}{dt} A_j,$$

e tutta la nonlinearità si scarica sul vincolo (legge di Gauss)

$$\frac{k}{8\pi} \epsilon^{ij} F^a_{ij}(x) = 0. \tag{2.42}$$

Lo spazio delle fasi[10] fisico $\mathcal{M}_\Sigma$ della teoria è lo spazio dei moduli delle connessioni piatte su Σ modulo trasformazioni di *gauge*. Si può mostrare che $\mathcal{M}_\Sigma$

[10] I momenti della teoria hanno la forma $\Pi^i(x) = \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ji} A_j(x)$. Quindi A_1 e A_2 sono, a meno di una costante moltiplicativa, l'uno il momento coniugato dell'altro. Lo spazio delle fasi della teoria è quindi lo spazio dove vivono A_1 e A_2.

è compatto, con eventuali singolarità. La finitezza del volume di $\mathcal{M}_\Sigma$ implica che lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_\Sigma$ della teoria quantistica ha dimensione finita. La finitezza di questi spazi, già studiati nel contesto delle teorie conformi, rende la teoria esattamente solubile.

Nell'approccio della quantizzazione canonica, l'introduzione delle linee di Wilson corrisponde a sostituire la legge di Gauss (2.42) con il vincolo

$$\frac{k}{8\pi}\epsilon^{ij}F^a_{ij}(x) = \sum_{s=1}^{r}\delta^2(x-P_s)T^a_{(s)}, \tag{2.43}$$

dove i P_s sono i punti in cui le linee di Wilson attraversano Σ e i $T^a_{(s)}$ sono i generatori del gruppo associati alla s-esima linea. Il vincolo (2.43) implica che le connessioni $A^a(x)$ non possono essere viste come c-numeri, neanche a livello classico. Dobbiamo quindi pensare che le connessioni nella teoria di Chern–Simons in presenza di linee di Wilson siano dei q-numeri e che le loro olonomie appartengano ad un *gruppo quantico*, deformazione del gruppo classico G su cui si basa la teoria. Il punto fondamentale è che anche in questo caso lo spazio di Hilbert fisico $\mathcal{H}_{\Sigma;P_i,R_i}$ risulta essere finitodimensionale. In termini di teoria conforme, esso corrisponde al caso in cui abbiamo dei campi primari, che trasformano secondo le rappresentazioni R_i, inseriti nei punti $P_i \in \Sigma$.

Nel resto di questa sezione mostrerò quali formule si ottengano se vediamo la 3-varietà M come l'incollamento di due 3-varietà M_1 e M_2 lungo la frontiera comune Σ. Se in M è presente un *link*, M_1 e M_2 conterranno delle linee di Wilson e la superficie di Riemann Σ avrà delle punture. Poiché la frontiera di M_1 ha orientazione opposta a quella di M_2, gli spazi di Hilbert fisici ad essa associati ($\mathcal{H}_{\Sigma,1}$ e $\mathcal{H}_{\Sigma,2}$) saranno l'uno il duale dell'altro. Gli integrali funzionali relativi a M_1 e a M_2 determinano due vettori $\psi_1 \in \mathcal{H}_{\Sigma,1}$ e $\psi_2 \in \mathcal{H}_{\Sigma,2}$ il cui prodotto scalare (ψ_2, ψ_1) dà la funzione di partizione di M. Poiché, come già ricordato, gli spazi di Hilbert fisici della teoria di Chern–Simons hanno dimensione finita è possibile ricavare delle relazioni lineari che legano le funzioni di partizione.

La somma connessa di varietà

Si consideri una varietà M ottenuta incollando lungo una sfera S^2 due varietà M_1 e M_2. M è detta *somma connessa* di M_1 e M_2 e si scrive

$$M = M_1 \# M_2. \tag{2.44}$$

Chiamiamo ψ_1 e ψ_2 i vettori di $\mathcal{H}_{S^2}$ determinati dall'integrale funzionale in M_1 e M_2; la funzione di partizione di M è quindi data da

$$Z(M) = (\psi_2, \psi_1).$$

Consideriamo ora una sfera S^3 e separiamola in due parti B_1 e B_2 incollate lungo una sfera S^2. Gli integrali funzionali in B_1 e B_2 daranno rispettivamente due vettori ϕ_1 e ϕ_2 appartenenti a $\mathcal{H}_{S^2}$. La funzione di partizione di S^3 sarà quindi

$$Z(S^3) = (\phi_2, \phi_1).$$

Poiché $M_{1,2} = M_{1,2} \# S^3$, possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} Z(M_1) &= (\phi_2, \psi_1), \\ Z(M_2) &= (\psi_2, \phi_1). \end{aligned}$$

Il punto fondamentale ora consiste nel notare che lo spazio di Hilbert fisico $\mathcal{H}_{S^2}$ è unidimensionale, e che quindi $\psi_2 \propto \phi_2$ e $\psi_1 \propto \phi_1$. Ciò implica che

$$Z(M) \cdot Z(S^3) = Z(M_1) \cdot Z(M_2). \tag{2.45}$$

La (2.45) è legata alla moltiplicatività della torsione di Ray–Singer per la somma connessa di due varietà.

Consideriamo ora un *link* costituito da s nodi $C_i, i = 1, \ldots, s$ separati. Se scriviamo $M = M_1 \# \cdots \# M_s$, dove ogni M_i contiene il solo nodo C_i ed applichiamo iterativamente l'argomento precedente[11] potremo dedurre che (cfr. con la (A.19))

$$\langle C_1 \ldots C_s \rangle = \prod_{k=1}^{s} \langle C_k \rangle \,, \tag{2.46}$$

dove ho usato la normalizzazione (2.38). Si noti che, come mostrato nell'App. A, la proprietà (2.46) vale per tutte le riduzioni del polinomio di HOMFLY (opportunamente normalizzato), tranne che per il polinomio di Alexander–Conway che richiede l'annullarsi del secondo membro. Questa è la prima indicazione del fatto che tale polinomio non può essere ottenuto direttamente dalla teoria di Chern–Simons.

[11] Si noti che il punto fondamentale sta sempre nel fatto che $\mathcal{H}_{S^2}$ è unidimensionale. Poiché i nodi C_i sono separati, le varietà M_i potranno essere incollate lungo sfere S^2 senza punture.

La somma connessa di link

In teoria dei nodi si introduce il concetto di somma connessa di *link*; dati due *link* L_1 e L_2

$$L = L_1 \# L_2,$$

è definito come segue:

1. si staccano un arco da L_1 ed un secondo arco da L_2, lasciando così quattro capi liberi (due per ogni *link*)

2. si collegano, rispettando le orientazioni delle linee, i capi liberi di L_1 a quelli di L_2, ottenendo così il nuovo *link* L.

Scriviamo ora M come $M_1 \# M_2$ in modo tale che la frontiera comune S^2 passi dove abbiamo incollato i capi liberi di L_1 a quelli di L_2. Seguendo un ragionamento analogo al precedente e sfruttando il fatto che lo spazio di Hilbert associato a S^2 con due punture che portano due rappresentazioni coniugate è unidimensionale, si dimostra la seguente relazione:

$$Z(M_1 \# M_2; L_1 \# L_2) \cdot Z(S^3; \bigcirc) = Z(M_1; L_1) \cdot Z(M_2; L_2). \tag{2.47}$$

Nel caso in cui $M = S^3$ si ha anche $M_1 = M_2 = S^3$. Usando la (2.38) si può riscrivere la (2.47) nella forma (cfr. con la (A.18))

$$\langle L_1 \# L_2 \rangle \cdot \langle \bigcirc \rangle = \langle L_1 \rangle \cdot \langle L_2 \rangle \,, \tag{2.48}$$

nota, in teoria dei nodi, anche come "formula del denominatore".

La relazione di matassa

Usando un ragionamento analogo al precedente è possibile dimostrare che il valore di aspettazione normalizzato (2.38) di un *link* soddisfa ad una relazione di matassa, qualora si scelga $G = SU(N)$ e tutte le linee siano nella rappresentazione fondamentale R_f. Come spiegato nell'App. A tale relazione lega gli invarianti associati ai *link* $L+$, L_- e L_0 che differiscono solo in una porzione come indicato in fig. 4. Si vede immediatamente che è possibile separare questa porzione usando una sfera S^2, che risulterà attraversata da quattro linee di Wilson. Le due punture associate a linee entranti porteranno le rappresentazioni R_f, mentre le due associate a linee uscenti porteranno le

rappresentazioni coniugate $\overline{R_f}$. Poiché lo spazio di Hilbert fisico $\mathcal{H}_{S^3,P_i,R_i}$ associato a questa superficie di Riemann con punture risulta bidimensionale, necessariamente ci sarà una relazione lineare fra le tre funzioni di partizione $Z(S^3, L_+)$, $Z(S^3, L_-)$ e $Z(S^3, L_0)$. Passando ai valori di aspettazione normalizzati (2.38) e dividendo opportunamente la relazione ottenuta per una costante irrilevante, si può scrivere la relazione di matassa nella forma consueta (cfr. (A.14)):

$$t \langle L_+ \rangle - t^{-1} \langle L_- \rangle = z \langle L_0 \rangle . \tag{2.49}$$

I risultati della teoria conforme per lo spazio di Hilbert fisico di cui sopra, permettono di ottenere esplicitamente i valori di t e z in termini della costante di accoppiamento k:

$$t = \exp(\pi i N/N + k), \tag{2.50}$$

$$z = 2i \sin(\pi/N + k). \tag{2.51}$$

Come si è già visto nel caso della funzione di partizione (2.28), la costante di accoppiamento k appare sostituita da $k + c_v$. Dalla relazione di matassa e dalla (2.46) è possibile ricavare il valore assunto dall'invariante nel caso del nodo snodato (con *framing canonico*)

$$\langle \bigcirc \rangle = \frac{t - t^{-1}}{z} = \frac{\sin(\pi N/N + k)}{\sin(\pi/N + k)}. \tag{2.52}$$

La (2.50) indica che il polinomio di Alexander–Conway può formalmente essere ottenuto nel limite $N \to 0$. Tuttavia, se scegliamo la normalizzazione di Witten (2.38), che coincide con quella naturale se si parte dai gruppi quantici e da cui segue la (2.46) e quindi la (2.52), tale limite implica $\langle \bigcirc \rangle = 0$. Questa è una prima indicazione che non è possibile recuperare in maniera banale il polinomio di Alexander–Conway.

Il cambio di framing dei link

Per completare l'interpretazione di $\langle W \rangle$ in termini di invarianti tipo Jones, dobbiamo considerare i cambiamenti di *framing* (nel significato datogli alla fine della Sez. 2.3). Separando come sopra la varietà M in due parti, si può vedere tale cambiamento come generato da un *twist* di Dehn effettuato sulla frontiera attorno ad una puntura. Se a tale puntura è associata una rappresentazione R, quest'operazione corrisponde a moltiplicare i vettori di $\mathcal{H}_{S^3,P_i,R_i}$

per una fase $\exp 2\pi i t h_R$, dove t indica di quante unità abbiamo cambiato il *framing*, mentre h_R è il peso conforme del campo primario nella rappresentazione R. Se come sopra si considera la rappresentazione fondamentale di $SU(N)$, si può mostrare che (si noti che anche qui $k \to k + c_v$)

$$h_{R_f} = \frac{N^2 - 1}{2N(N+k)} = \frac{c_2(R_f)}{k + c_v},$$

dove $c_2(R)$ è il Casimir quadratico della rappresentazione R definito da

$$R^a \cdot R^a = c_2(R)\ \mathbf{1} \tag{2.53}$$

Questo implica che per un cambiamento di *framing* di t unità si ha la formula

$$\langle W \rangle \to \exp\left(2\pi i t \frac{c_2(R_f)}{k + c_v}\right) \cdot \langle W \rangle\,, \tag{2.54}$$

che generalizza la (2.41).

Formule di chirurgia

Finora abbiamo considerato solo il caso in cui $M = S^3$. In matematica è noto come sia possibile passare da una 3-varietà M ad un'altra $\widetilde{M}$ tramite l'operazione di *"chirurgia"*. Essa è descritta nei seguenti punti:

1. si scelga una linea chiusa $C \in M$
2. si consideri un "intorno tubolare" M_R di C (cioè un toro solido centrato attorno a C)
3. si chiami M_L la parte rimanente di M (incollando M_L e M_R si riottiene M)
4. si compia un diffeomorfismo sulla frontiera di M_R, e si chiami $\widetilde{M_R}$ la varietà ottenuta
5. si incollino $\widetilde{M_R}$ e M_L a formare la nuova 3-varietà $\widetilde{M}$.

Poiché ogni 3-varietà M può essere ottenuta da S^3 tramite chirurgie ripetute, per ottenere la funzione di partizione di M non resta che tradurre l'operazione

di chirurgia nel formalismo della teoria di campo di Chern–Simons. Sappiamo che è possibile scrivere $Z(M) = (\psi_L, \psi_R)$, dove $\psi_{L,R}$ sono il risultato dell'integrazione funzionale in $M_{L,R}$. Un diffeomorfismo sulla frontiera di M_R semplicemente trasforma ψ_R in un altro vettore $K\psi_R$, dove K è un operatore (una matrice finita!) che agisce nello spazio di Hilbert fisico associato a tale frontiera.

Usando i risultati della teoria conforme, Ref. [72], nella Ref. [75] si mostra che la base dello spazio di Hilbert fisico associato alla frontiera dell'intorno tubolare M_R è generata dai vettori ψ_i ($i = 0, \ldots, (t-1)$ e t finito) che si ottengono dall'integrale funzionale in M_R se si associa alla curva chiusa C una *Wilson loop* lungo C nella rappresentazione R_i (dove con R_0 s'intende la rappresentazione banale). In termini di funzioni di partizione questo implica che si può scrivere[12]

$$Z(\widetilde{M}) = \sum_{j=0}^{t-1} {K_0}^j \; Z(M; R_j). \tag{2.55}$$

Usando questa formula è possibile derivare la funzione di partizione di S^3, che può essere ottenuta per chirurgia da $S^2 \times S^1$ (si noti che in questo semplice caso $Z(S^2 \times S^1; R_i) = \delta_{i0}$). Per $G = SU(2)$, si trova

$$Z(S^3) = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \frac{\pi}{k+2}. \tag{2.56}$$

Il cambio di framing della varietà

Per completare la discussione sulla funzione di partizione, ci resta ora da vedere come essa trasformi sotto un cambiamento di *framing* (nel significato datogli alla fine della Sez. 2.2). In termini di chirurgia, tale operazione corrisponde ad effettuare sul toro frontiera di M_R la *trasformazione modulare* $T{:}\,\tau \to \tau + 1$ (dove τ è il parametro modulare del toro). Studiando, come

[12] Nel caso in cui la 3-varietà M contiene già prima della chirurgia una *Wilson loop* nella rappresentazione R_i, la (2.55) si generalizza come segue:

$$Z(\widetilde{M}; R_i) = \sum_{j=0}^{t-1} {K_i}^j \; Z(M; R_j).$$

nella Ref. [72], a quale operatore nello spazio di Hilbert associato corrisponda questa trasformazione, è possibile ottenere la (2.29) nel caso in cui si tenga k finito. Ossia, sotto un cambiamento di *framing* di s unità, si mostra che la funzione di partizione trasforma secondo la legge:

$$Z \to Z \exp(2\pi i s c/24), \tag{2.57}$$

dove c è la carica centrale dell'algebra (bidimensionale) di correnti con gruppo di simmetria G e livello k. Nel limite $k \to \infty$, c è esattamente la dimensione d del gruppo G.

2.5 Il gauge di cono di luce

Discuterò in questa sezione il calcolo dei valori di aspettazione (2.37), con $M = \mathbf{R}^3$, seguendo l'approccio della Ref. [37]. In tale approccio, come nella quantizzazione canonica, si comincia scegliendo una direzione di "trasferimento" (che sarà indicata con l'indice 0). Con ciò s'intende che le linee di Wilson devono essere viste come un insieme di punti che si muovono nel piano trasverso (che ha coordinate x_1 e x_2). In termini di teoria di campo è opportuno distinguere tra la direzione di trasferimento 0 la direzione temporale 2 rispetto alla quale si effettuerà la rotazione di Wick. Rispetto alla coordinata temporale definiamo le coordinate di *cono di luce* nel piano trasverso:

$$x^{\pm} = x^1 \pm x^2. \tag{2.58}$$

In termini di queste coordinate introduciamo anche

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_1 \pm \partial_2), \tag{2.59}$$

$$A_{\pm} = A_1 \pm A_2. \tag{2.60}$$

Si noti che per le componenti $A_{\pm}$ della connessione la (2.3) diventa

$$A_{\pm}(x) \to g(x) A_{\pm}(x) g^{-1}(x) + 2 g(x) \partial_{\pm} g^{-1}(x). \tag{2.61}$$

In termini di queste coordinate è possibile fissare il cosiddetto "*gauge* di cono di luce"

$$A^a_-(x) = 0, \quad \text{per } a = 1, \ldots, \dim G, \tag{2.62}$$

che tuttavia non è un *gauge-fixing* completo, poiché resta la libertà di effettuare trasformazioni che dipendono solo da x^0 e x^+. In termini di integrale funzionale la condizione (2.62) è ottenuta aggiungendo all'azione classica (2.1) i termini di *gauge-fixing* e di Faddeev–Popov

$$S_{\rm gf} = \int d^3x \, \sqrt{\gamma(x)} \, {\rm Tr}\phi(x)A_-(x), \tag{2.63}$$

$$S_{\rm FP} = \int d^3x \, \sqrt{\gamma(x)} \, {\rm Tr}\bar{c}(x)D_-c(x), \tag{2.64}$$

dove $\gamma(x)$ è la metrica che è necessario introdurre su M, D_- è la componente $-$ della derivata covariante, $\phi(x)$, $c(x)$ e $\bar{c}(x)$ sono campi a valori nell'algebra di Lie di G.

Se ora integriamo rispetto al campo ausiliario ϕ, otteniamo nell'integrale funzionale una $\delta[A_-]$, che semplicemente richiede di imporre la condizione (2.62) nella parte rimanente dell'azione. Ponendo $A_- = 0$ nel termine di Faddeev–Popov, si vede immediatamente che esso non ha più nessuna dipendenza dalla connessione e che quindi la dinamica dei *ghost* disaccoppia. Ci resta dunque solo la parte classica dell'azione che, dopo aver imposto la (2.62), risulta quadratica:

$$S_{\rm CS} = \frac{k}{4\pi} \int_M {\rm Tr}(A_+\partial_-A_0 - A_0\partial_-A_+). \tag{2.65}$$

Siccome la teoria a questo punto è gaussiana, il calcolo dei valori di aspettazione procede applicando il teorema di Wick e sostituendo alle contrazioni i propagatori che si ottengono invertendo l'operatore che compare nella forma quadratica della (2.65). L'unico propagatore non nullo risulta essere:

$$\left\langle A_+^a(x)A_0^b(y)\right\rangle = 4\pi i\lambda\delta^{ab}\delta(x^0-y^0)\delta(x^+-y^+){\rm sgn}(x^- - y^-), \tag{2.66}$$

dove ${\rm sgn}(x)$ è la funzione segno e λ è una costante che per la (2.65) *dovrebbe* essere uguale a $-1/k$. Il propagatore (2.66) contiene tuttavia troppe singolarità che in questo contesto non si sanno risolvere (a differenza di quanto avverrà per la teoria BF). È quindi conveniente effettuare una rotazione di Wick ($x^2 \to ix^2$). Ovvero conviene complessificare il piano trasverso introducendo la coordinata

$$z = x^1 + ix^2, \tag{2.67}$$

e conseguentemente

$$\partial = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \tag{2.68}$$

$$\alpha(t,z) = A_1(x) - iA_2(x), \tag{2.69}$$

dove, per comodità di notazione, si introduce $t = x^0$. Nel *gauge* di cono di luce (2.62), che ora si scrive

$$\bar{\alpha} = 0, \tag{2.70}$$

l'unico propagatore non banale risulta essere:

$$\left\langle \alpha^a(t,z) A_0^b(s,w) \right\rangle = 4\lambda\delta^{ab}\delta(t-s)\frac{1}{z-w}, \tag{2.71}$$

dove, come nel caso reale, λ è una costante che *dovrebbe* essere uguale a $-1/k$. Se si vogliono confrontare i risultati di questa sezione con quelli ottenuti nella Ref. [75] (ed esposti nella sezione precedente), bisogna credere[13] che un effetto di rinormalizzazione della costante di accoppiamento implichi

$$\lambda = -\frac{1}{k + c_v}. \tag{2.72}$$

Una proprietà fondamentale della (2.71) sta nel fatto che essa correla soltanto campi valutati sulla medesima superficie trasversa[14] (stesso t).

[13] La questione della ridefinizione della costante di accoppiamento è molto controversa. Troveremo lo stesso problema nella seguente sezione, dove si usa il *gauge* covariante. In generale negli sviluppi perturbativi si ha $\lambda = -1/k$, anziché la (2.72). Lo *shift* $k \to k + c_v$ potrebbe essere dovuto ad un effetto di rinormalizzazione basato su di una regolarizzazione *ad hoc*. Poiché tuttavia gli sviluppi perturbativi della teoria di Chern–Simons coincidono con quelli della teoria BF con termine cosmologico (come sarà mostrato nel Cap. 4), dove non si rende necessaria alcuna ridefinizione della costante di accoppiamento, è opinione dell'autore — in ciò confortato dalla Ref. [52] — che lo *shift* della costante di accoppiamento nella teoria di Chern–Simons sia un puro effetto non perturbativo. Si noti a questo proposito che la teoria di Chern–Simons con *gauge* di tipo assiale è gaussiana e che quindi nessuna rinormalizzazione per k è richiesta.

[14] Si noti che i due approcci (reale e complesso) sono radicalmente diversi. Nel caso reale il propagatore è invariante per rotazioni rispetto a x^0 e x^+. La teoria può essere inoltre estesa al caso in cui $M = \Sigma \times \mathbf{R}_-$. Il nodo quindi evolve secondo la coordinata $x^0 \in \Sigma$, e viene "proiettato" sul piano Σ. Nel caso complesso invece il propagatore è meromorfo e quindi non c'e' alcuna invarianza per rotazioni. L'estensione poi può essere fatta solo nel caso in cui $M = \Sigma \times \mathbf{R}_0$. L'evoluzione quindi, come nel caso della quantizzazione canonica, è rappresentata da un insieme di punti che si muovono sulla superficie di Riemann Σ.

2.5.1 L'equazione di Knizhnik–Zamolodchikov

Vediamo ora come introdurre in questo formalismo le osservabili (2.30). Ci si rende subito conto che, come nella quantizzazione canonica, le linee di Wilson devono ora essere viste come dei punti $z(t)$ che si muovono sulla superficie trasversa al variare di t. A ciascuno di questi punti dobbiamo associare il trasporto parallelo lungo la curva C a partire dal punto iniziale:

$$u(t) := \mathcal{P} \exp \int_{C(t,z(t))} A. \tag{2.73}$$

Nel *gauge* di cono di luce si vede immediatamente che

$$du(t) = u(t) \cdot \left(\frac{1}{2} dL(t) + dM(t) \right), \tag{2.74}$$

dove

$$L(t) = \int_0^t ds\ \alpha(s, z(s))\, z'(s), \tag{2.75}$$

$$M(t) = \int_0^t ds\ A_0(s, z(s)), \tag{2.76}$$

e z' indica la derivata prima di z.

Se al tempo t abbiamo m punti $z_1(t), \ldots, z_m(t)$, dovremo associare a ciascuno di essi un trasporto parallelo $u_i(t)$. Tuttavia, come si è visto nella Sez. 2.3, le osservabili della teoria di Chern–Simons sono le *Wilson loop* definite in (2.30). Ciascuna di esse sarà vista, nel piano trasverso, come una coppia di linee di Wilson che portano l'una (quella che sale) la rappresentazione R del gruppo G e l'altra (quella che scende) la rappresentazione coniugata $\bar{R}$. Ci interessa quindi la situazione in cui sul piano trasverso sono presenti $m = 2n$ punti: ai primi n assoceremo un trasporto parallelo $u_i(t)$, mentre ai secondi n sarà associato l'operatore $\bar{u}_i(t)$, definito come il trasporto parallelo nella rappresentazione coniugata.

Per evitare le divergenze dovute al polo nel propagatore (2.71), è necessario supporre che il correlatore di un incremento $dL_i(t)$ (o $dM_i(t)$) con un trasporto parallelo $u_j(t)$ (o $\bar{u}_j(t)$) sia uguale a zero. In virtù della (2.71), ciò è ottenuto se si suppone che un trasporto parallello $u(t)$ "termini un attimo prima dell'istante t". Diversi da zero saranno quindi solo i termini

$$\left\langle dL_i^a(t)\, dM_j^b(t) \right\rangle = 4\lambda \delta^{ab} \frac{z_i'(t)}{z_i(t) - z_j(t)}, \tag{2.77}$$

e l'operatore (da $(\mathbf{C}^N)^{2n}$ in sé)

$$\psi_n(t) = \langle u_1(t) \otimes \ldots \otimes u_n(t) \otimes \bar{u}_{n+1}(t) \otimes \ldots \otimes \bar{u}_{2n}(t) \rangle \,. \tag{2.78}$$

Usando la (2.77) è possibile mostrare che vale la seguente equazione differenziale per ψ_n:

$$d\psi_n(t) = \psi_n(t)\ \lambda \sum_{1 \le i < j \le 2n} \frac{z_i' - z_j'}{z_i - z_j}\, S_{ij}\, dt, \tag{2.79}$$

dove gli operatori S_{ij} sono definiti come

$$S_{ij} = \begin{cases} \sum_{a=1}^{r} I \otimes \ldots \otimes T_a \otimes \ldots \otimes T_a \otimes \ldots \otimes I, & 1 \le i < j \le n \\ \sum_{a=1}^{r} I \otimes \ldots \otimes T_a \otimes \ldots \otimes \bar{T}_a \otimes \ldots \otimes I, & 1 \le i \le n,\ n+1 \le j \le 2n \\ \sum_{a=1}^{r} I \otimes \ldots \otimes \bar{T}_a \otimes \ldots \otimes \bar{T}_a \otimes \ldots \otimes I, & n+1 \le i < j \le 2n \end{cases} \tag{2.80}$$

ed i generatori T_a (e/o $\bar{T}_a$) sono inseriti nella i-esima e j-esima posizione. La (2.79) è stata studiata in connessione con problemi legati al gruppo delle trecce [66][49], alla statistica di campi quantistici [35] ed alla teoria di campo conforme in due dimensioni [48].

È possibile riscrivere la (2.79) in una forma geometricamente più chiara. Sia M_{2n} il sottoinsieme di $\mathbf{C}^{2n}$ contente i punti le cui coordinate $(z_1, \ldots, z_{2n})$ sono tutte distinte. In M_{2n} è possibile introdurre la connessione di Knizhnik e Zamolodchikov (KZ)

$$\omega = \lambda \sum_{1 \le i < j \le 2n} S_{ij}\ d\log(z_i - z_j). \tag{2.81}$$

Tale connessione risulta essere piatta

$$d_\omega \omega = d\omega + \omega \wedge \omega = 0, \tag{2.82}$$

in virtù delle *relazioni di treccia*

$$[S_{ij}, S_{kl}] = 0, \quad [S_{ij}, S_{jk} + S_{ki}] = 0, \quad (i, j, k, l \text{ distinti}) \tag{2.83}$$

cui soddisfano gli operatori S. In termini della connessione KZ la (2.79) si riscrive come

$$d_\omega \psi_n = 0. \tag{2.84}$$

L'olonomia della connessione ω dà una rappresentazione lineare del gruppo fondamentale di M_{2n}, che è il gruppo delle trecce associato a $2n$ corde. È

noto [66][67] che è possibile ottenere invarianti di *link* da questa rappresentazione se si definisce opportunamente una traccia su $(\mathbf{C}^N)^{2n}$. Se si sceglie $G = SU(N)$ nella rappresentazione fondamentale, si ottengono i polinomi di Jones generalizzati [45]. Questa operazione di traccia corrisponde ad identificare coppie di punti, associati a rappresentazioni coniugate, all'istante iniziale e a quello finale. Quest'operazione evidentemente introduce delle singolarità nell'equazione (2.79) a causa dell'annullarsi del denominatore. Queste singolarità sono legate alla necessità del *framing*, come si è già visto nella teoria non perturbativa. Nella Ref. [37] si risove il problema rimuovendo i punti critici deformandoli in due semirette parallele come in fig. 14e considerando il rapporto

$$\langle \widetilde{C} \rangle_G := \frac{\langle W(C) \rangle_G}{\langle W(C) \rangle_{U(1)}}, \tag{2.85}$$

dove la carica associata al gruppo $U(1)$ al denominatore dev'essere scelta in maniera opportuna.[15] Si dimostra quindi che l'equazione differenziale che generalizza la (2.79) al caso in cui si scelga la (2.85) come funzione del nodo è priva di singolarità. Questo permette di dimostrare che la (2.85) è ben definita. Dimostrare che essa definisce un invariante richiede un ulteriore sforzo (si veda ancora la Ref. [37]). Si noti che non è possibile basarsi sui risultati della teoria non perturbativa poiché l'introduzione di regolarizzazioni e la scelta di un *gauge* singolare possono rompere l'invarianza per diffeomorfismi della teoria originale.

2.5.2 Lo sviluppo perturbativo

Accennerò qui brevemente al calcolo della (2.38) nel *gauge* di cono di luce complesso tramite lo sviluppo perturbativo.[16] L'idea base consiste nell'esprimere

$$\langle W_R(C) \rangle = \dim R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} V_n(C, R), \tag{2.86}$$

dove $\dim R = \mathrm{Tr}_R \mathbf{1}$ è la dimensione della rappresentazione R che compare in ogni termine dello sviluppo. Se il primo membro rappresenta, come si deduce

[15] Il suo quadrato dev'essere uguale al Casimir di G nella rappresentazione R.

[16] L'idea di considerare lo sviluppo perturbativo in questo *gauge* è dovuta a J. Fröhlich. Essa non è mai stata portata avanti a causa dei problemi di regolarizzazione cui accennerò più avanti, e che sono automaticamente risolti nell'ambito della teoria BF, v. Cap. 4.

dalla (2.49), un polinomio di Jones generalizzato, allora ogni singolo termine V_n è un invariante di Vassiliev [71] di tipo finito del nodo C, come mostrato nella Ref. [15]. Usando la (2.35) possiamo riscrivere il primo membro come

$$\langle W_R(C) \rangle = \left\langle \mathrm{Tr}_R \sum_{n=0}^{\infty} h_n(A, C) \right\rangle , \tag{2.87}$$

e quindi, grazie al teorema di Wick ed alla (2.71), giungere all'identificazione

$$V_n(C, R) = \frac{1}{\dim R} \langle \mathrm{Tr}_R h_{2n}(A, C) \rangle . \tag{2.88}$$

Le divergenze dovute all'annullarsi del denominatore nella (2.71) richiedono una regolarizzazione della (2.88). La discussione precedente mostra che una buona scelta si basa sulle seguenti prescrizioni:

1. bisogna rimpiazzare negli estremi superiori degli integrali nella (2.33) x_i con $x_i - \epsilon \ \forall i$, dove $\epsilon > 0$ è una costante; ciò equivale alla richiesta, discussa a pag. 34, che il trasporto parallelo $u(t)$ termini un attimo ϵ prima dell'istante t

2. bisogna rimuovere i punti critici, per esempio deformandoli in due semirette parallele a distanza ϵ come nella fig. 14; quindi si considera il rapporto (2.85), dove anche al denominatore si sceglie la stessa regolarizzazione.

È possibile dimostrare che la (2.88) così regolarizzata si mantiene finita nel limite $\epsilon \to 0$. Tuttavia questa procedura di regolarizzazione rompe la covarianza della teoria e nulla ci assicura che i V_n così ottenuti siano effettivamente degli invarianti. La dimostrazione che essi lo sono è contenuta nelle Reff. [50] e [11], dove tuttavia le espressioni degli invarianti di Vassiliev V_n in termini di integrali di connessioni KZ, v. la (2.81), non sono introdotte a partire dalla teoria di campo di Chern–Simons.

Vedremo nel capitolo 4 come, nell'ambito della teoria BF, la regolarizzazione venga introdotta in una maniera più naturale, il che permetterà da una parte di tener conto dei cambiamenti di *framing*, v. (2.54), e dall'altra di studiare anche lo sviluppo perturbativo nel caso di *gauge* di cono di luce reale, v. (2.62).

2.6 Il gauge covariante

In questa sezione discuterò, facendo particolare riferimento alle Reff. [41] e [10], il calcolo dei valori di aspettazione (2.37), con $M = \mathbf{R}^3$, nel *gauge* covariante[17]

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \tag{2.89}$$

dove per *alzare, abbassare e contrarre gli indici* si deve far uso di una metrica γ (esplicitamente la (2.89) si scrive $\gamma^{\mu\nu}(x)\partial_\mu A_\nu(x) = 0$). La condizione (2.89) introduce nell'integrale funzionale i termini

$$S_{\rm gf}[A,\phi] := \frac{k}{4\pi}\int d^3x\ \sqrt{\gamma(x)}\ \gamma^{\mu\nu}(x)\ {\rm Tr}\,[\phi(x)\partial_\mu A_\nu(x)], \tag{2.90}$$

$$S_{\rm FP}[A,c,\bar c] := \frac{k}{4\pi}\int d^3x\ \sqrt{\gamma(x)}\ \gamma^{\mu\nu}(x)\ {\rm Tr}\,[\bar c(x)\partial_\mu(D_\nu c)(x)]. \tag{2.91}$$

Si tratta di una scelta particolarmente interessante che non rompe la covarianza della teoria; ciò significa che in questo approccio è davvero possibile considerare i nodi direttamente in tre dimensioni, senza dover ricorrere ad una rappresentazione bidimensionale come nelle sezioni precedenti. Il prezzo da pagare è che con questo *gauge* non si rimuovono le nonlinearità dall'azione ed i *ghost* giuocano un ruolo non banale. Ne segue che l'unica via praticabile è quella dello sviluppo perturbativo, che produce invarianti dei nodi in termini di integrali di linea su copie del nodo stesso. Si incontrano tuttavia gli stessi problemi a cui si è accennato a pag. 23 ed è quindi necessario introdurre un *framing* che rende un po' più complicato lo studio dello sviluppo perturbativo.

2.6.1 Le regole di Feynman

La scelta (2.89) lascia dei termini cubici nell'azione. Per effettuare lo sviluppo perturbativo bisogna separare l'azione in una parte quadratica S_0 ed in una

[17] Se si lavora su una varietà $M \neq \mathbf{R}^3$, vi saranno in generale più soluzioni di minimo. Se le indichiamo con α, la condizione (2.89) si scrive, in ogni settore, come

$$D^\mu(A^{(\alpha)})A_\mu = 0,$$

dove $D(A^{(\alpha)})$ indica la derivata covariante rispetto alla connessione di *background* $A^{(\alpha)}$.

parte d'interazione S_1. Per tener conto dell'ordine perturbativo è tuttavia conveniente prima di tutto riscalare la connessione

$$A \to \frac{A}{\sqrt{k}}. \tag{2.92}$$

e scrivere quindi

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{Tr} A \wedge dA + \frac{\sqrt{k}}{4\pi}\int d^3x\ \sqrt{\gamma}\mathrm{Tr}\phi\partial_\mu A^\mu + \\ &\quad + \frac{k}{4\pi}\int d^3x\ \sqrt{\gamma}\mathrm{Tr}\bar{c}\partial_\mu\partial^\mu c, \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$S_1 = \frac{1}{4\pi\sqrt{k}}\int \frac{2}{3}\mathrm{Tr} A\wedge A\wedge A + \frac{\sqrt{k}}{4\pi}\int d^3x\ \sqrt{\gamma}\mathrm{Tr}\bar{c}\partial_\mu[A^\mu, c], \tag{2.94}$$

$$\mathrm{Hol} = \mathcal{P}\exp\oint_C \frac{A}{\sqrt{k}}. \tag{2.95}$$

Lo sviluppo perturbativo è ottenuto sviluppando la (2.94) e la (2.95) in serie di potenze ed effettuando quindi l'integrazione gaussiana relativa alla (2.93). Ciò equivale ad applicare il teorema di Wick effettuando le contrazioni AA, $A\phi$ e $c\bar{c}$. Si può tuttavia mostrare che, come effetto della struttura supersimmetria dell'azione completa S_{TOT} [33], c'è una corrispondenza esatta tra i diagrammi di Feynman contenenti *loop* bosonici (relativi al campo A) e *loop* fermionici (relativi ai campi c e $\bar{c}$), che quindi si sottraggono a vicenda. Poiché tuttavia questi diagrammi sono divergenti, la sottrazione non li cancella esattamente, ma dà un contributo finito che dipende dalla regolarizzazione scelta. Nelle Reff. [59][5] e [54] si mostra che a un *loop* è possibile trovare una regolarizzazione *ad hoc* che rende conto dello *shift* $k \to k_r = k + c_v$ (nella Ref. [38] si estende questo risultato a due *loop*). Vi è tuttavia la possibilità, scegliendo altre regolarizzazioni, di ottenere una differente rinormalizzazione della costante di accoppiamento (p.es. nella Ref. [39] usando solo controtermini locali e BRST invarianti si ottiene, a un *loop*, $k_r = k + rc_v$, dove $r \in \mathbf{R}$ è un parametro libero che dipende dalla regolarizzazione). Se invece si chiede, come sembra più naturale, che la regolarizzazione non rompa la struttura supersimmetrica, allora la cancellazione dev'essere esatta e quindi k_r dev'essere uguale a k a tutti gli ordini perturbativi. Lo *shift* deve quindi essere, come suggerisce la Ref. [52], un puro effetto non perturbativo. Si noti infatti che esso deriva dalla relazione con il modello di Wess–Zumino–Witten e con le

algebre di correnti di livello k. Il fatto che k sia quantizzato ($k \in \mathbf{Z}$), come richiede la teoria conforme, appare nella teoria di Chern–Simons solo a livello non perturbativo, dove agiscono anche le trasformazioni di *gauge* non connesse all'identità rispetto alle quali l'azione (2.1) non è invariante. È quindi naturale che lo *shift*, che pure appare come conseguenza della relazione con le teorie conformi, sia invisibile a livello perturbativo.

A meno di questo possibile effetto di rinormalizzazione della costante di accoppiamento, si può in ogni caso mostrare che l'effetto dei *ghost* consiste nel cancellare tutte le contrazioni interne ai vertici provenienti dallo sviluppo della (2.94), lasciando quindi i soli diagrammi ad albero. Possiamo quindi affermare che per lo sviluppo perturbativo della (2.37), ci si può limitare ad espandere la (2.95) e quindi utilizzare una sorta di teorema di Wick generalizzato[18] in cui accanto a contrazioni AA sono ammesse anche contrazioni AAA. Usando la (2.93) e la (2.94) si ricava esplicitamente che

$$\left\langle A^a_\mu(x) A^b_\nu(y) \right\rangle_0 = -4\pi i \delta^{ab} l_{\mu\nu}(x-y), \tag{2.96}$$

$$\left\langle A^a_\mu(x) A^b_\nu(y) A^c_\rho(z) \right\rangle_0 = -\frac{(4\pi)^2}{\sqrt{k}} f^{abc} v_{\mu\nu\rho}(x,y,z), \tag{2.97}$$

dove

$$l_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{x^\rho}{|x|^3}, \tag{2.98}$$

$$v_{\mu\nu\rho}(x,y,z) = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \int d^3w \; l_{\mu\alpha}(x-w) l_{\nu\beta}(y-w) l_{\rho\gamma}(z-w). \tag{2.99}$$

È immediato verificare che i nuclei integrali l e v hanno le seguenti simmetrie

$$l_{\mu\nu}(x) = -l_{\nu\mu}(x) = -l_{\mu\nu}(-x), \tag{2.100}$$

$$v_{\mu\nu\rho}(x,y,z) = v_{\nu\rho\mu}(y,z,x) = v_{\rho\mu\nu}(z,x,y), \tag{2.101}$$

$$v_{\mu\nu\rho}(x,y,z) = -v_{\rho\nu\mu}(z,y,x), \tag{2.102}$$

che risultano utili nel calcolo esplicito degli integrali di Feynman. Si noti inoltre che è possibile pensare a l come ad una $(1,1)$-forma in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ e a $v = \int_{\mathbf{R}^3} l \wedge l \wedge l$ come ad una $(1,1,1)$-forma in $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$.

[18] Ciò non deve sorprendere in quanto la teoria è sostanzialmente una teoria gaussiana, come risulta evidente nei *gauge* assiali. Da un altro punto di vista si può dire che, come effetto della supersimmetria, l'azione effettiva coincide con l'azione classica.

2.6.2 Lo sviluppo perturbativo

Sviluppando la (2.95) in potenze di $1/\sqrt{k}$ ed usando le regole (2.96) e (2.97), si ottiene uno sviluppo di (2.38) diverso da quello corrispondente alle (2.86) e (2.88). Si noti tuttavia che in realtà le potenze dispari di $1/\sqrt{k}$ non contribuiscono poiché ad esse sono associati termini con un numero dispari di campi A; tali termini, in una teoria gaussiana, hanno valore di aspettazione nullo. Per le potenze pari in $1/\sqrt{k}$ tuttavia non vale più una relazione semplice come la (2.88); infatti a causa della (2.97) al calcolo di V_n non contribuirà solo h_{2n} ma anche i termini h_i, $i \leq n$, con un numero opportuno di contrazioni AAA. All'ordine 0, dove si ha $h_0 = \mathbf{1}$, si avrà semplicemente

$$V_0(C, R) = 1,$$

mentre al prim'ordine, dove $h_2 = \mathcal{P} \int AA/k$, si ha, usando la (2.96)

$$V_1(C, R) = -\frac{4\pi i}{k} c_2(R) \oint dx^\mu \int^x dy^\nu l_{\mu\nu}(y - x);$$

se ora usiamo la (2.100) e ci ricordiamo della definizione (2.40) possiamo scrivere

$$V_1(C, R) = -\frac{2\pi i}{k} c_2(R) \Phi(C, C). \tag{2.103}$$

Come già discusso a pag. 23 per definire il secondo membro della (2.103) è necessario introdurre un *framing* per il nodo C. Si può mostrare, v. Ref. [3], che ad ogni ordine perturbativo è possibile isolare i diagrammi che hanno bisogno di un *framing* e che in essi fattorizza sempre un termine che contiene il numero di autoconcatenzioni Φ; quindi risommando tutti questi diagrammi si può mostrare che

$$\langle W_R(C) \rangle = \exp\left(-\frac{2\pi i}{k} c_2(R) \Phi(C, C) \right) \cdot \left\langle \widetilde{W_R}(C) \right\rangle, \tag{2.104}$$

dove l'ultimo termine è indipendente dal *framing*. Ciò è in accordo con la formula (2.54), ottenuta nella Ref. [75], e ci permette di fissare una volta per tutte il numero di autoconcatenazioni: la scelta più comoda consiste nel porre $\Phi(C, C) = 0$ (*framing canonico*).

Al second'ordine dovremo tener conto di due termini, uno proveniente da h_3 con una contrazione AAA ed uno proveniente da h_4 con due contrazioni

AA. Trascurando, come osservato sopra, i contributi in Φ, otteniamo:

$$V_2(C,R) = \frac{4\pi^2}{k^2} c_2(R) c_v \rho(C), \tag{2.105}$$

dove

$$\begin{aligned}\rho(C) = -2\ [&\oint dx_3^{\mu_3} \int^{x_3} dx_2^{\mu_2} \int^{x_2} dx_1^{\mu_1}\ v_{\mu_3\mu_2\mu_1}(x_3,x_2,x_1) + \\ &+ \oint dx_4^{\mu_4} \int^{x_4} dx_3^{\mu_3} \int^{x_3} dx_2^{\mu_2} \int^{x_2} dx_1^{\mu_1}\ l_{\mu_1\mu_3}(x_1-x_3) l_{\mu_2\mu_4}(x_2-x_4)].\end{aligned} \tag{2.106}$$

Questo integrale fu ottenuto per la prima volta nella Ref. [41], dove si mostrò anche la finitezza e l'indipendenza dal *framing* di ciascun contributo. Calcoli numerici su alcuni nodi semplici mostrarono che

$$a_2(C) = \frac{1}{2}[\rho(C) - \rho(\bigcirc)], \tag{2.107}$$

coincide con l'invariante di Arf (che è anche il secondo coefficiente nello sviluppo del polinomio di Alexander–Conway[19], da cui la notazione a_2). Un conto analitico permise inoltre di mostrare che

$$\rho(\bigcirc) = -\frac{1}{12}. \tag{2.108}$$

La dimostrazione completa che la (2.106) fornisce un invariante topologico è contenuta nella Ref. [10].

La struttura generale agli ordini più elevati discussa nelle Reff. [42] e [4], è la seguente:

$$V_n(C,R) = \dim R \sum_{i=1}^{d_n} \alpha_{ni}(C) r_{ni}(R), \tag{2.109}$$

dove r contiene tutti i fattori guppali mentre α dipende solo dal nodo. Come accennato a pag. 28, il polinomio di Alexander–Conway può essere ottenuto nel limite (formale) $N \to 0$ della teoria di Chern–Simons. A livello di

[19] Sottrarre $\rho(\bigcirc)$ in (2.107) equivale a ridefinire la (2.38) normalizzando rispetto al nodo snodato

$$\langle C\rangle' := \frac{\langle C\rangle}{\langle\bigcirc\rangle}.$$

Con questa normalizzazione si ha ovviamente $\langle\bigcirc\rangle' = 1$ anziché la (2.52). Questa è la normalizzazione classica del polinomio di Alexander–Conway e questo spiega la (2.107). Si noti che a quest'ordine nello sviluppo in $1/k$ tutti gli invarianti polinomiali coincidono.

sviluppo perturbativo questo limite acquista un significato ben definito. Nella Ref. [42] si nota che in questo limite sopravvivono solo i termini d'ordine $2n$ con fattore gruppale dato da $(c_2(R)c_v)^n$.

2.7 L'approccio variazionale

Discuterò in questa sezione un approccio che permette di verificare l'invarianza per diffeomorfismi dei valori di aspettazione (2.38) e di derivare la relazione di matassa (2.49) (valida solo per la rappresentazione fondamentale di G), senza ricorrere alla teoria conforme come nella Sez. 2.4. Quest'approccio, proposto nella Ref. [30] e reso più rigoroso nella Ref. [19], si basa essenzialmente sulla possibilità di effettuare integrazioni per parti nell'integrale funzionale, e quindi non può essere usato nel caso di *gauge* singolari come quelli assiali. La relazione di matassa discende invece dall'identità di Fierz (2.121), e quindi vale solo per le rappresentazioni fondamentali di $SU(N)$.

Si consideri una deformazione infinitesima $\delta C^\mu(x)$ del nodo C. La variazione dell'olonomia è di conseguenza

$$\frac{\delta}{\delta C^\mu(x)}\mathrm{Hol} = -\dot{C}^\nu(x)\ H^x F_{\mu\nu}(x) H_x, \tag{2.110}$$

dove $\dot{C}(x)$ è il vettore tangente al nodo deformato nel punto x, mentre

$$H^x := \mathcal{P}\exp\int_{T^x_{x_0}C} A, \tag{2.111}$$

$$H_x := \mathcal{P}\exp\int_{T^{x_0}_{x}C} A, \tag{2.112}$$

sono elementi del gruppo G che rappresentano il *trasporto parallelo* rispettivamente fino al punto x e a partire dal punto x (con $T^x_{x_0}C$ e $T^{x_0}_x C$ si intendono le porzioni del nodo C comprese tra gli estremi x_0 e x.) Come si vede la (2.110) associa ad una deformazione del nodo un termine di curvatura F relativo alla superficie determinata dai vettori δC e $\dot{C}$.

Il secondo punto di questo approccio consiste nel notare che la curvatura F può essere rappresentata in termini di derivata funzionale dell'azione

$$\frac{\delta S_{\mathrm{CS}}}{\delta A^a_\mu(x)} = \frac{k}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}F^a_{\nu\rho}(x),$$

ovvero

$$F^a_{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{k}\epsilon_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S_{\rm CS}}{\delta A^a_\rho(x)}. \tag{2.113}$$

Grazie a questa relazione possiamo esprimere il valore di aspettazione di un'osservabile contenente la curvatura in termini di derivata funzionale rispetto alla connessione applicata al resto dell'osservabile; infatti

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{O}F^a_{\mu\nu}(x)\right\rangle &= \frac{4\pi}{ikZ}\epsilon_{\mu\nu\rho}\int[\mathcal{D}A]\ \mathcal{O}\ \frac{\delta e^{iS_{\rm CS}}}{\delta A^a_\rho(x)} = \\ &= \frac{4\pi i}{kZ}\epsilon_{\mu\nu\rho}\int[\mathcal{D}A]\ \frac{\delta\mathcal{O}}{\delta A^a_\rho(x)}e^{iS_{\rm CS}} = \\ &= \frac{4\pi i}{k}\epsilon_{\mu\nu\rho}\left\langle\frac{\delta\mathcal{O}}{\delta A^a_\rho(x)}\right\rangle,\end{aligned} \tag{2.114}$$

dove Z indica la funzione di partizione e nel secondo passaggio è stata effettuata un'integrazione per parti.[20] Utilizzando la (2.110) e la (2.114) possiamo quindi scrivere

$$\frac{\delta}{\delta C^\mu(x)}\langle C\rangle = -\frac{4\pi i}{k}\epsilon_{\mu\nu\rho}\dot{C}^\nu(x)\left\langle\frac{\delta}{\delta A^a_\rho(x)}{\rm Tr}_R H^x R^a H_x,\right\rangle \tag{2.115}$$

dove si è usato $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}R^a$, mentre $\langle C\rangle$ è definito nella (2.38).

La contorsione Consideriamo ora esplicitamente il caso di una deformazione δC che corrisponda alla prima mossa di Reidemeister (v. fig. 1). Questo significa che la superficie generata da δC e $\dot{C}$ ha una componente perpendicolare alla direzione $\|$ parallela al nodo indeformato; poiché

$$\begin{aligned}\frac{\delta H^x}{\delta A^a_\rho(x)} &= H^x R^a dx^\| \delta^\rho_\|, \\ \frac{\delta H_x}{\delta A^a_\rho(x)} &= R^a H_x dx^\| \delta^\rho_\|,\end{aligned}$$

[20] Se si tiene conto anche del contributo dei *ghost*, come nella Ref. [41], allora si vede che la (2.114) è valida solo se $Q\mathcal{O} = -[\mathcal{O}, c]$, in modo tale che $Q(F\mathcal{O}) = 0$. La (2.36) e la (2.12) implicano che ciò è vero nel caso della (2.110). La validità della (2.114) si basa quindi sulla possibilità di effettuare un'integrazione per parti e di scartare termini Q-esatti. Ciò non è possibile nel caso di *gauge* singolari come quelli assiali.

possiamo, usando la (2.53), scrivere

$$\left\langle \hat{L}_+ \right\rangle - \left\langle \hat{L}_0 \right\rangle = -\frac{4\pi i c_2(R)}{k} f \left\langle \hat{L}_0 \right\rangle + O(||\delta C||^2),$$

dove $\hat{L}_+$, $\hat{L}_0$ sono mostrati in fig. 1, mentre f è data da

$$f = \int dx^{\|} \delta C^{\mu}(x) \dot{C}^{\nu}(x) \epsilon_{\mu\nu\|}; \tag{2.116}$$

quest'ultima espressione è solo formale, ma le può essere dato un significato preciso [19]. Il valore di f risulta allora essere uguale a $1/2$ (poiché in realtà δC corrisponde solo a mezza deformazione dal nodo $\hat{L}_-$ al nodo $\hat{L}_+$; il valore $1/2$ è analogo al valore "convenzionale" che si dà all'integrale $\int_0^\infty dt\delta(t)$). Utilizzando questa normalizzazione nonché il fatto che ogni variazione rispetto a C produce per la (2.115) una potenza di $1/k$, possiamo infine scrivere

$$\left\langle \hat{L}_+ \right\rangle - \left\langle \hat{L}_0 \right\rangle = -\frac{2\pi i c_2(R)}{k} \left\langle \hat{L}_0 \right\rangle + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Ripetendo le medesime considerazione per $\hat{L}_-$, giungiamo infine al risultato (cfr. (A.24)):

$$\left\langle \hat{L}_+ \right\rangle = \alpha \left\langle \hat{L}_0 \right\rangle, \tag{2.117}$$

$$\left\langle \hat{L}_- \right\rangle = \frac{1}{\alpha} \left\langle \hat{L}_0 \right\rangle, \tag{2.118}$$

dove

$$\alpha = 1 - \frac{2\pi i c_2(R)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{2.119}$$

La relazione di matassa Passiamo ora al caso più complicato costituito dalla relazione di matassa. Consideriamo la differenza tra il nodo L_+ ed il nodo singolare $L_\times$, v. fig. 4. Per evitare termini aggiuntivi del tipo appena studiato, supponiamo che la superficie generata da $\delta C(x)$ e $\dot{C}(x)$ non abbia componenti ortogonali alla direzione $\|$ nel punto x in cui si effettua la deformazione. La derivata funzionale rispetto ad A potrà quindi agire, con contributo non nullo, solo sul punto $\bar{x}$ corrispondente al secondo passaggio del nodo nel punto x (per essere più precisi $x := x(s)$, $\bar{x} := x(\bar{s})$ con $x(s) = x(\bar{s})$ ma $s \neq \bar{s}$). Ci troveremo dunque un contributo del tipo

$$\mathrm{Tr}_R H^x R^a H^{\bar{x}}_x R^a H_{\bar{x}}. \tag{2.120}$$

Se R è la rappresentazione fondamentale di $SU(N)$ allora possiamo usare l'identità di Fierz

$$R^a_{ij}R^a_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right), \tag{2.121}$$

che ci permette di riscrivere la (2.120) come

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(H^x H_{\bar{x}})\mathrm{Tr}H^{\bar{x}}_x - \frac{1}{N}\mathrm{TrHol}\right). \tag{2.122}$$

Il primo contributo della (2.122) corrisponde al *link* L_0, v. fig. 4, mentre il secondo non dà nessuna variazione rispetto alla configurazione iniziale $L_\times$. Tenendo conto della normalizzazione $f = 1/2$ per la (2.116), e ripetendo le medesime considerazioni per L_-, otteniamo all'ordine $1/k$,

$$\begin{aligned}
\langle L_+\rangle &= -\frac{\pi i}{k}\langle L_0\rangle + \left(1 + \frac{\pi i}{kN}\right)\langle L_\times\rangle\,, \\
\langle L_-\rangle &= +\frac{\pi i}{k}\langle L_0\rangle + \left(1 - \frac{\pi i}{kN}\right)\langle L_\times\rangle\,;
\end{aligned}$$

allo stesso ordine possiamo anche scrivere

$$\left(1 - \frac{\pi i}{kN}\right)\langle L_+\rangle = -\frac{\pi i}{k}\langle L_0\rangle + \langle L_\times\rangle\,, \tag{2.123}$$

$$\left(1 + \frac{\pi i}{kN}\right)\langle L_+\rangle = +\frac{\pi i}{k}\langle L_0\rangle + \langle L_\times\rangle\,. \tag{2.124}$$

Se ora sottraiamo la (2.118) dalla (2.117) otteniamo la relazione di matassa nella forma (cfr. (A.23))

$$\beta\langle L_+\rangle - \beta^{-1}\langle L_-\rangle = z\langle L_0\rangle\,, \tag{2.125}$$

con

$$\beta = 1 - \frac{\pi i}{kN} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{2.126}$$

$$z = -\frac{2\pi i}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{2.127}$$

La relazione con i polinomi di Jones

Le relazioni (2.117) e (2.118) mostrano che l'invariante ottenuto dalla teoria di Chern–Simons non è un invariante per *isotopia d'ambiente* (ossia un vero invariante topologico del *link*), ma solo un invariante per *isotopia regolare* (ossia un invariante topologico per una *banda*). È tuttavia noto, v. p.es. Ref. [46], come ottenere un invariante per isotopia regolare da un invariante per isotopia d'ambiente; è sufficiente considerare il polinomio

$$G(C) := \alpha^{-w(C)} \langle C \rangle , \tag{2.128}$$

dove α è definita nella (2.119), mentre $w(C)$ è la *contorsione* del nodo C, definita nella (A.3). È ora immediato verificare che G è invariante sotto la prima mossa di Reidemeister e soddisfa alla relazione di matassa (A.14) con

$$t = \alpha\beta = 1 - \frac{\pi i}{k} N + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{2.129}$$

e z dato dalla (2.127). Si noti che la (2.129) e la (2.127) corrispondono al prim'ordine in $1/k$ della (2.50) e della (2.51). Nella Ref. [19] si mostra la compatibilità di questo approccio con la relazione di matassa esatta, ma i valori trovati per t e z corrispondono alla (2.50) ed alla (2.51) senza la sostituzione $k \to k + c_v$.

2.8 Conclusioni

Vorrei in quest'ultima sezione sottolineare alcuni dei problemi connessi alla teoria di Chern–Simons, discussi nelle sezioni precedenti, e già rilevati nella Ref. [10].

1. La teoria CS non è una vera teoria topologica. Ciò è rilevato dal fatto che la funzione di partizione dà un invariante che dipende non solo dalla varietà M ma anche dal suo *framing*.

2. I nodi devono essere dotati di framing. Ciò è evidente sia nell'analisi non perturbativa sia negli sviluppi perturbativi. In questi ultimi, tuttavia, il problema è più grave, poiché la scelta del *framing* dev'essere fatta ordine per ordine.

3. L'analiticità in $k \to \infty$ è persa. Ciò è dovuto al fatto che la simmetria *naïf* della (2.37) $\overline{Z(M;C;k)} = Z(M;C;-k)$ è rotta a causa dello *shift* $k \to k + c_v$ nelle (2.50) e (2.51). Come conseguenza della non analiticità nella costante di accoppiamento vi sono delle discrepanze con gli sviluppi perturbativi.

Vedremo nei prossimi capitoli che questi problemi sono assenti nella teoria BF. Infatti

1. essa è una vera teoria topologica, indipendente dal *framing* della varietà;

2. è possibile introdurre la nozione di *framing* direttamente nelle osservabili associate ai nodi anziché nello sviluppo perturbativo;

3. la costante di accoppiamento non è quantizzata, non rinormalizza ed è possibile preservare l'analiticità della teoria che garantisce il completo accordo con gli sviluppi perturbativi.

La teoria BF permette inoltre di studiare il polinomio di Alexander–Conway e si presta ad essere generalizzata in dimensione più alta.

Capitolo 3

La teoria BF

La teoria BF è stata introdotta nella Ref. [64]. Essa è una teoria topologica che può essere definita in ogni dimensione ed in ogni dimensione possiede un termine quadratico, della forma $B \wedge dA$, che permette di definire la teoria quantistica. In questo capitolo darò le informazioni essenziali relative alla teoria BF sia nel caso abeliano sia in quello non abeliano, facendo particolare riferimento alla Ref. [16] cui si rimanda per approfondimenti. Nel caso abeliano non c'è alcuna difficoltà a introdurre le osservabili e a mostrare che i loro valori di aspettazione sono legati al numero di concatenzioni delle sottovarietà su cui sono definite; per lo studio della teoria BF con osservabili nel caso non abeliano si rimanda al Cap. 4.

3.1 Il caso abeliano

L'azione della teoria BF nel caso abeliano è data da

$$S_{BF} = \frac{1}{2\pi} \int_{M^d} B \wedge dA, \tag{3.1}$$

dove A è una p-forma, B è una q-forma e M^d è una varietà di dimensione $d = p + q + 1$. Accanto alla simmetria di *gauge*, cfr. la (2.4),

$$\delta_1 A = -d\omega, \quad \delta_1 B = 0, \tag{3.2}$$

dove ω è una $(p-1)$-forma, vi è un'altra simmetria propria della teoria BF:

$$\delta_2 A = 0, \quad \delta_2 B = -d\chi, \tag{3.3}$$

dove χ è una $(q-1)$-forma. Se $p > 1$ la simmetria (3.2) è riducibile, nel senso che è invariante sotto la trasformazione

$$\delta\omega = -d\omega_1,$$

dove ω_1 è una $p-2$ forma. Se $p > 2$ anche questa simmetria è riducibile, e così via sino alla 0-forma ω_{p-1}. Lo stesso discorso vale ovviamente anche per la seconda simmetria. In termini di integrale funzionale, le simmetrie riducibili vengono trattate introducendo una sequenza di *ghost* per i *ghost*. La funzione di partizione corrisponde quindi ad un prodotto di determinanti con potenza ± 1 dell'operatore derivata esterna ed è quindi legata alla torsione di Ray–Singer. In particolare se $p = 1$

$$Z_{BF} = \frac{1}{\mathcal{T}}, \tag{3.4}$$

dove $\mathcal{T}$ è la torsione di Ray–Singer.

3.1.1 Le osservabili

Dalla (3.2) e (3.3) si ricava che $\oint_{K_p} A$ e $\oint_{C_q} B$ sono delle buone osservabili, se K_p e C_q sono delle sottovarietà chiuse rispettivamente di dimensione p e q, . Se $M^d = S^d$, è facile mostrare [60] che

$$\left\langle \oint_{K_p} A \ \oint_{C_q} B \right\rangle = 4\pi i \Phi_d(K_p, C_q), \tag{3.5}$$

dove $\Phi_d(K_p, C_q)$ rappresenta il *numero di concatenazioni* della sottovarietà K_p con la sottovarietà C_q immerse in S^d, con $d = p + q + 1$; esso si esprime, generalizzando la (2.40), come:

$$\Phi_d(K_p, C_q) = \frac{1}{\Omega_d} \oint_{K_p} dx^{i_1} \cdots dx^{i_p} \oint_{C_q} dy^{j_1} \cdots dy^{j_q} \epsilon_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q k} \frac{(x-y)^k}{|x-y|^d}, \tag{3.6}$$

dove Ω_d è l'angolo solido totale in d dimensioni. Se consideriamo un'osservabile $\mathcal{O}(\int_{K_p^i} A, \int_{C_q^j} B)$, otterremo una funzione $F(\Phi_d(K_p^i, C_q^j))$. Si noti che i cicli K_p^i si accoppiano solo ai cicli C_q^j e viceversa; ciò significa che non ci sono problemi di autoconcatenazione.

3.2 Il caso non abeliano

Nel caso non abeliano è necessario considerare A come una 1-forma di connessione. Questo implica che B dovrà essere una $(d-2)$-forma a valori nell'aggiunta. L'azione quindi si scrive:

$$S_{BF}[A,B;M] := \frac{1}{2\pi}\int_{M^d} \mathrm{Tr} B \wedge F, \tag{3.7}$$

dove M^d è una varietà d-dimensionale e $F = d_A A$ è la 2-forma di curvatura. Il fattore $1/2\pi$ in realtà è irrilevante in una teoria senza osservabili, poiché può essere rimosso riscalando il campo B. In presenza di osservabili, come quelle che verranno introdotte nel Cap. 4, la scelta fatta nella (3.7) rende più facile comparare questa teoria con quella di Chern–Simons. La (3.7), a differenza della (2.1), è invariante sotto trasformazioni di *gauge* finite:

$$A(x) \rightarrow g(x)A(x)g^{-1}(x) + g(x)dg^{-1}(x), \tag{3.8}$$

$$B(x) \rightarrow g(x)B(x)g^{-1}(x). \tag{3.9}$$

Per comodità diamo anche la forma di una trasformazione di *gauge* infinitesima generata dalla 0-forma ω a valori nell'aggiunta:

$$\delta_1 A = -d_A \omega, \tag{3.10}$$

$$\delta_1 B = -[B,\omega], \tag{3.11}$$

che generalizza al caso non abeliano la (3.2). Come nel caso abeliano, esiste una seconda trasformazione di simmetria generata dalla $(d-3)$-forma χ a valori nell'aggiunta:

$$\delta_2 A = 0, \tag{3.12}$$

$$\delta_2 B = -d_A \chi; \tag{3.13}$$

la (3.7) è invariante sotto questa trasformazione di simmetria a causa dell'identità di Bianchi

$$d_A F = 0. \tag{3.14}$$

È immediato verificare che, se ci restringiamo alle configurazioni di minimo $F = 0$, $d_A B = 0$, allora esistono delle simmetrie riducibili $\delta\chi = -d\chi^{(1)}$, che rendono più complicata l'analisi in $d > 3$. In ogni caso è possibile provare [16] che la teoria BF fornisce degli invarianti topologici in ogni dimensione. In $d = 3$ l'invariante ottenuto è l'inverso della torsione di Ray–Singer non abeliana.

3.3 Deformazioni della teoria BF

Vogliamo qui considerare le possibili deformazioni della teoria BF ottenute aggiungendo un termine topologico ed invariante per trasformazioni di *gauge* (3.8,3.9). Per evitare divergenze chiediamo anche che tale termine non contenga singolarità che per $A, B \to \infty$. Se escludiamo l'aggiunta di termini di Chern–Simons, possibili solo in dimensioni dispari e comunque invarianti solo sotto trasformazioni di *gauge* infinitesime (3.10), e chiediamo che B sia una $(d-2)$-forma a valori nell'aggiunta (in modo da avere sempre il termine quadratico $B \wedge dA$), allora vale la seguente

Proposizione 1 *A meno di trasformazioni unitarie su A e B, esistono deformazioni non singolari, topologiche ed invarianti di* gauge *della teoria BF solo per $d = 2, 3, 4$. Esse hanno la forma:*

$$\widetilde{S_{BF}}[A, B; M^2] = \int_{M^2} \mathrm{Tr}(f(B)F), \tag{3.15}$$

$$\widetilde{S_{BF}}[A, B; M^3] = \int_{M^3} \mathrm{Tr}\left(B \wedge F + \frac{\kappa^2}{3} B \wedge B \wedge B\right), \tag{3.16}$$

$$\widetilde{S_{BF}}[A, B; M^4] = \int_{M^4} \mathrm{Tr}\left(B \wedge F + \frac{\kappa^2}{2} B \wedge B\right), \tag{3.17}$$

dove f è una funzione analitica sullo spazio delle 0*-forme a valori nell'aggiunta, mentre κ è una costante arbitraria. (Se vogliamo che l'integrale funzionale "converga" dobbiamo chiedere inoltre che* $\mathrm{Re}\,\kappa^2 \geq 0$ *e che* $\mathrm{Re}\lim_{|B|\to+\infty} f(B) \geq 0$*).*

Dimostrazione La forma più generale di un'azione invariante sotto la (3.8,3.9) si scrive

$$\widetilde{S_{BF}} = \int_{M_d} \sum_{r\geq 0, s\geq 0} d_A^r B^s;$$

poiché vogliamo un'azione topologica, dobbiamo chiedere che

$$r + (d-2)s = d, \tag{3.18}$$

con $r, s \in \mathbf{Z}^+$. Per risolvere la (3.18) consideriamo i seguenti casi

1. Il caso $d = 2$. Le (3.18) ha soluzione per $r = 2$ e $\forall s$. Poiché $d_A^2 = F$, si ottiene la (3.16) con $f(B) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s B^s$, dove le α_s sono costanti arbitrarie.

2. Il caso $d > 2$. La (3.18) può essere riscritta nella forma

$$s = \frac{d-r}{d-2}, \tag{3.19}$$

che ha soluzioni solo per $r = 0, 1, 2, d$. Infatti se $2 < r < d$ allora $0 < s < 1$, mentre se $r > d$ allora $s < 0$. Dobbiamo quindi studiare i seguenti sottocasi:

(a) $r = d$ In questo caso si ha $s = 0$. Poiché $d_A^2 = F$, otteniamo il termine $F^{d/2}$ se d è pari, mentre se d è dispari abbiamo $d_A F^{(d-1)/2}$ che, per la (3.14), si annulla.

(b) $r = 2$ In questo caso si ha $s = 1$ e si ottiene il termine BF.

(c) $r = 1$ Questo caso ammette soluzione solo per $d = 3$; essa vale $s = 2$ e fornisce il termine Bd_AB.

(d) $r = 0$ Quest'ultimo caso ammette soluzione solo per $d = 3$ e $d = 4$. Si ha rispettivamente $s = 3$ e $s = 2$, e quindi i termini B^3 e B^2 che compaiono nella (3.16) e nella (3.17).

In $d = 3$ è possibile eliminare il termine Bd_AB se si effettua il cambio di variabili

$$A \rightarrow A + \beta B, \tag{3.20}$$
$$B \rightarrow B, \tag{3.21}$$

dove β è un'opportuna costante. Si noti che B in tre dimensioni è una 1-forma e quindi la trasformazione è ben definita. Inoltre è immediato verificare che essa ha Jacobiano uguale a 1. Se $d = 2m$ è invece possibile eliminare il termine F^m tramite il cambiamento di variabili

$$A \rightarrow A, \tag{3.22}$$
$$B \rightarrow B + \beta F^{m-1}, \tag{3.23}$$

dove β è un'opportuna costante. Poiché B è una $(2m-2)$-forma, la trasformazione è ben definita. Anche in questo caso si verifica immediatamente che essa ha Jacobiano uguale a 1.

Consideriamo ora più in dettaglio i casi $d = 3$ e $d = 4$ con azione definita dalla (3.16) e dalla (3.17).

La teoria BF in 3 dimensioni Essa è definita dalla (3.16). Oltre alla simmetria di *gauge*, essa è invariante anche sotto la trasformazione, generata

dalla 0-forma χ a valori nell'aggiunta,

$$\delta_2 A = -\kappa^2 [B, \chi], \tag{3.24}$$
$$\delta_2 B = -d_A \chi, \tag{3.25}$$

che generalizza la (3.12,3.13). La teoria BF in tre dimensioni è stata studiata [74] in connessione con la gravità euclidea in 3 dimensioni. Essa infatti può essere vista come una teoria di *gauge* con gruppo $SO(3)$ descritta dalla connessione di spin ω e dalla triade e. In questo formalismo l'azione coincide con la (3.16) se identifichiamo A con ω, B con e, il gruppo di struttura G con il gruppo di Lorentz[1] $SO(3)$ e κ con la *costante cosmologica*. Con abuso di linguaggio continueremo a chiamare κ costante cosmologica anche nel caso in cui $G \neq SO(2,1)$. Il termine B^3 verrà chiamato di conseguenza *termine cosmologico*.

La teoria BF in 4 dimensioni Essa è definita dalla (3.17). In questo caso la (3.12, 3.13), si generalizza in

$$\delta_2 A = \kappa^2 \chi, \tag{3.26}$$
$$\delta_2 B = -d_A \chi, \tag{3.27}$$

dove χ è una 1-forma a valori nell'aggiunta. La quantizzazione canonica della (3.17) mostra [44] che i funzionali d'onda sono dati dall'esponenziale dell'azione di Chern–Simons.

[1] Le trasformazioni di *gauge* (3.10,3.11) con gruppo $SO(3)$, corrispondono alle *rotazioni*. La 0-forma χ che compare nella (3.24,3.25) genera invece le *traslazioni*. La gravità euclidea in 3 dimensioni può quindi essere vista come una teoria di *gauge* con gruppo di struttura dato dal gruppo di Poincaré $ISO(3)$ [74].

Capitolo 4

La teoria BF con osservabili

In questo capitolo descrivo la teoria BF in presenza di osservabili associate a nodi. Tali osservabili sono state introdotte, nel caso della teoria BF pura, nelle Reff. [31] e [25] (rispettivamente in quattro e tre dimensioni).

Qui presento anche una generalizzazione al caso in cui la costante cosmologica è diversa da zero. Discuto la relazione tra quest'ultima teoria e quella di Chern–Simons, nonché le relazioni con i polinomi di Jones generalizzati. Considero lo sviluppo perturbativo sia nel caso del *gauge* covariante, dove si ottengono risultati analoghi a quelli delle Reff. [41] e [10], sia nel caso dei *gauge* assiali dove si ottengono gli integrali di Kontsevich [50][11] ed una nuova formula [23] che permette di calcolare gli invarianti in maniera puramente combinatoria. Discuto come e perché l'invarianza topologica vada parzialmente perduta quando si lavora con questi *gauge* singolari, nei quali supersimmetria è rotta da $N = 2$ a $N = 1$. Infine accenno all'introduzione delle osservabili nel caso quadridimensionale [31].

4.1 Gli sviluppi perturbativi nel caso tridimensionale

4.1.1 Invarianza BRST e finitezza

Nella teoria BF sono presenti due simmetrie: la usuale simmetria di *gauge* (3.8,3.9) e la simmetria (3.24,3.25). Ciò significa che non è sufficiente fissare

il *gauge* con una condizione tipo la (2.8), ma è necessario imporre anche

$$\mathcal{G}^a[B](x) = 0. \tag{4.1}$$

A livello di integrale funzionale dovremo considerare accanto ai campi "fisici" A e B anche dei moltiplicatori di Lagrange ϕ e φ, e dei *ghost* $c, \bar{c}$ e $q, \bar{q}$. Tutti questi campi aggiuntivi sono a valori nell'algebra di Lie di G. L'azione complessiva assumerà la forma

$$S_{\mathrm{TOT}} = \widetilde{S_{BF}} + Q\Sigma, \tag{4.2}$$

dove

$$\Sigma = \int_{M^3} d^3x \sqrt{\gamma(x)} [\mathrm{Tr}\bar{c}(x)\mathcal{F}(x) + \mathrm{Tr}\bar{q}(x)\mathcal{G}(x)], \tag{4.3}$$

e Q è il generatore nilpotente ($\{Q, Q\} = 0$) delle trasformazioni BRST. Esso agisce come segue:

$$\begin{aligned} QA &= -d_A c - \kappa^2 [B, q], && (4.4)\\ QB &= -[B, c] - d_A q, && (4.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Qc &= \frac{1}{2}[c, c] + \frac{\kappa^2}{2}[q, q], && (4.6)\\ Qq &= [q, c], && (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q\bar{c} &= \phi, && (4.8)\\ Q\bar{q} &= \varphi, && (4.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q\phi &= 0, && (4.10)\\ Q\varphi &= 0. && (4.11) \end{aligned}$$

Ripetendo gli argomenti già usati a proposito della teoria di Chern–Simons, è possibile dimostrare l'indipendenza dalla metrica dei valori aspettazione di osservabili Q-chiuse. Potremo quindi ottenere degli invarianti topologici se considereremo delle osservabili nei campi "fisici" A e B che siano invarianti sotto le (3.83.9) e (3.24,3.25).

Nella Ref. [53] è mostrato che nel *gauge* covariante ($\mathcal{F} = \partial^\mu A_\mu, \mathcal{G} = \partial^\mu B_\mu$) si può introdurre una carica vettoriale $\widetilde{Q}$, definita da

$$\widetilde{Q}A = - * d\bar{q}, \tag{4.12}$$
$$\widetilde{Q}B = - * d\bar{c}, \tag{4.13}$$

$$\widetilde{Q}c = -A, \tag{4.14}$$
$$\widetilde{Q}q = -B, \tag{4.15}$$

$$\widetilde{Q}\bar{c} = 0, \tag{4.16}$$
$$\widetilde{Q}\bar{q} = 0, \tag{4.17}$$

$$\widetilde{Q}\phi = d\bar{c}, \tag{4.18}$$
$$\widetilde{Q}\varphi = d\bar{q}, \tag{4.19}$$

tale che $\widetilde{Q}S_{\rm TOT} = 0$. Poiché si mostra che

$$\{\widetilde{Q}, \widetilde{Q}\} = 0, \tag{4.20}$$
$$\{Q, \widetilde{Q}\} = d + \text{equazioni del moto}, \tag{4.21}$$

essa genera una supersimmetria da cui deriva la finitezza[1] della teoria. Ciò significa in particolare che la costante di accoppiamento κ non rinormalizza a livello perturbativo. Poiché essa compare esplicitamente nelle trasformazione (3.24,3.25), questo risultato non può essere invalidato da effetti non perturbativi. Generalizzando al caso della teoria BF i risultati delle Reff. [18] e [51], si può mostrare che la struttura supersimmetrica è presente anche nel caso dei *gauge* assiali e di quelli interpolanti. Come nella teoria di Chern–Simons il passaggio dal *gauge* covariante a quello assiale comporta una rottura della supersimmetria da $N = 2$ a $N = 1$. Questa rottura è responsabile della non completa invarianza per diffeomorfismi della teoria nei *gauge* assiali.

[1] Questo risultato è generalizzato in dimensione più alta nella Ref. [52]. Si noti che la struttura supersimmetrica garantisce la finitezza quando non vi siano anomalie. Si dimostra esplcitamente che queste sono assenti in dimensione 3, 4 e 5.

Struttura generale dello sviluppo perturbativo

La finitezza della teoria BF implica che lo sviluppo perturbativo in un generico *gauge*, che realizzi la supersimmetria, può essere effettuato utilizzando una sorta di teorema di Wick generalizzato[2] dove non si contraggono solo le coppie AB ma anche le terne ABB e AAA. È possibile verificare che si ha (cfr. le (2.96) e (2.97))

$$\left\langle A^a(x)B^b(y)\right\rangle_0 = -4\pi i\delta^{ab}l(x-y), \tag{4.22}$$

$$\left\langle A^a(x)B^b(y)B^c(z)\right\rangle_0 = -(4\pi)^2 f^{abc}v(x,y,z), \tag{4.23}$$

$$\left\langle A^a(x)A^b(y)A^c(z)\right\rangle_0 = -(4\pi)^2\kappa^2 f^{abc}v(x,y,z), \tag{4.24}$$

dove l è una $(1,1)$-forma in $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ e v è una $(1,1,1)$-forma in $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ definita da

$$v(x,y,z) = \int_{w\in\mathbf{R}^3} l(x-w)\wedge l(y-w)\wedge l(z-w). \tag{4.25}$$

La $(1,1)$-forma l integrata su due nodi dà il numero di concatenazioni, generalizzando così la formula di Gauss (2.40); l'invarianza per deformazioni non singolari del nodo e il salto di un'unità in seguito ad una deformazione singolare (che passa per un'intersezione), corrisponde al fatto (v. [10] per il caso del *gauge* covariante) che esiste una $(2,0)$-forma f tale che

$$d_L l = -d_R f + *^L\delta I, \tag{4.26}$$

dove d_L e d_R indicano le derivate esterne che mandano (k,h)-forme rispettivamente in $(k+1,h)$ e $(k,h+1)$-forme, mentre δ è la distribuzione di Dirac.

Se consideriamo ora la mappa i_2 da $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$, che corrisponde a immergere la seconda copia di $\mathbf{R}^3$ come sottospazio diagonale di $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$, allora nel *gauge* covariante ed in tutti i *gauge* interpolanti salvo che nel limite[3] (singolare) dei *gauge* assiali, vale la seguente identità tra $(1,2,1)$-forme in $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$:

$$dv + i_2^*(l\wedge l) = 0, \tag{4.27}$$

[2]Come nella teoria di Chern–Simons, ciò significa che, a causa della supersimmetria, l'azione effettiva coincide con quella classica.

[3]Se ζ è il parametro interpolante [51] che fa passare dal *gauge* covariante ($\zeta=0$) al *gauge* assiale ($\zeta\to\infty$), evidentemente non è possibile commutare il limite con la derivata: $\lim_{\zeta\to\infty} dv \neq d\lim_{\zeta\to\infty} v$.

dove i_2^* è il *pull-back* della $(1,1,1,1)$-forma $l \wedge l$. Mostrerò più avanti che la (4.26) e la (4.27) sono equivalenti al calcolo variazionale.

4.1.2 Calcolo variazionale

Intendo qui introdurre la generalizzazione alla teoria BF dell'approccio variazionale discusso nella Sez. 2.7 [30][19]. Nel caso della teoria BF pura, quest'approccio è stato introdotto e usato nella Ref. [25].

Cominciamo col notare che le derivate funzionali dell'azione (3.16) rispetto ai campi fondamentali danno

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \widetilde{S_{BF}}}{\delta A^a_\mu(x)} &= \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}(d_A B)^a_{\nu\rho}(x), \\
\frac{\delta \widetilde{S_{BF}}}{\delta B^a_\mu(x)} &= \frac{1}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}(F^a_{\nu\rho}(x) + \kappa^2 f^{abc} B^b_\nu(x) B^c_\rho(x)),
\end{aligned}$$

che possono essere invertite a dare le derivate covarianti dei campi A e B in termini di derivate funzionali dell'azione:

$$(d_A B)^a_{\mu\nu}(x) = 4\pi\epsilon_{\mu\nu\rho}\frac{\delta \widetilde{S_{BF}}}{\delta A^a_\rho(x)}, \tag{4.28}$$

$$F^a_{\mu\nu}(x) + \kappa^2 f^{abc} B^b_\mu(x) B^c_\nu(x) = 4\pi\epsilon_{\mu\nu\rho}\frac{\delta \widetilde{S_{BF}}}{\delta B^a_\rho(x)}. \tag{4.29}$$

Ripetendo il calcolo che porta alla (2.114) possiamo quindi dimostrare che:

$$\left\langle (d_A B)^a_{\mu\nu}(x)\mathcal{O}\right\rangle = 4\pi i\epsilon_{\mu\nu\rho}\left\langle \frac{\delta\mathcal{O}}{\delta A^a_\rho(x)}\right\rangle, \tag{4.30}$$

$$\left\langle F^a_{\mu\nu}(x)\mathcal{O}\right\rangle + \kappa^2 f^{abc}\left\langle B^b_\mu(x) B^c_\nu(x)\mathcal{O}\right\rangle = 4\pi i\epsilon_{\mu\nu\rho}\left\langle \frac{\delta\mathcal{O}}{\delta B^a_\rho(x)}\right\rangle. \tag{4.31}$$

Il conto precedente non tiene conto dei *ghost*. Si può verificare che essi non contribuiscono solo per una combinazione del tipo

$$\left\langle \mathrm{Tr}[(F + \kappa^2 B\wedge B)^a_{\mu\nu}(x)\mathcal{O}_1 + \kappa(d_A B)^a_{\mu\nu}(x)\mathcal{O}_2]\right\rangle = 4\pi i\epsilon_{\mu\nu\rho}\left\langle \frac{\delta\mathcal{O}_1}{\delta B^a_\rho(x)} + \frac{\delta\mathcal{O}_2}{\delta A^a_\rho(x)}\right\rangle, \tag{4.32}$$

dove $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ devono soddisfare alle seguenti equazioni

$$Q\mathcal{O}_1 = -[\mathcal{O}_1, c(x)] - \kappa[\mathcal{O}_2, q(x)], \tag{4.33}$$
$$Q\mathcal{O}_2 = -[\mathcal{O}_2, c(x)] - \kappa[\mathcal{O}_1, q(x)]. \tag{4.34}$$

affinché la combinazione in esame sia Q-chiusa. Si osservi che anche in questo caso, come nella teoria di Chern–Simons, il calcolo variazionale si basa sulla possibilità di effettuare integrazioni per parti e di scartare termini Q-esatti. Esso dunque non vale nel caso dei *gauge* assiali.

Come mostreremo nelle prossime sezioni, è possibile costruire anche nella teoria BF delle osservabili che dipendono da cammini chiusi, che sono invarianti di *gauge* e che non dipendono dalla struttura metrica della varietà M. Considerazioni analoghe a quelle della Sez. 2.7 permetteranno di dimostrare che la variazione di queste osservabili rispetto ad una deformazione del cammino è riesprimibile in termini di F, $d_A B$ e $B \wedge B$, e quindi, grazie alle (4.30) e (4.31), tramite derivate funzionali della parte rimanente dell'osservabile rispetto ai campi A e B. La (4.31) ci dice tuttavia che è necessario considerare una particolare combinazione di F e $B \wedge B$. Questa necessità, che è tuttavia assente nella teoria BF pura, sarà legata al problema del *framing*. È interessante osservare che, in uno sviluppo perturbativo, dove si fa uso delle (4.22), (4.23) e (4.24), il calcolo variazionale è equivalente alle (4.26) e (4.27). Si considerino infatti delle inserzioni di $d_A B$ e $F + \kappa^2 B \wedge B$ non singolari, ossia in punti che non compaiono nell'osservabile $\mathcal{O}$. Allora dalle (4.30) e (4.31) si ricava che $\langle (F + \kappa^2 B \wedge B + \kappa d_A B)\mathcal{O} \rangle = 0$. Sviluppando un'arbitraria osservabile $\mathcal{O}$, che soddisfi alla (4.33) con $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}$, in serie di potenze in A e B ed usando le (4.22), (4.23) e (4.24), si mostra che devono valere le (4.26) e (4.27). Ho già ricordato che la (4.27) non vale nei *gauge* assiali. La (4.32) deve quindi essere vista come un'identità di Ward che non vale più quando la supersimmetria sottostante alla teoria è rotta da $N = 2$ a $N = 1$. In tali situazioni non siamo più garantiti che vi sia una completa invarianza per diffeomorfismi. Equivalentemente si può dire che nei *gauge* assiali non è possibile effettuare integrazioni per parti poiché i termini di "bordo" danno un contributo non nullo.

4.2 Le osservabili

Per ottenere degli invarianti dalla teoria BF è necessario introdurre delle osservabili invarianti di *gauge* e indipendenti dalla metrica. Per molto tempo l'introduzione di queste osservabili ha costituito un grosso problema che ha di fatto limitato l'utilità della teoria BF. Possibili osservabili, per la teoria in quattro dimensioni, furono suggerite per la prima volta nella Ref. [31]. Nella Ref. [25] si è mostrato che la versione tridimensionale di tali osservabili per la teoria BF pura soddisfa a tutti i requisiti di invarianza richiesti. In questa sezione discuterò la costruzione di queste osservabili sia per la teoria pura sia per quella con termine cosmologico. Lo studio di questo secondo caso, ancora del tutto assente in letteratura, è molto importante per comprendere le relazioni tra la teoria BF e la teoria di Chern–Simons.

Alcune notazioni

Sia C una curva, non necessariamente chiusa. Indicherò con ${x_0}^i$ e ${x_0}^f$ i punti terminali di tale curva (se la curva è chiusa, x_0 indicherà un punto base). Dato un punto $x \in C$, $t_x C$ indicherà il versore tangente a C nel punto x. Con $T_x C$ e $T^x C$ indicherò le porzioni di C rispettivamente dal punto x all'estremo finale e dall'estremo iniziale al punto x. Il trasporto parallelo lungo C, rispetto alla connessione A, sarà indicato con $H(C)$:

$$H(C) = \mathcal{P} \exp \int_C A; \tag{4.35}$$

se C è una curva chiusa scriverò $\mathrm{Hol}(C)$, cfr. (2.31). Talora, quando ciò non dovesse essere ambiguo, scriverò semplicemente H e Hol. Userò anche le notazioni abbreviate H_x e H^x al posto di $H(T_x C)$ e $H(T^x C)$. È facile verificare che sotto una trasformazione di *gauge* (3.8), il trasporto parallelo trasforma come segue:

$$H \to g({x_0}^i) H g^{-1}({x_0}^f), \tag{4.36}$$

mentre sotto la trasformazione speciale (3.24), si ha:

$$\delta_2 H = -\kappa^2 \int_{x \in C} H^x [B(x), \chi(x)] H_x. \tag{4.37}$$

La (4.36) e la (3.9) suggeriscono di prendere in considerazione l'osservabile $H(K^x) B(x) H(K_x)$, dove K_x e K^x sono curve che hanno x rispettivamente

come estremo iniziale e finale. Sotto una trasformazione di *gauge* tale osservabile si comporta come un trasporto parallelo lungo la curva $K^x \cup K_x$. Poiché B è una 1-forma sarà naturale integrarla lungo una curva C. Se chiediamo che $t_x K_x = t_x K^x = t_x C$, allora sotto una trasformazione speciale (3.24,3.25) si avrà

$$\begin{aligned} \delta_2 \int_{x\in C} H(K^x)B(x)H(K_x) = & -\int_{x\in C} H(K^x) d_A\chi(x) H(K_x) + O(\kappa^2) = \\ & -\int_{x\in C} d[H(K^x)\chi(x)H(K_x)] + O(\kappa^2), \end{aligned} \tag{4.38}$$

dove nell'ultimo termine è stato possibile sostituire alla derivata covariante d_A la derivata ordinaria d. Possiamo ora passare alla costruzione esplicita delle osservabili della teoria BF.

4.2.1 La teoria BF pura

Cominciamo con il caso più semplice costituito dalla teoria BF pura, cioè con $\kappa = 0$. La discussione precedente suggerisce di considerare

$$\gamma_0(K) := \mathrm{Hol}(K), \tag{4.39}$$

$$\gamma_1(C, \{K\}) := \oint_{x\in C} H(K^x)B(x)H(K_x), \tag{4.40}$$

dove K è una curva chiusa con punto base $\bar{x}$, mentre $\{K\}$ indica una famiglia di curve aventi un estremo in $\bar{x}$. Per ogni punto $x \in C$ ci saranno due e due sole curve indicate con K_x e K^x aventi x come estremo, rispettivamente iniziale e finale. Si richiede inoltre che $t_x K_x = t_x K^x = t_x C$. Sotto una trasformazione di *gauge* (3.8,3.9) si ha

$$\gamma_i \to g(\bar{x})\gamma_i g^{-1}(\bar{x}), \tag{4.41}$$

e quindi la traccia di una generica funzione analitica di γ_0 e γ_1, è invariante di *gauge*. Per ottenere degli invarianti topologici, tuttavia, dobbiamo chiedere l'invarianza anche sotto trasformazioni del tipo (3.24,3.25) con $\kappa = 0$. Usando le (4.37) e (4.38), si trova che

$$\delta_2\gamma_0 = 0, \tag{4.42}$$

$$\delta_2\gamma_1 = H(K^{x_0{}^f})\chi(x_0{}^f)H(K_{x_0{}^f}) - H(K^{x_0{}^i})\chi(x_0{}^i)H(K_{x_0{}^i}), \tag{4.43}$$

dove $x_0{}^i$ e $x_0{}^f$ sono i punti estremali di C. Si noti che per eliminare l'ultimo termine non è sufficiente richiedere che la curva C sia chiusa, poiché quando

${x_0}^f \to {x_0}^i$ la curva $K^{{x_0}^f}$ non viene a coincidere con la curva $K^{{x_0}^i}$ e la curva $K^{{x_0}_f}$ non viene a coincidere con la curva $K^{{x_0}_i}$. Per ottenere l'invarianza rispetto a δ_2 è quindi necessario fissare a zero il generatore χ nel punto x_0 (limite comune di ${x_0}^f$ e ${x_0}^i$). Eventualmente si può pensare di aver messo all'infinito il punto base x_0.

Si noti che il valore di aspettazione di una funzione di γ_0 e γ_1 è invariante rispetto a variazioni infinitesime delle curve in $\{K\}$, purché tali variazioni non intersechino la curva chiusa C. Infatti la variazione infinitesima del trasporto parallelo rispetto alla curva lungo la quale è calcolato, è esprimibile inserendo un termine di curvatura F nel punto attorno al quale si effettua la variazione (cfr. la (2.110)). Ma grazie alla (4.31) con $\kappa = 0$, tale inserzione può essere riespressa in termini di una derivata funzionale rispetto a B e, se la deformazione non interseca il cammino C dove B vive, tale variazione è nulla. Quindi in realtà le osservabili dipendono solo dalla classe di omotopia delle curve K. Possiamo quindi, senza perdere di generalità, considerare il caso particolare in cui $K^x = T^x(K)$, $K_x = T_x(K)$, $K = C$ e $\bar{x} = x_0$. In tal caso scriveremo semplicemente $\gamma_0(C)$ e $\gamma_1(C)$.

4.2.2 La teoria BF con termine cosmologico

Le osservabili introdotte nel caso della teoria BF pura in (4.39) e (4.40), non sono invarianti sotto la trasformazione (3.24,3.25) se $\kappa \neq 0$. È pensabile che, come nel caso della costruzione dell'olonomia in (2.33), si possano introdurre altre osservabili che sommate a γ_0 e γ_1 producano un invariante. Di fatto queste osservabili esistono, come mostrerò fra poco, ma solo nel caso in cui

$K^x = T^x(K)$, $K_x = T_x(K)$, $K = C$ e $\bar{x} = x_0$. Esse si scrivono[4]

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0(C) & := & \mathrm{Hol}(C), \\ \gamma_1(C) & := & \oint_{x\in C} H^x B(x) H_x, \\ \gamma_2(C) & := & \oint_{x<y\in C} H^x B(x) H^y_x B(y) H_y, \\ & \vdots & \\ \gamma_n(C) & := & \oint_{x_1<\cdots<x_n\in C} H^{x_1} B(x_1) H^{x_2}_{x_1} \cdots H^{x_n}_{x_{n-1}} B(x_n) H_{x_n}, \\ & \vdots & \end{array} \tag{4.44}$$

dove si è usata la notazione abbreviata $H_x = H(T_x C)$, $H^x = H(T^x C)$ e $H^y_x = H(T_x T^y C)$. Si noti che è anche possibile scrivere

$$\gamma_n(C) = \mathcal{P}_B[\gamma_0(C)(\gamma_0(C)^{-1}\gamma_1(C))^n], \tag{4.45}$$

dove $\mathcal{P}_B$ indica l'ordinamento dei campi B lungo il cammino C. È immediato verificare che tutte le osservabili γ_i sono invarianti di *gauge* (ossia soddisfano alla (4.41) con $\bar{x}$ sostituito da x_0). Sotto una trasformazione del tipo (3.24,3.25) si ha invece, usando ripetutamente la (4.37) e la (4.38), che

$$\delta_2 \gamma_n = -\kappa^2 \widetilde{\gamma_{n+1}} + \widetilde{\gamma_{n-1}} + [\chi(x_0), \gamma_{n-1}], \tag{4.46}$$

dove $\widetilde{\gamma_n}$ è definito a partire da γ_n sostituendo in tutti i modi possibili un campo B con un commutatore $[B, \chi]$:

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\gamma_{-1}} & = & \widetilde{\gamma_0} = 0, \\ \widetilde{\gamma_1} & = & \oint_{x\in C} H^x [B(x), \chi(x)] H_x, \\ \widetilde{\gamma_2} & = & \oint_{x<y\in C} H^x [B(x), \chi(x)] H^y_x B(y) H_y + \oint_{x<y\in C} H^x B(x) H^y_x [B(y), \chi(y)] H_y, \\ & \vdots & \end{array}$$

[4]Nel caso in cui $G = SU(2)$, le osservabili (4.44) concidono con le *variabili di loop* di Rovelli e Smolin [63] se A e B sono interpretate come le *nuove variabili di Ashtekar* [8] (A come la *connessione di spin* e B come la *triade*). Poiché B è la variabile coniugata di A, è possibile mostrare [63] che

$$\{\gamma_m, \gamma_n\} \sim \gamma_{m+n-1},$$

dove $\{\cdot,\cdot\}$ è la parentesi di Poisson e $\gamma_{-1} \equiv 0$. Quindi le γ_n costituiscono un'algebra gradata. Si noti che esiste in essa una sottoalgebra formata dalle sole γ_0 e γ_1. Ciò spiega perché queste due variabili possano costituire l'insieme completo di osservabili della teoria, come accade nel caso di costante cosmologica nulla.

Si può quindi verificare che l'osservabile

$$\Gamma := \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \gamma_n = \mathcal{P}_B[\gamma_0 \exp(\kappa \gamma_0^{-1} \gamma_1)], \tag{4.47}$$

si comporta bene sia sotto trasformazioni di *gauge* (3.8,3.9)

$$\Gamma \to g(x_0) \Gamma g^{-1}(x_0), \tag{4.48}$$

sia sotto trasformazioni del tipo (3.24,3.25)

$$\delta_2 \Gamma = [\kappa \chi(x_0), \Gamma] \sim e^{\kappa \chi(x_0)} \Gamma e^{-\kappa \chi(x_0)} - \Gamma, \tag{4.49}$$

dove si vede che l'effetto di δ_2 corrisponde a quello di una trasformazione di *gauge* infinitesima generata da $\kappa\chi(x_0)$. Se ora definiamo le *Wilson loop* della teoria BF come

$$W_R(C) := \mathrm{Tr}_R \Gamma(C), \tag{4.50}$$

abbiamo finalmente delle osservabili invarianti sotto tutte le simmetrie della teoria BF ed indipendenti dalla struttura metrica. Si noti che è possibile ottenere un'osservabile invariante anche considerando la traccia di

$$\Gamma_0 := \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{2n} \gamma_{2n} = \mathcal{P}_B[\gamma_0 \cos(\kappa \gamma_0^{-1} \gamma_1)], \tag{4.51}$$

$$\Gamma_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{2n+1} \gamma_{2n+1} = \mathcal{P}_B[\gamma_0 \sin(\kappa \gamma_0^{-1} \gamma_1)], \tag{4.52}$$

che hanno parità ben definita sotto $\kappa \to -\kappa$. Se chiediamo, come nel caso della teoria BF pura, che $\chi(x_0) = 0$, allora potremo considerare valori di aspettazione della traccia di una generica funzione di tali osservabili.

Ora che abbiamo definito le osservabili della teoria BF possiamo passare allo studio degli invarianti topologici prodotti dai loro valori di aspettazione. Comincerò dalla teoria BF con termine cosmologico, il cui studio è reso più facile dalla relazione con la teoria di Chern–Simons.

4.3 La teoria BF con termine cosmologico ed i polinomi di Jones

Voglio discutere in questa sezione il calcolo dei valori di aspettazione della (4.50) e mostrare che essi danno i polinomi di Jones generalizzati. Comincerò

descrivendo la suggestiva relazione tra la teoria BF con termine cosmologico e la teoria di Chern–Simons. Quindi discuterò il problema del *framing* e darò alcune applicazioni del calcolo variazionale. Discuterò quindi lo sviluppo perturbativo nei *gauge* assiali ed in quello covariante.

4.3.1 La relazione con la teoria di Chern–Simons

Come è stato mostrato in [75], la funzione di partizione della teoria di Chern–Simons, nel limite di accoppiamento debole, dà — *a meno di una fase* — l'inverso della radice quadrata della torsione di Ray–Singer, v. la (2.28). In [16] si mostra invece che la funzione di partizione della teoria BF con costante cosmologica dà l'inverso di tale torsione. Ci si aspetta dunque che valga la relazione

$$Z_{\rm CS}(M)\overline{Z_{\rm CS}(M)} = Z_{BF}(M). \tag{4.53}$$

Tale formula è dimostrata esplicitamente in [74][58][57][6] (nel caso in cui $G = SU(2)$). Il primo membro della (4.53) si può scrivere[5]

$$Z_{\rm CS}(M)\overline{Z_{\rm CS}(M)} = \int \mathcal{D}A_1\, \mathcal{D}A_2\; e^{ikS_{\rm CS}(A_1;M)}\, e^{-ikS_{\rm CS}(A_2;M)}; \tag{4.54}$$

e quindi, effettuando il cambiamento di variabili

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}, \tag{4.55}$$

$$B = k(A_1 - A_2) \tag{4.56}$$

(si noti che A è ancora una connessione), si può riscrivere il secondo membro della (4.54) come

$$\int \mathcal{D}A\mathcal{D}B\; e^{i\widetilde{S_{BF}}(A,B;M)},$$

[5]Come discusso alla fine del Cap. 2, $\overline{Z_{\rm CS}(M)}$ non è ottenuta banalmente mandando $k \to -k$. Nella formula (4.54) solo apparentemente si effettua questa sostituzione. In realtà, se usassimo una notazione più estesa, nell'integrale funzionale dovrebbe apparire anche la correzione dovuta alla non invarianza per diffeomorfismi della misura $\mathcal{D}A$. Questa correzione è data dall'esponenziale dell'invariante di Chern–Simons per la connessione di Levi–Civita. Questo termine è la causa della fase, non topologicamente invariante, che compare nel calcolo di $Z_{\rm CS}$. Nella (4.54) i contributi dovuti alla non invarianza di $\mathcal{D}A_1$ e $\mathcal{D}A_2$ si cancellano.

dove $\widetilde{S_{BF}}$ è definita dalla (3.16) con

$$\kappa = \frac{1}{2k}. \tag{4.57}$$

Si noti che sotto una trasformazione di *gauge* infinitesima (cfr. (2.4))

$$\delta A_1 = -d_{A_1}\omega_1, \tag{4.58}$$
$$\delta A_2 = -d_{A_2}\omega_2, \tag{4.59}$$

i campi A e B trasformano (cfr. le (3.10), (3.11), (3.24) e (3.25)) secondo

$$\delta A = -d_A\omega - \kappa^2[B,\chi], \tag{4.60}$$
$$\delta B = -[B,\omega] - d_A\chi, \tag{4.61}$$

con

$$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \tag{4.62}$$
$$\chi = k(\omega_1-\omega_2). \tag{4.63}$$

Usando le (4.62) e (4.63) è possibile passare dal sistema di *ghost* della teoria di Chern–Simons a quello della teoria BF e completare quindi la dimostrazione della (4.53).

L'introduzione delle osservabili

Vogliamo ora mostrare che il calcolo del valore di aspettazione dell'osservabile (4.50)

$$Z_{BF}(M;C,R) = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}B\ \mathrm{Tr}_R\Gamma(C)\ e^{i\widetilde{S_{BF}}(A,B;M)}, \tag{4.64}$$

corrisponde al calcolo del valore di aspettazione di una *Wilson loop* (2.30) nella teoria di Chern–Simons. Notiamo prima di tutto che è possibile invertire le (4.55) e (4.56) e scrivere

$$A_1 = A + \kappa B, \tag{4.65}$$
$$A_2 = A - \kappa B. \tag{4.66}$$

Possiamo quindi espandere $\mathrm{Hol}(A_1)$ e $\mathrm{Hol}(A_2)$ in serie di Taylor rispetto a κ e, usando la definizione (4.47), mostrare che

$$\mathrm{Hol}(A_1) = \Gamma(A,B;\kappa), \tag{4.67}$$
$$\mathrm{Hol}(A_2) = \Gamma(A,B,-\kappa). \tag{4.68}$$

È quindi immediato verificare che

$$Z_{\rm CS}(M;C,R)\overline{Z_{\rm CS}(M)} = Z_{BF}(M;C,R),$$

ovvero, dividendo ambo i membri per $|Z_{\rm CS}(M)|^2 = Z_{BF}(M)$,

$$\frac{Z_{\rm CS}(M;C,R)}{Z_{\rm CS}(M)} = \frac{Z_{BF}(M;C,R)}{Z_{BF}(M)}. \tag{4.69}$$

Vogliamo ora sottolineare le apparenti contraddizioni contenute nella (4.69):

1. La teoria di Chern–Simons è definita solo per $k \in \mathbf{Z}$, mentre la teoria BF è definita per ogni κ (con $\mathrm{Re}\,\kappa^2 > 0$).

2. La costante di accoppiamento k è soggetta ad una rinormalizzazione $k \to k + c_v$, dovuta ad effetti non perturbativi, mentre la costante di accoppiamento κ non rinormalizza.

3. Non è possibile mandare $k \to -k$, mentre non c'è alcuna ostruzione a mandare $\kappa \to -\kappa$. Anzi, nella teoria BF possiamo addirittura separare l'osservabile Γ nella parte pari Γ_0 ed in quella dispari Γ_1, v. le (4.51) e (4.52).

Tutto ciò è dovuto al fatto che per effettuare la trasformazione (4.55,4.56) bisogna scegliere una componente del gruppo G. La teoria BF, essendo invariante per trasformazioni di *gauge* finite, si estende banalmente al di fuori di questa componente, a differenza della teoria di Chern–Simons. Ne consegue che la corrispondenza tra le due teorie non è esatta: esse coincidono solo negli sviluppi perturbativi, dove le trasformazioni di *gauge* finite non giuocano alcun ruolo. Inoltre, poiché nella teoria BF abbiamo a disposizione due campi, potremo, in un certo senso, distinguere il nodo dal suo *framing*, rimuovendo molte di quelle ambiguità che sono presenti nella teoria di Chern–Simons.

Formule di chirurgia

Usando la relazione (4.53) è possibile tradurre la formula di chirurgia (2.55) nel "linguaggio" della teoria BF. Partendo da

$$\widetilde{S_{BF}}(\widetilde{M}) = \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{j'=0}^{t-1} K_0^j K_0^{j'} \left\langle \mathrm{Tr}_{R_j}\mathrm{Hol}(A_1;C)\mathrm{Tr}_{R_{j'}}\mathrm{Hol}(A_2;C)\right\rangle_{\mathrm{CS}_1-\mathrm{CS}_2}.$$

ed usando le (4.67) e (4.68), si ottiene infatti

$$\widetilde{S_{BF}}(\widetilde{M}) = \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{j'=0}^{t-1} K_0^j K_0^{j'} \left\langle \mathrm{Tr}_{R_j}\Gamma(C;\kappa)\mathrm{Tr}_{R_{j'}}\Gamma(C;\kappa)\right\rangle_{BF}. \tag{4.70}$$

Si noti che, a differenza della (4.69), il cui secondo membro può essere generalizzato a tutti i valori di κ, la (4.70) vale solo per κ definito dalla (4.57) con $k \in \mathbf{Z}$, poiché il numero t di rappresentazioni e la matrice K dipendono dal *livello* k.

4.3.2 La relazione con i polinomi di Jones

La relazione intercorrente tra la teoria BF con termine cosmologico e la teoria di Chern–Simons suggerisce che i valori di aspettazione normalizzati[6] (cfr. la (2.128))

$$G(C;t,z) := \alpha^{-w(C)}\frac{Z_{BF}(S^3;C,R;\kappa)}{Z_{BF}(S^3;\kappa)}, \tag{4.71}$$

con (cfr. la (2.119))

$$\alpha = \exp(-4\pi i c_2(R)\kappa), \tag{4.72}$$

diano i polinomi di Jones generalizzati. Se si lavora nella rappresentazione fondamentale di $SU(N)$, allora $G(C;t,z)$ soddisfa alla relazione di matassa (A.14) con[7] (cfr. le (2.50), (2.51))

$$t = \exp(-2\pi i N\kappa), \tag{4.73}$$

$$z = 2i\sin(2\pi\kappa). \tag{4.74}$$

Nella teoria BF la costante di accoppiamento κ non è quantizzata e può assumere tutti i valori complessi con $\mathrm{Re}\,\kappa^2 \geq 0$. È quindi possibile considerare valori di κ come $\kappa = n/N$, con $n \in \mathbf{Z}$, che danno il polinomio di Alexander–Conway con $z = 2i\sin(2\pi n/N)$. Prima di passare alla dimostrazione della relazione (4.71), v. pag. 76, voglio mostrare che alcune proprietà dei polinomi di Jones sono consistenti con essa.

[6] Salvo avviso esplicito, nel resto di questa sezione considereremo sempre $M = S^3$.

[7] Si noti che le (4.73) e (4.74) sono invarianti per $\kappa \to \kappa + 1$ e quindi è possibile usare quest'invarianza per estendere analiticamente $G(C;t,z)$ a tutto il piano complesso. Se si tiene conto anche della (4.72) con $c_2(R_f) = (N^2-1)/2N$, allora si vede che $Z_{BF}(S^3;C,R;\kappa)$ è invariante solo per $\kappa \to \kappa + N$. Questa è una simmetria "quantistica" della teoria.

Invarianze della teoria BF

Prima di tutto voglio considerare l'effetto di una trasformazione di "inversione temporale"

$$T: \begin{cases} x^0 & \to & -x^0 \\ A_0 & \to & -A_0 \\ B_0 & \to & -B_0 \end{cases}, \tag{4.75}$$

dove 0 indica una direzione arbitraria, che interpretiamo convenzionalmente come "tempo". Sotto la (4.75), un nodo C viene mandato nella sua immagine speculare $C^!$, mentre la varietà S^3 viene mandata in se stessa ma con orientazione opposta. Quindi

$$\begin{aligned} \widetilde{S_{BF}}(S^3) &\stackrel{T}{\to} -\widetilde{S_{BF}}(S^3), \\ \gamma_n(C) &\stackrel{T}{\to} \gamma_n(C^!). \end{aligned}$$

Per riportare l'azione nella forma originale, possiamo effettuare il cambio di variabili $B \to -B$. Sotto questa trasformazione è evidente che $\gamma_n \to (-1)^n \gamma_n$. Abbiamo così dimostrato che

$$Z_{BF}(S^3; C^!, R; \kappa) = Z_{BF}(S^3; C, R; -\kappa). \tag{4.76}$$

Se si nota che $w(C^!) = -w(C)$, la (4.76) corrisponde alla (A.16). Consideriamo ora una trasformazione di parità

$$P: \begin{cases} x^i & \to & -x^i \\ A_i & \to & -A_i \\ B_i & \to & -B_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \tag{4.77}$$

dove 1 e 2 indicano due direzioni arbitrarie che interpretiamo come assia spaziali. Sotto la (4.77) un nodo C è mandato nel suo inverso C^*, ottenuto invertendo l'orientazione di C. La varietà S^3 è invece mandata in se stessa. Ne segue che[8]

$$Z_{BF}(S^3; C^*, R; \kappa) = Z_{BF}(S^3; C, R; \kappa), \tag{4.78}$$

che corrisponde alla (A.17).

[8] Questo mostra che la teoria BF è P-invariante. Sopra ho dimostrato che essa è anche CT-invariante, dove l'operazione C di "coniugazione di carica" corrisponde a mandare κ in $-\kappa$. È quindi preservata l'invarianza CPT.

Passiamo ora allo studio degli effetti della coniugazione complessa. Essa manda $\kappa \to \bar{\kappa}$, ma lascia invariate le osservabili γ_n. Il peso di Gibbs $\exp i\widetilde{S_{BF}}$ è mandato in $\exp -i\widetilde{S_{BF}}$. Anche in questo caso possiamo ristabilire il segno usuale dell'azione tramite il cambio di variabili $B \to -B$, che manda anche $\gamma_n \to (-1)^n \gamma_n$, e quindi ottenere

$$\overline{Z_{BF}(M; C, R; \kappa)} = Z_{BF}(M; C, R; -\bar{\kappa}) \tag{4.79}$$

(si noti che qui non è necessario porre $M = S^3$), che corrisponde all'analiticità di G espressa dalla (A.15). Si noti che nella teoria BF, a differenza che in quella di Chern–Simons, l'analiticità in κ non è rotta. Inoltre è possibile separare la parte Γ_0 pari in κ (4.51) dalla Γ_1 (4.52) che è dispari. La (4.76) ci dice che questi invarianti hanno parità definita se si passa da un nodo alla sua immagine speculare

$$\left\langle \Gamma_0(C^!, \kappa) \right\rangle = \langle \Gamma_0(C, \kappa) \rangle \,, \tag{4.80}$$

$$\left\langle \Gamma_1(C^!, \kappa) \right\rangle = -\langle \Gamma_1(C, \kappa) \rangle \,; \tag{4.81}$$

la (4.79) ci dice invece che sotto coniugazione complessa essi si comportano come segue:

$$\overline{\langle \Gamma_0(C, \kappa) \rangle} = \langle \Gamma_0(C, \bar{\kappa}) \rangle \,, \tag{4.82}$$

$$\overline{\langle \Gamma_1(C, \kappa) \rangle} = -\langle \Gamma_1(C, \bar{\kappa}) \rangle \,; \tag{4.83}$$

se prendiamo κ reale esse rappresentano, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria del polinomio di Jones (a meno della contorsione).

La somma connessa

Cominciamo a considerare la somma connessa di varietà. Per semplicità pensiamo a $S^3 = S^3 \# S^3$, con un *link* contenuto in ciascuna delle due sfere al secondo membro. Consideriamo il valore di aspettazione $\langle W(C_1) W(C_2) \rangle$, dove C_1 e C_2 sono questi due *link*. L'invarianza per diffeomorfismi[9] della teoria permette di allontanarli indefinitamente. A questo punto è possibile far

[9] L'invarianza per diffeomorfismi che ci aspettiamo a livello non perturbativo da considerazioni generali sulla teoria BF, in realtà può essere parzialmente rotta in teoria delle perturbazioni. Come si è già discusso questo è effettivamente il caso quando si scelgono i *gauge* assiali. Si noti inoltre che la forma dei propagatori, in tal caso, non garantisce neanche la proprietà di *cluster*. Usando invece il *gauge* covariante si ha sia l'invarianza per diffeomorfismi (fatto salvo il cambiamento di *framing*) sia la proprietà di *cluster* e quindi l'argomento è perfettamente valido.

uso della proprietà di *cluster* della teoria di campo e dimostrare che tale valore di aspettazione è uguale a $\langle W(C_1)\rangle \langle W(C_2)\rangle$. Ripetendo iterativamente questo argomento arriviamo alla (2.46), e quindi alla (A.19), anche nell'ambito della teoria BF. Un argomento simile permette di dimostrare anche la proprietà della somma connessa di nodi, una volta che si è notato che

$$\gamma_n(C_1 \# C_2) = \sum_{p+q=n} \gamma_p(C_1)\gamma_q(C_2), \tag{4.84}$$

e che quindi

$$\Gamma(C_1 \# C_2) = \Gamma(C_1)\Gamma(C_2), \tag{4.85}$$

che è esattamente la stessa proprietà cui soddisfa l'olonomia. Poiché C_1 e C_2 sono in realtà curve aperte, occorrono due segmenti curvilinei per chiuderle. Tali segmenti possono anche essere uniti a dare il nodo snodato. Concludiamo quindi che

$$\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C_1 \# C_2)\rangle \langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\bigcirc)\rangle = \langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C_1)\rangle \langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C_2)\rangle \tag{4.86}$$

Generalizzando questo argomento alla somma connessa di due *link* L_1 e L_2, giungiamo quindi a dimostrare che anche nella teoria BF vale la (2.48) e quindi la (A.18).

Deformare il nodo

Questa sezione è la più importante e delicata. Vi affronto l'introduzione del *framing* e l'invarianza per diffeomorfismi; ottengo inoltre esplicitamente la relazione di matassa (A.14). Farò uso dell'approccio variazionale, discusso nella Sez. 4.1.2 (per l'approccio variazionale nel caso della teoria di Chern–Simons si vedano le Reff. [30][19]; nel caso della teoria BF pura, che discuterò più avanti, l'approccio variazionale è stato introdotto nella Ref. [25]), e quindi non ci si può aspettare che tali risultati siano validi anche nei *gauge* assiali.

L'introduzione del framing Gli sviluppi perturbativi che considereremo più avanti richiedono l'introduzione del *framing*. A differenza che nella teoria di Chern–Simons, il *framing* può essere introdotto direttamente nelle osservabili pensando di integrare il campo B sul nodo C ed il campo A su un suo compagno C_f (naturalmente è possibile anche pensare che C_f sia il nodo e C il suo *framing*). Poiché la parte quadratica $B \wedge dA$ dell'azione

(3.16) accoppia il campo A solo al campo B e viceversa, questa prescrizione è sufficiente per rimuovere le singolarità dagli integrali che compaiono nello svilluppo perturbativo. Tuttavia, come abbiamo già osservato, le osservabili (4.44) sono invarianti solo quando $C = C_f$. L'introduzione del *framing* rompe quindi esplicitamente l'invarianza BRST delle osservabili e può quindi distruggere l'invarianza per diffeomorfismi della teoria. Dobbiamo quindi studiare esplicitamente l'effetto di deformazioni del nodo e del *framing*. Usando la definizione (4.44) delle osservabili γ_n, è possibile determinare l'effetto di una deformazione infinitesima del nodo C o del suo compagno C_f:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\gamma_n}{\delta C^\mu(x)} &= -\dot{C}^\nu(x)[\textstyle\sum_{p+q=n-1}\gamma_p(C^x)(d_AB)_{\mu\nu}(x)\gamma_q(C_x)+ \\ &\quad +\textstyle\sum_{p+q=n-2}\gamma_p(C^x)(B\wedge B)_{\mu\nu}(x)\gamma_q(C_x)], \end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\frac{\delta\gamma_n}{\delta C_f^\mu(x)} = -\dot{C}_f^\nu(x)\sum_{p+q=n}\gamma_p(C^x)F_{\mu\nu}(x)\gamma_q(C_x), \tag{4.88}$$

dove con $\gamma_p(C^x)$ e $\gamma_q(C_x)$ s'intendono le osservabili γ di ordine p e q dipendenti da C e C_f e troncate al punto x. Se indichiamo con Σ l'area della superficie generata da δC e $\dot{C}$ (che supporremo uguale all'area della superficie generata da δC_f e $\dot{C}_f$), si vede che una deformazione rispetto ai cammini, a meno di singolarità, si annulla all'annullarsi di quest'area. Usando la (4.30) e la (4.31), è possibile esprimere queste variazioni in termini di derivate funzionali rispetto ai campi; ciò significa che le singolarità che possono dare contributo non nullo al tendere a zero di Σ derivano da quelle deformazioni di C che intersecano C_f e viceversa, cioè quelle deformazioni che cambiano la classe di omotopia del *framing*.

Considereremo inizialmente deformazioni che non hanno questo genere di singolarità. Si noti tuttavia che per ricostruire i termini $F + \kappa^2 B^2$ e d_AB, necessari per usare le (4.30) e (4.31), bisogna necessariamente deformare il nodo assieme al suo *framing* in maniera identica. Se infatti si introduce

$$\delta = \delta_C + \delta_{C_f}, \tag{4.89}$$

allora dalle (4.87) e (4.88) si deduce che

$$\delta\mathrm{Tr}_R\gamma_n = \mathrm{Tr}_R(\gamma_n F) + \mathrm{Tr}_R(\gamma_{n-1}d_AB) + \mathrm{Tr}_R(\gamma_{n-2}B\wedge B), \tag{4.90}$$

e quindi

$$\delta\mathrm{Tr}_R\Gamma = \mathrm{Tr}_R[(F + \kappa^2 B\wedge B + \kappa d_AB)\Gamma]. \tag{4.91}$$

Poiché $Q\Gamma = -[\Gamma, c] - \kappa[\Gamma, q]$, allora la (4.33,4.34) con $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \Gamma$ è soddisfatta. Quindi non vi sono contributi da parte dei *ghost* ed è possibile far uso del calcolo variazionale. Tale calcolo può essere applicato anche alle osservabili Γ_0 e Γ_1 definite nelle (4.51) e (4.52). Infatti dalla (4.90) si ricava che

$$\delta \mathrm{Tr}_R \Gamma_0 = \mathrm{Tr}_R[(F + \kappa^2 B \wedge B)\Gamma_0 + \kappa d_A B \Gamma_1], \tag{4.92}$$

$$\delta \mathrm{Tr}_R \Gamma_1 = \mathrm{Tr}_R[(F + \kappa^2 B \wedge B)\Gamma_1 + \kappa d_A B \Gamma_0]. \tag{4.93}$$

Poiché inoltre

$$Q\Gamma_0 = -[\Gamma_0, c] - \kappa[\Gamma_1, q], \tag{4.94}$$

$$Q\Gamma_1 = -[\Gamma_1, c] - \kappa[\Gamma_0, q], \tag{4.95}$$

le (4.33) e (4.34) sono soddisfatte con $\mathcal{O}_i = \Gamma_i$.

La contorsione Consideriamo ora l'effetto di una deformazione singolare come quella in fig. 5, dove pensiamo di deformare C e C_f in maniera identica. Usando le stesse considerazioni della Sez. 2.7 e la stessa normalizzazione (2.116), è facile dimostrare che

$$\delta \left\langle \mathrm{Tr}_R \gamma_n \right\rangle = -4\pi i c_2(R) \left\langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{n-1} \right\rangle ,$$

e che quindi

$$\delta \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma \right\rangle = -4\pi i \kappa c_2(R) \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma \right\rangle ,$$

dove $c_2(R)$ rappresenta il Casimir quadratico della rappresentazione R (non è qui necessario restringersi alla rappresentazione fondamentale di $SU(N)$). Per studiare una deformazione finita è necessario ricorrere alla formula di Stokes non abeliana [7]. Si procede quindi sostituendo i termini $d_A B$ e $F + \kappa^2 B \wedge B$ con derivate funzionali, v. (4.30) e (4.31). Applicando tali derivate sul nodo stesso, e tenendo conto dei vincoli imposti dall'ordinamento, si verifica che alla variazione δ^n è associato un termine

$$R^{a_1} \cdot R^{a_1} \cdots R^{a_n} \cdot R^{a_n} = c_2(R)^n \mathbf{1}.$$

Si può quindi dimostrare che (cfr. la (A.24))

$$\left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_+) \right\rangle = \alpha \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_0) \right\rangle , \tag{4.96}$$

$$\left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_-) \right\rangle = \frac{1}{\alpha} \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_0) \right\rangle , \tag{4.97}$$

con α dato dalla (4.72) e $\hat{C}_+$, $\hat{C}_-$ e $\hat{C}_0$ mostrati in fig. 1.

La relazione di matassa Consideriamo ora la differenza tra il nodo C_+ ed il nodo singolare $C_\times$, v. fig. 6. Anche in questo caso pensiamo di deformare il nodo C ed il suo compagno C_f in maniera identica. Pensiamo inoltre che la deformazione sia tale che la superficie generata da δC e $\dot{C}$ non abbia componenti ortogonali alla tangente al nodo nel punto in cui si effettua tale variazione, in modo da liberarci di contributi di contorsione. Ripetendo quindi l'analisi della Sez. 2.7, e facendo uso delle (4.87), (4.88), (4.30) e (4.31), e supponendo di essere nella rappresentazione fondamentale di $SU(N)$, dove vale la (2.121), possiamo dimostrare che

$$\delta \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_\times) \right\rangle = -2\pi i\kappa \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_0) \right\rangle + \frac{2\pi i\kappa}{N} \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_\times) \right\rangle .$$

Usando la formula di Stokes non abeliana [7], è possibile anche in questo caso calcolare l'effetto di una variazione finita. Se si tiene conto dei vincoli imposti dall'ordinamento, ci si rende conto che ad una variazione δ^n è associato un termine

$$S^{(n)}_{ij,kl} := (R^{a_1} \cdots R^{a_n})_{ij} (R^{a_1} \cdots R^{a_n})_{kl}. \tag{4.98}$$

Se si usa ripetutamente la (2.121), esso si può scrivere esplicitamente come

$$S^{(n)}_{ij,kl} = A_n \delta_{il}\delta_{kj} + B_n \delta_{ij}\delta_{kl}, \tag{4.99}$$

dove

$$A_n = \frac{\left(\frac{N-1}{2N}\right)^n - (-1)^n \left(\frac{N+1}{2N}\right)^n}{2}, \tag{4.100}$$

$$B_n = \frac{\left(\frac{N-1}{2N}\right)^n + (-1)^n \left(\frac{N+1}{2N}\right)^n}{2}. \tag{4.101}$$

Da ciò si ricava che

$$\left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_\pm) \right\rangle = A^\pm \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_0) \right\rangle + B^\pm \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_\times) \right\rangle , \tag{4.102}$$

con

$$\begin{array}{rcl} A^\pm = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\mp 4\pi i\kappa)^n}{n!} A_n & = & \frac{\exp(\mp 2\pi i\kappa(N-1)/N) - \exp(\pm 2\pi i\kappa(N+1)/N)}{2}, \\ B^\pm = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\mp 4\pi i\kappa)^n}{n!} B_n & = & \frac{\exp(\mp 2\pi i\kappa(N-1)/N) + \exp(\pm 2\pi i\kappa(N+1)/N)}{2}; \end{array} \tag{4.103}$$

ne segue la relazione di matassa (A.23)

$$\beta \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_+) \right\rangle - \beta^{-1} \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_-) \right\rangle = z \left\langle \mathrm{Tr}_{R_f} \Gamma(C_0) \right\rangle , \tag{4.104}$$

con

$$\beta^2 = \frac{B^-}{B^+} = \exp(-4\pi i \kappa / N), \tag{4.105}$$

e $z = \beta A^+ - \beta^{-1} A^-$ dato dalla (4.74). È quindi possibile definire un polinomio tipo Jones, usando la (4.71), con $t = \alpha\beta$ data dalla (4.73).

4.3.3 I gauge assiali

Voglio qui discutere lo sviluppo perturbativo della teoria BF con termine cosmologico nei *gauge* assiali [23]. Come nel caso della teoria di Chern–Simons, tale sviluppo risulta particolarmente semplice dato che i termini di vertice scompaiono. Nel caso della teoria BF è inoltre molto semplice tener conto del *framing*, v. Sez. precedente. Tuttavia, come già discusso più volte, i *gauge* assiali sono singolari e non garantiscono l'invarianza per deformazioni del nodo nel piano perpendicolare[10] alla direzione scelta per fissare il *gauge*. Verrà mostrato nel seguito esplicitamente come tener conto di tale problema.

Il gauge di cono di luce (forma complessa)

Consideriamo la 3-varietà $M = \Sigma \times \mathbf{R}$. Siano x^1 e x^2 le coordinate di Σ e x^0 la direzione di trasferimento. Se si pensa convenzionalmente a x^2 come al "tempo", allora è possibile effettuare una rotazione di Wick $x^2 \to i x^2$. Ciò equivale a complessificare la superficie Σ introducendo la coordinata

$$z = x^1 + i x^2$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \partial &= \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \\ \alpha(t,z) &= A_1(x) - iA_2(x), \\ \beta(t,z) &= B_1(x) - iB_2(x), \end{aligned}$$

[10] Negli altri piani si ha $F + \kappa^2 B^2 = dA$ e $d_A B = dB$, e quindi non è necessario far uso dei termini di vertici e della relazione (4.27) che, nei *gauge* assiali, non è soddisfatta.

dove, per comodità, si usa $t = x^0$. Il *gauge* di cono di luce viene quindi fissato imponendo

$$\bar{\alpha}(t,z) = \bar{\beta}(t,z) = 0.$$

Se ora scegliamo $\Sigma = \mathbf{C}$, è facile mostrare, cfr. [37], che

$$l(t,z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\delta(t)\, dz \wedge dt, \tag{4.106}$$

$$v = 0, \tag{4.107}$$

con l e v definiti dalle (4.22), (4.23) e (4.24). La distribuzione $\delta(t)$ nella (4.106) implica che ci sono interazioni solo tra un campo A ed un campo B che vivono sulla stessa superficie Σ. Si noti che, per evitare divergenze, è sufficiente richiedere che C e C_f non abbiano intersezioni. Se indichiamo con P tutti i modi possibili di effettuare le contrazioni, lo sviluppo perturbativo consisterà in una serie di diagrammi di Feynman D_P. A ciascuno di essi corrisponderà un fattore gruppale $W_R(D_P)$, dove W_R è la mappa[11] associata al gruppo G nella rappresentazione R, che ad ogni diagramma D_P assegna un numero nel campo $\mathbf{F}$ su cui G è definito. Possiamo quindi scrivere

$$\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C, C_f) \rangle = W_R(Z_\epsilon(C)), \tag{4.108}$$

dove ϵ indica la distanza massima tra due punti su C e C_f allo stesso istante t, e Z_ϵ è a valori nello spazio dei diagrammi. Nella Ref. [2], si mostra che è possibile rimuovere il *framing* definendo

$$Z(C) = \lim_{\epsilon \to 0^+} e^{-2\kappa(n^+ - n^-)\Theta} Z_\epsilon(C), \tag{4.109}$$

dove $n^\pm$ sono il numero di punti critici (massimi e minimi) della funzione di Morse t sul nodo C, mentre Θ indica l'inserzione di una corda isolata. La "funzione di partizione" $Z(C)$, che non contiene più diagrammi con corde isolate, può essere espansa in termini dei cosiddetti *integrali di Kontsevich* [50][11]:

$$Z(C) = \sum_{m=0}^{\infty} (-2\kappa)^m \int_{t_{\min} < t_1 < \cdots < t_m < t_{\max}} \sum_{P = \{(z_i, z_i')\}} (-1)^{\#P_\downarrow} D_P \bigwedge_{i=1}^{m} \frac{dz_i - dz_i'}{z_i - z_i'}, \tag{4.110}$$

dove

[11] Nella Ref. [11], si mostra che una tale mappa ristretta allo spazio dei diagrammi senza corde isolate è quello che nella teoria degli invarianti di Vassiliev [71] è chiamato un *sistema di pesi*.

1. $t_{\min}$ e $t_{\max}$ rappresentano il valore minimo e massimo di t su K
2. Le coppie (z_i, t_i) e (z_i', t_i) sono costituite da punti distinti su K
3. $\#P_\downarrow$ è il numero di punti (z_i, t_i) o (z_i', t_i) in cui t è una funzione decrescente di K.

Nella Ref. [11], si mostra che tali integrali sono finiti e invarianti sotto tutte le deformazioni del nodo C tranne quella mostrata in fig. 7. Ciò è l'effetto della già ricordata non completa invarianza per diffeomorfismi nel caso di *gauge* singolari e corrisponde ad un cambiamento singolare della funzione di Morse. Tale non invarianza tuttavia è rimossa facilmente [11] scegliendo la seguente normalizzazione

$$\hat{Z}(C) = \frac{Z(C)}{Z(\infty)^{\frac{c}{2}-1}}, \tag{4.111}$$

dove c è il numero di punti critici e ∞ indica il nodo snodato presentato come in fig. 8.

Il gauge assiale (forma reale)

Consideriamo una varietà $M = \Sigma \times \mathbf{R}$, ed indichiamo con x^1 e x^2 le coordinate di Σ e con x^0 la coordinata su $\mathbf{R}$. Se fissiamo il *gauge* con le condizioni

$$A_0(x) = B_0(x) = 0, \tag{4.112}$$

allora, nel caso semplice in cui $\Sigma = \mathbf{R}^2$, si ha

$$l(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\, dx^1 \wedge dx^2, \tag{4.113}$$

$$v(x) = 0, \tag{4.114}$$

con l e v definiti nelle (4.22), (4.23) e (4.24). Le forma della (4.113) ci dice che dobbiamo proiettare il nodo sulla superficie Σ e considerare interazioni localizzate negli incroci. Inoltre è facile vedere che la (4.113) è invariante per rotazioni in Σ. Ciò significa che a ciascuna contrazione corrisponderà un termine che dipende esclusivamente dal tipo di incrocio. Se indichichiamo con $C_\pm$ gli incroci di fig. 4, e poniamo $\epsilon(C_\pm) = \pm 1$, allora ad ogni incrocio tra C e C_f corrisponderà un fattore $-2\pi i\epsilon$. Nel valore di aspettazione $\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma \rangle$

ogni vertice potrà comparire un numero arbitrario di volte. A parte i fattori gruppali, è evidente che ad un vertice che compare n volte sarà associato un fattore $(-2\pi i\kappa\epsilon)^n/n!$. Consideriamo ora una situazione come quella in fig. 9. In questo caso è facile tener conto dei fattori gruppali; infatti ogni campo B si accoppia ad un campo A contiguo (nel senso dell'ordinamento) dando quindi un termine $R^a R^a = c_2(R)\mathbf{1}$ (risultato valido per qualsiasi rappresentazione). Si noti che i due incroci sono dello stesso tipo; quindi li indicheremo entrambi con ϵ. Il contributo complessivo, all'ordine n, di tale configurazione è dato da

$$\sum_{i+j=n} \frac{(-2\pi i\kappa\epsilon)^i}{i!}\frac{(-2\pi i\kappa\epsilon)^j}{j!} c_2(R)^i c_2(R)^j \mathbf{1} = \frac{(-4\pi i\kappa\epsilon c_2(R))^n}{n!}\mathbf{1};$$

se ora sommiamo su n troviamo che è possibile effettuare un cambiamento di *framing* moltiplicando il valore di aspettazione $\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma \rangle$ per α^ϵ, con α dato dalla (4.72) (ciò è in accordo con la (2.54) nella teoria di Chern–Simons). Nel caso della fig. 10, invece, i due incroci sono di tipo opposto e quindi complessivamente non danno alcun contributo.

Consideriamo ora il caso più complicato della fig. 6. Si noti che ambo le bande sono orientate nello stesso modo: cioè col *framing* a destra del nodo (dato il verso del nodo e la nozione aggiuntiva di alto e basso, data dalla coordinata x^0, è possibile definire la destra e la sinistra). In tal caso, denotando con ϵ il tipo di incrocio, è facile verificare che si ha

$$\sum_{i+j=n} \frac{(-2\pi i\kappa\epsilon)^i}{i!}\frac{(-2\pi i\kappa\epsilon)^j}{j!} S^{(i)} \cdot S^{(j)} = \frac{(-4\pi i\kappa\epsilon)^n}{n!} S^{(n)},$$

dove la matrice S è definita in (4.98) e si è fatto uso della proprietà

$$\sum_{kl} S^{(i)}_{ak,cl} S^{(j)}_{kb,ld} = S^{(i+j)}_{ab,cd}.$$

Se considerassimo il caso di bande orientate in modo opposto non otterremo un risultato così semplice. Per le considerazioni generali già esposte, non ci si deve stupire della non invarianza della teoria perturbativa in un *gauge* singolare sotto alcune mosse.

Nel seguito supporremo sempre di aver scelto un *framing* tale che le bande siano sempre orientate col nodo a sinistra ed il *framing* a destra (*"convenzione della lavagna"*), v. fig. 6. A questo punto possiamo disegnare il nodo senza

più preoccuparci del *framing*. Il risultato precedente ci dice che ad ogni incrocio, contato n volte, dovremo assegnare un termine

$$\frac{(-4\pi i\kappa\epsilon)^n}{n!}S^{(n)} \tag{4.115}$$

dove $\epsilon(C_\pm) = \pm 1$. Si noti che ora possiamo anche considerare l'incrocio singolare $\times$, v. fig. 4, ed assegnargli $\epsilon(C_\times) = 0$. Se il nodo, nella proiezione scelta, ha V vertici, lo sviluppo perturbativo consisterà in una somma pesata di diagrammi di Feynman che indicheremo con $D_{i_1,\ldots,i_V}$, in cui il primo vertice compare i_1 volte, il secondo i_2 volte, e così via fino all'ultimo che verrà preso i_V volte. La traccia del prodotto delle matrici S assocerà quindi ad ogni diagramma di Feynman un numero $W_R(D_{i_1,\ldots,i_V})$. Anche in questo caso W è un *sistema di pesi*, nel senso datogli nella teoria degli invarianti di Vassiliev. Potremo quindi scrivere

$$\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C)\rangle = W_R(Z(C)), \tag{4.116}$$

dove

$$Z(C) = \sum_{n=0}^{\infty}(-4\pi i\kappa)^n \sum_{i_1+\cdots+i_V=n} \frac{1}{i_1!\cdots i_V!}\, D_{i_1,\ldots,i_V}\, \epsilon_{i_1}\cdots\epsilon_{i_V}\,. \tag{4.117}$$

Si noti che in questo formalismo, che sarà discusso più approfonditamente nella Ref. [23], gli invarianti di Vassiliev, cioè i coefficienti di κ^n nello sviluppo di Z, sono dati da somme finite di forme omogenee di grado n nelle variabili d'incrocio ϵ. Questa formulazione chiaramente è molto più semplice di quella che usa gli integrali di Kontsevich. Tuttavia, per le considerazioni generali, non possiamo aspettarci che $Z(C)$ così definita dia un vero invariante. Vi saranno infatti alcune mosse proibite e sarà quindi necessario trovare una normalizzazione opportuna per avere un vero invariante.

A mo' d'esempio voglio considerare il caso in cui si scelga la rappresentazione fondamentale di $SU(N)$. Usando la (4.99), è facile mostrare che anche in questo *gauge* vale la formula generale (4.102). Tuttavia ci si rende subito conto che le cose non possono funzionare bene, poiché

$$\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\bigcirc)\rangle = N, \tag{4.118}$$

anziché essere uguale a $(t - t^{-1})/z$ (con t e z dati dalle (4.73) e (4.74)) come ci si dovrebbe aspettare se, oltre alla relazione di matassa, valesse anche

la (4.96,4.97). Inoltre bisogna notare che, in questo *gauge*, considerare un incrocio singolare $\times$ equivale a rimuovere quell'incrocio, cosicché si ha

$$\left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_\times) \right\rangle = \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_0) \right\rangle, \tag{4.119}$$

$$\left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C_{)(}) \right\rangle = \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C_{)(}) \right\rangle, \tag{4.120}$$

dove $\hat{C}_\times$, $C_{)(}$ e $C_{)(}$ sono mostrati in fig. 11. Se si fa uso delle (4.102), (4.118) e (4.119), si può mostrare che le (4.96) e (4.97) diventano in questo *gauge*

$$\left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_+) \right\rangle = \alpha^+ \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_0) \right\rangle, \tag{4.121}$$

$$\left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_-) \right\rangle = \alpha^- \left\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(\hat{C}_0) \right\rangle, \tag{4.122}$$

con

$$\alpha^\pm = (A^\pm N + B^\pm); \tag{4.123}$$

si noti che $\alpha^+ \alpha^- \neq 1$. Inoltre, usando le (4.102), (4.118), (4.119) e (4.120), si può verificare che la teoria non è invariante[12] sotto le mosse mostrate in fig. 12.

Per ottenere un vero invariante da $Z(C)$ bisogna quindi trovare una normalizzazione tale che il nuovo oggetto sia invariante anche sotto le mosse della fig. 12. Si noti tuttavia che le mosse proibite non si presentano se usiamo la *rappresentazione di treccia* nella quale tutte le frecce sono orientate nello stesso senso (per esempio verso l'alto). In tale rappresentazione è dunque necessario tener conto solo delle (4.121) e (4.122). Una normalizzazione moltiplicativa, come nel caso degli integrali di Kontsevich, rende quindi la (4.117) un vero invariante.

4.3.4 Il gauge covariante

Considererò in questa sezione il calcolo perturbativo della teoria BF nel *gauge* covariante. Se scegliamo $M = \mathbf{R}^3$, esso si scrive

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu B^\mu = 0, \tag{4.124}$$

[12] Se si lavora nella rappresentazione fondamentale, valgono le relazioni della fig. 13, che sono invarianti per $\kappa \to \kappa + 1$. Se si tiene conto della (4.123) con $c_2(R_f) = (N^2-1)/2N$, l'invarianza è ridotta nuovamente a $\kappa \to \kappa + N$. Quindi la rottura della supersimmetria, responsabile della non completa invarianza per diffeomorfismi, non è sufficiente a distruggere quest'ultima simmetria quantistica.

ed implica che le contrazioni l e v definite nelle (4.22), (4.23) e (4.24) sono date dalle (2.98) e (2.99). Si noti che in questo *gauge* l'invarianza per diffeomorfismi non è rotta ed è possibile verificare che vale la (4.27). Il calcolo perturbativo consiste nell'espandere

$$\langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C) \rangle = \dim R \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n \widetilde{V}_n(C,R), \tag{4.125}$$

dove (si noti che $\widetilde{V}_n = 2^n V_n$, se V_n è il coefficiente dell'espansione (2.86) della teoria di Chern–Simons)

$$\widetilde{V}_{2n} = \frac{1}{\dim R} \sum_{i=0}^{n} \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2i}(C) \rangle_{n-i}\,, \tag{4.126}$$

$$\widetilde{V}_{2n+1} = \frac{1}{\dim R} \sum_{i=0}^{n} \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2i+1}(C) \rangle_{n-i}\,. \tag{4.127}$$

Con la notazione $\langle \cdot \rangle_i$ si intende il calcolo del valore di aspettazione con esattamente i inserzioni BBB. Si noti che queste somme parziali sono sufficienti a garantire l'invarianza per diffeomorfismi. Infatti per le (4.87) e (4.88) una variazione $\delta = \delta_C + \delta_{C_f}$ produce

$$\begin{aligned} \delta\widetilde{V}_{2n} &= \tfrac{1}{\dim R} \textstyle\sum_{i=0}^{n} \langle \mathrm{Tr}_R(\gamma_{2i-1}F + \gamma_{2i-1} d_A B + \gamma_{2i-2} BB) \rangle_{n-i} = \\ &= \tfrac{1}{\dim R} [\quad \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} (\langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2i} F \rangle_{n-i} + \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2i} BB \rangle_{n-i-1} + \\ &\qquad + \textstyle\sum_{i=0}^{n} \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2i-2} d_A B \rangle_{n-i} + \\ &\qquad + \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2n} F \rangle_0] = 0, \end{aligned}$$

poiché, per la (4.27), $\langle A^2(F + \kappa^2 B^2) \rangle = \langle AB d_A B \rangle = \langle B^2 F \rangle = 0$. Un argomento analogo dimostra che $\delta\widetilde{V}_{2n+1} = 0$. Si noti tuttavia che non si ha invarianza per deformazioni del solo nodo o del solo *framing*.

Il calcolo esplicito di $\widetilde{V}_n$ porta agli stessi risultati della teoria perturbativa di Chern–Simons. Vediamo tuttavia come sono ordinati i contributi nella teoria BF. Prendiamo in considerazione l'invariante $\widetilde{V}_{2n}$ (l'invariante $\widetilde{V}_{2n+1}$ si tratta in maniera analoga). Il termine $\langle \mathrm{Tr}_R \gamma_0 \rangle_n$ della somma in (4.126) contiene solo campi A e quindi produce n contrazioni di vertice; nel termine successivo sono presenti anche due campi B e quindi potremo avere o n contrazioni di vertice o $n-1$ contrazioni di vertice e due contrazioni di coppia. In ogni nuovo termine potranno comparire due nuove contrazioni di coppia a discapito di una contrazione di vertice. Solo nel termine di grado

più alto si potrà finalmente avere anche la configurazione con n contrazioni di coppia e nessuna di vertice. Ricapitolando

$$\begin{aligned}
\text{in } \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2n} \rangle_0 \quad &\text{ho i termini:} \quad l^n, l^{n-2}v, \ldots, l^2 v^{n-1}, v^n \\
\text{in } \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_{2n-2} \rangle_1 \quad &\text{ho i termini:} \quad l^{n-2}v, \ldots, l^2 v^{n-1}, v^n \\
&\vdots \\
\text{in } \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_0 \rangle_n \quad &\text{ho i termini:} \quad v^n
\end{aligned}$$

Se partiamo dal termine l^n, l'unico che compare nei *gauge* assiali, possiamo capire la genesi degli altri. Quando due campi vanno a coincidere si crea una singolarità (si noti che a causa dell'ordinamento lungo il nodo non si possono scambiare due campi), che viene compensata da una contrazione di vertice. Le "interazioni" si leggono nel seguente schema:

$$\begin{aligned}
AA &\rightarrow A, \\
AB &\rightarrow B, \\
BB &\rightarrow A;
\end{aligned}$$

l'ultimo termine (che sarà assente nella teoria BF pura dove i campi B "commutano") fa scendere di un ordine nella somma (4.126).

4.4 La teoria BF pura ed i polinomi di Alexander–Conway

La teoria BF pura con osservabili è stata studiata per la prima volta nella Ref. [25]. La novità di questa teoria, rispetto a quella con termine cosmologico, sta nel fatto che qui è possibile considerare valori di aspettazione di generiche osservabili composte costruite a partire dalle osservabili semplici definite nelle (4.39) e (4.40). Tali valori di aspettazione produrranno direttamente degli invarianti di tipo finito, anziché delle funzioni della costante di accoppiamento κ. Non ci si aspettano inoltre problemi quando si lavori con *gauge* di tipo assiale: infatti il passaggio a questi *gauge* non rompe l'invarianza delle osservabili come avveniva nel caso con termine cosmologico. Queste caratteristiche fanno della teoria BF pura il candidato principale per le generalizzazioni in dimensione più alta.

4.4.1 Le osservabili per un nodo

Consideriamo il caso di un singolo nodo C. Le osservabili composte dipenderanno quindi da $\gamma_0(C)$ e $\gamma_1(C)$. Tuttavia è opportuno introdurre un *framing* C_f e considerare quindi $\gamma_0(C_f)$ e $\gamma_1(C, C_f)$ (dove s'intende che il campo B dev'essere integrato su C ed il campo A su C_f). A questo punto si può notare che l'inserzione di un termine $\gamma_0(C_f)$ è irrilevante a meno di termini che danno il numero di concatenazioni. Si noti infatti che i campi B sono integrati su C senza ordinamento; quindi, se ci limitiamo a considerare solo contrazioni AB senza termini di vertice, allora un generico termine del tipo

$$\oint_{y_1,\ldots,y_n \in C} \oint_{x_1 < \cdots < x_n \in C_f} f(y_1, \ldots, y_n) l(x_1, y_1) \cdots l(x_n, y_n),$$

(dove f è una funzione simmetrica nelle variabili y_i ottenuta sommando su tutti i grafici che hanno in comune le contrazioni $B_1 A_1, \ldots, B_n A_n$) potrà essere riscritto, usando la simmetria sulle y_i, come

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n!} \oint_{y_1,\ldots,dy_n \in C} \oint_{x_1 < \cdots < x_n \in C_f} \sum_{P(i_1,\ldots,i_n)} l(x_{i_1}, y_1) \cdots l(x_{i_n}, y_n) = \\ &= \tfrac{1}{n!} \oint_{y_1,\ldots,dy_n \in C} \oint_{x_1,\ldots,x_n \in C_f} l(x_1, y_1) \cdots l(x_n, y_n) = \tfrac{1}{n!} \Phi(C, C_f)^n, \end{aligned}$$

dove $P(i_1, \ldots, i_n)$ indica le permutazioni di $i_1, \ldots, i_n$. Se abbiamo una contrazione di vertice, del tipo $v(y_1, y_2, x_1)$, essa si annullerà in virtù della simmetria sulle y e dell'antisimmetria (2.102) di v. Se ci mettiamo quindi nella situazione in cui $\Phi(C, C_f) = 0$, allora sarà del tutto equivalente considerare le osservabili

$$\gamma_n(C, C_f) := \gamma_1(C, C_f)^n, \tag{4.128}$$

come nella Ref. [25] (dove si lavorava sempre nell'ipotesi di *framing canonico*), ovvero le osservabili

$$\gamma_n(C, C_f) = \gamma_0(C_f) G(C, C_f)^n = \tilde{G}(C, C_f)^n \gamma_0(C_f) \tag{4.129}$$

con

$$G(C, C_f) = \gamma_0(C_f)^{-1} \gamma_1(C, C_f), \tag{4.130}$$

$$\tilde{G}(C, C_f) = \gamma_1(C, C_f) \gamma_0(C_f)^{-1}. \tag{4.131}$$

Le osservabili γ_n nella forma data dalla (4.129) sono molto simili, a meno dell'ordinamento lungo il cammino, a quelle usate nella teoria con termine

cosmologico, v. (4.45). Riteniamo quindi che sia più corretto usare questa definizione delle osservabili se vogliamo lavorare in una situazione più generale dove non s'impone $\Phi(C;C_f)=0$. Si noti che è possibile scrivere

$$\gamma_n(C,C_f)=\int_{x_1,\ldots,x_n\in C} H^{x_1}B(x_1)H^{x_2}_{x_1}\cdots H^{x_n}_{x_{n-1}}B(x_n)H_{x_n}\,, \tag{4.132}$$

dove $H^y_x:=H(T^y_xC_f)$ se x precede y, e $H^y_x:=H(T^x_yC_f)^{-1}$ altrimenti. La forte somiglianza formale della (4.132) con la (4.44) non deve far dimenticare che le osservabili γ_n nella teoria con termine cosmologico non sono invarianti e devono quindi essere sommate a fornire la vera osservabile Γ della (4.47), mentre le osservabili γ_n della teoria pura sono già di per sé invarianti e quindi ha senso considerare, per ogni scelta di *gauge*, i valori di aspettazione

$$V_n(C;R)=\frac{1}{\dim R}\left\langle \mathrm{Tr}_R\gamma_n(C,C_f)\right\rangle . \tag{4.133}$$

che danno invarianti di tipo finito. È tuttavia utile considerare una funzione generatrice di questi invarianti sul modello della (4.47), e definire quindi

$$\Gamma(C,C_f;\kappa):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\kappa^n}{n!}\gamma_n(C,C_f), \tag{4.134}$$

dove κ è un parametro arbitrario. Si noti che la finitezza della teoria BF implica che i valori di aspettazione (4.133) sono finiti e che quindi non è necessario rinormalizzare il parametro[13] κ. Possiamo quindi considerare, come nella Ref. [25], l'invariante

$$\langle C\rangle_R(\kappa):=\frac{\langle \mathrm{Tr}_R\Gamma(C;\kappa)\rangle}{\langle \mathrm{Tr}_R\Gamma(\bigcirc;\kappa)\rangle}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n w_n(C,R)}{\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n w_n(\bigcirc,R)}, \tag{4.135}$$

dove per semplicità ho omesso di indicare C_f e

$$w_n(C,R):=\frac{1}{n!}\left\langle \mathrm{Tr}_R\gamma_n(C)\right\rangle . \tag{4.136}$$

La normalizzazione nella (4.135) è scelta in modo tale che $\langle\bigcirc\rangle=1$. Tale invariante è la versione tridimensionale di quello proposto nella Ref. [31] per studiare i 2-nodi in una varietà quadridimensionale. Si noti che l'invariante $\langle C\rangle$ condivide le seguenti proprietà con la funzione di partizione $Z_{BF}(C,R;\kappa)$ della teoria con termine cosmologico:

[13] Sottolineo che qui κ è un parametro usato per definire la funzione generatrice Γ e non una costante di accoppiamento come nel caso della teoria con termine cosmologico.

1. Immagine speculare [CT-invarianza] Se $M = S^3$ allora

$$\left\langle C^{!} \right\rangle_R (\kappa) = \langle C \rangle_R (-\kappa), \tag{4.137}$$

che corrisponde alla (4.76) ed alla (A.16).

2. Inversione [P-invarianza] Se $M = S^3$ allora

$$\langle C^{*} \rangle_R (\kappa) = \langle C \rangle_R (\kappa), \tag{4.138}$$

che corrisponde alla (4.78) ed alla (A.17).

3. Analiticità Considerando una generica varietà M, si ha

$$\overline{\langle C \rangle_R (\kappa)} = \langle C \rangle_R (-\bar{\kappa}), \tag{4.139}$$

che corrisponde alla (4.79) ed alla (A.15).

4. Somma connessa Se $M = S^3$ allora

$$\langle C_1 \# C_2 \rangle_R (\kappa) = \langle C_1 \rangle_R (\kappa) \langle C_2 \rangle_R (\kappa) \tag{4.140}$$

che corrisponde alla (4.86) ed alla (A.18).

La dimostrazione delle (4.137), (4.138) e (4.139) è identica a quella usata per le (4.76), (4.78) e (4.79) e non verrà ripetuta. Per quanto riguarda la (4.140), si noti che, usando la (4.84) per $n = 0$ e $n = 1$ e le definizioni (4.130) e (4.131), si mostra facilmente che

$$\gamma_n(C_1 \# C_2) = \gamma_0(C_1)[G(C_1) + \widetilde{G}(C_2)]^n \gamma_0(C_2).$$

Se il primo membro compare all'interno di un valore di aspettazione, possiamo usare l'invarianza per diffeomorfismi e portare C_1 infinitamente distante da C_2. A questo punto non ci saranno più interazioni tra i campi in C_1 e quelli in C_2 (salvo che nel *gauge* assiale, dove bisogna prima districare C_1 da C_2 usando quelle mosse che in presenza di termine cosmologico potevano risultare proibite, ma che qui non dovrebbero causare problemi, e quindi notare che in questa situazione non ci sono più interazioni). Se ora effettuiamo tutte le contrazioni tra i campi che vivono in C_1 avremo come risultato una serie di termini che coinvolgono permutazioni dei termini $\widetilde{G}(C_2)$; ma poiché questi

termini commutano potremo risommarli. Il risultato finale è che, all'interno di un valore di aspettazione,

$$\gamma_n(C_1 \# C_2) \sim \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} \gamma_p(C_1)\gamma_q(C_2),$$

che differisce dalla (4.84) solo a causa dei fattoriali dovuti alla differente normalizzazione delle γ_n. Gli stessi argomenti che portavano alla (4.86) portano ora alla (4.140).

4.4.2 Il calcolo degli invarianti di tipo finito

Considererò in questa sezione il calcolo esplicito degli invarianti (4.133). Come nel caso della teoria BF con termine cosmologico, la finitezza della teoria implica implica che è possibile usare un teorema di Wick generalizzato con contrazioni di coppie AB, a cui sarà associata la (1,1)-forma l definita nella (4.22), e di terne ABB, a cui sarà associata la (1,1,1)-forma v, definita nella (4.23); si noti che, data la mancanza del termine cosmologico BBB, non è invece ammessa la terna AAA. L'osservabile γ_n contiene n campi B, la cui integrazione lungo il cammino C non è ordinata. Se sviluppiamo le olonomie, otteniamo invece un numero arbitrario di campi A le cui integrazioni lungo i cammini che connettono due campi B sono ordinate (e ciò rende la teoria non banale). Le regole di Wick di cui sopra, tuttavia, ci dicono che sopravviveranno solo i diagrammi in cui il numero di campi A è compreso tra m e $2m$ se $n = 2m$ e tra $m+1$ e $2m+1$ se $n = 2m+1$. Nel primo caso avremo una sequenza di diagrammi del tipo

$$v^m, v^{m-1}l^2, \ldots, vl^{2m-2}, l^{2m};$$

nel secondo caso avremo invece la sequenza

$$v^m l, v^{m-1}l^3, \ldots, vl^{2m-1}, l^{2m+1}.$$

Poiché nella teoria BF pura è possibile deformare C e C_f separatamente, ha senso fissare lo *standard framing* $\Phi(C, C_f) = 0$ direttamente nell'osservabile. In tal modo ci liberiamo dei termini che producono il numero di autoconcatenazioni. Nelle sequenze mostrate sopra i termini l^n saranno quindi degli invarianti, a meno delle correzioni necessarie a compensare le singolarità prodotte quando due punti vengono a coincidere. Queste singolarità

corrispondono all'incontro di due campi A o di un campo A con un campo B (poiché i campi B non sono ordinati essi si possono "incontrare e scambiare" liberamente). Queste "interazioni" riducono di un'unità il numero di campi A trasformando un termine l^2 in v. Le sequenze sopra mostrate costituiscono quindi l'invariante completo (nel *gauge* covariante, dove vale la (4.27)). Vi sono tuttavia due differenze importanti tra questa situazione e quella incontrata nel caso della teoria con termine cosmologico:

1. Qui è possibile considerare anche la procedura inversa e partire dal termine v^m producendo via via i termini l ($v \to l^2$). Si noti che i "diagrammi di vertice W^V", ossia quelli che contengono il numero massimo di termini v, contengono un numero complessivo di campi inferiore a quello degli altri diagrammi e quindi lo studio della combinatoria è più semplice. Questa è la strategia seguita nella Ref. [25] nel caso del *gauge* covariante, dove i termini v non si annullano.

2. Nel caso di *gauge* assiali avremo solo il termine l^n (con la stessa struttura combinatoria che ha nel *gauge* covariante). Poiché non ci sono singolarità che comportano la riduzione del numero di campi B, che legherebbero γ_n a γ_{n-i}, ci aspettiamo che da $\langle \mathrm{Tr}_R \gamma_n \rangle$ sia possibile ottenere una quantità invariante sotto tutte le mosse di Reidemeister, eccettuata al più la prima, fig. 1.

I gauge assiali

Nel caso dei *gauge* assiali è presente solo la contrazione AB, cui corrisponde l dato dalla (4.106), nel caso del *gauge* di cono di luce complesso, e dalla (4.113), nel caso del *gauge* assiale nella forma reale. È possibile ripetere passo passo l'analisi effettuata nel caso della teoria con termine cosmologico ed ottenere le stesse formule (4.110) e (4.117). Saranno diversi tuttavia i diagrammi di Feynman D_P o $D_{i_1,\ldots,i_V}$ ed i *sistemi di pesi* W_R, poiché diversa è la combinatoria delle due teorie (si ricordi che nel caso della teoria con termine cosmologico tutti i campi sono ordinati, mentre nel caso della teoria pura solo i campi A lo sono). Da questa teoria, che sarà studiata nella Ref. [23], ci aspettiamo[14] degli invarianti anche sotto le mosse proibite di fig. 12.

[14] È interessante notare che i diagrammi di Feynman associati ai coefficienti del polinomio di Alexander–Conway, o al suo inverso, studiati nella Ref. [12], sono invarianti sotto tali

Il gauge covariante

Lo studio della teoria BF pura nel *gauge* covariante è affrontato nella Ref. [25]. Mi limiterò a citare i principali risultati. Come ricordato in precedenza è possibile ricavare tutti i diagrammi di Feynman di w_n nella (4.136) a partire dal diagramma di vertice:

$$w_n = e^{\mathcal{D}} w_n^V, \tag{4.141}$$

dove w_n^V è un integrale di linea su copie del nodo contenente m termini v e nessun termine l se $n = 2m$ ed un solo termine l se $n = 2m + 1$. L'operatore $\mathcal{D}$ (definito in [25]) agisce sui termini v trasformandoli in termini l^2 e l'esponenziale $\exp \mathcal{D}$ è in realtà la somma finita $\sum_{k=0}^{m} \mathcal{D}^k/k!$. Il termine di vertice w_n^V può essere scritto come una combinazione

$$w_{2n}^V = \sum_{\sum i_k = n} c_{i_1,i_2,i_3,\ldots}(R) w_{2i_1}^{V,\mathrm{conn}} w_{2i_2}^{V,\mathrm{conn}} w_{2i_3}^{V,\mathrm{conn}} \cdots, \tag{4.142}$$

$$w_{2n+1}^V = \sum_{\sum i_k = n} d_{i_1,i_2,i_3,\ldots}(R) w_{2i_1+1}^{V,\mathrm{conn}} w_{2i_2}^{V,\mathrm{conn}} w_{2i_3}^{V,\mathrm{conn}} \cdots, \tag{4.143}$$

dove le costanti $c_{i_1,i_2,i_3,\ldots}(R)$ e $d_{i_1,i_2,i_3,\ldots}(R)$, dipendenti dalla rappresentazione R, possono essere determinate da uno studio esplicito dei diagrammi di Feynman. Gli integrali $w_{2i}^{V,\mathrm{conn}}$ e $w_{2i+1}^{V,\mathrm{conn}}$ non possono essere ulteriormente ridotti e si riferiscono a *diagrammi connessi*. Esplicitamente essi si possono scrivere

$$w_{2n}^{V,\mathrm{conn}}(C) = \int \prod_{i=1}^{n} \Delta\mathbf{s}^i \prod_{i=1}^{n} v_C(s_1^i, s_2^{i-1}, s_3^i), \tag{4.144}$$

$$w_{2n+1}^{V,\mathrm{conn}}(C) = \int_0^1 ds_1^0 \int_0^1 ds_2^0 \int \prod_{i=1}^{n} \Delta\mathbf{s}^i \; l_C(s_1^0, s_2^n) \prod_{i=1}^{n} v_C(s_1^i, s_2^{i-1}, s_3^i), \tag{4.145}$$

dove la misura $\Delta\mathbf{s}$ è definita da

$$\int \Delta\mathbf{s} := \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3, \tag{4.146}$$

mosse. Questa è un'ulteriore conferma che gli invarianti prodotti dalla teoria BF pura sono legati a tale polinomio.

e per convenzione si intende che $s_2^0 \equiv s_2^n$. Le funzioni integrande v_C e l_C sono definite da

$$l_C(s_1, s_2) := \dot{C}^\mu(s_1)\dot{C}_f^\nu(s_2) l_{\mu\nu}(C(s_1), C_f(s_2)), \tag{4.147}$$

$$v_C(s_1, s_2, s_3) := \dot{C}^\mu(s_1)\dot{C}_f^\nu(s_2)\dot{C}^\rho(s_3) \; v_{\mu\nu\rho}(C(s_1), C_f(s_2)C(s_3)), \tag{4.148}$$

dove $C, C_f \colon [0,1] \to \mathbf{R}^3$ sono parametrizzazioni del nodo e del suo *framing*. Il *framing* può essere rimosso senza problemi. Nel caso della (4.145) per ragioni di simmetria, v. la (2.101), l'integrale si annulla. Abbiamo quindi la seguente

Proposizione 2 *Gli invarianti dispari di un nodo generati dalla teoria BF pura su $M = \mathbf{R}^3$ (o $M = S^3$), a meno di termini contenenti il numero di autoconcatenazioni, si annullano:*

$$\langle \mathrm{Tr}\gamma_{2n+1}(C) \rangle = 0. \tag{4.149}$$

L'invariante $\langle C \rangle_R(\kappa)$, definito dalla (4.135), è quindi una funzione pari di κ.

I termini pari sono stati studiati fino al quart'ordine [25]. Al second'ordine si ha:

$$w_2(C, R) = (4\pi)^2 \, c_2(R) c_v \dim R \, \rho(C), \tag{4.150}$$

con $\rho(C)$ dato dalla (2.106). L'integrale che definisce l'invariante di ordine 4 è scritto esplicitamente nella Ref. [25]. Mi limiterò qui a notare che, con un conto diretto, si verifica esplicitamente che che w_4^V è dato dal solo diagramma connesso e che come fattore gruppale compare solo $(c_2(R)c_v)^2$. Questo risultato è il frutto di alcune cancellazioni apparentemente "miracolose". Probabilmente però non si tratta di un "caso fortunato" ma di un risultato generale; avanziamo quindi le seguenti congetture:

Congettura 1 *Gli invarianti di un nodo di ordine $2n$ generati dalla teoria BF pura hanno come unico fattore gruppale $(c_2(R)c_v)^n$.*

Congettura 2 *Tali invarianti*[15] *sono dati dai soli diagrammi connessi.*

[15] Si noti che $e^{\mathcal{D}} w_{2n}^{V,\mathrm{conn}}$ fornisce in ogni caso un invariante, come può essere verificato per induzione usando la (4.142).

La prima congettura stabilisce che la teoria è sostanzialmente indipendente dal gruppo G ed è in linea con l'interpretazione di $\langle C \rangle$ in termini dell'invariante polinomiale di Alexander–Conway. La seconda, se verificata, potrebbe essere un ulteriore effetto della supersimmetria sottostante.

4.4.3 La relazione di matassa (cenni)

Come si è visto nelle Sezz. 2.7 e 4.1.2, il calcolo variazionale fornisce un valido ausilio per l'interpretazione degli invarianti. Con esso è possibile provare relazioni di matassa ed identificare le variabili che in essa compaiono in termini di funzioni della costante di accoppiamento. Nel caso della teoria BF pura tutto è reso più complicato da due circostanze:

1. Nelle osservabili i campi B non sono ordinati. Ciò rende più difficile la ricostruzione delle osservabili stesse una volta che siano state spezzate (per questo problema v. anche lo studio della somma connessa a pag. 86).

2. Se al primo membro della relazione di matassa compaiono i nodi C_+ e C_-, allora al secondo membro comparirà il *link* a due componenti C_0. La definizione dell'osservabile per i *link* non è tuttavia naturale.

Presenterò qui alcuni risultati parziali che potrebbero essere utili nello studio di questo problema (e che generalizzano lo studio effettuato nella Ref. [25]). Si consideri la differenza tra il nodo C_+ ed il nodo singolare $C_\times$. Una deformazione completa consta della somma di una variazione δ_C e e di una variazione δ_{C_f}. Esse danno lo stesso contributo e quindi, per comodità di esposizione, considererò qui solo la variazione δ_C su di un'osservabile γ_n. Essa elimina uno degli n campi B e lo sostituisce con un termine $d_A B$, il quale a sua volta, grazie alla (4.30), può essere riespresso in termini di una derivata funzionale rispetto ad A; tenendo conto anche della (2.116), si può quindi scrivere:

$$\delta_C \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_n \rangle = -2\pi i n \left\langle \frac{\delta}{\delta A^a} \mathrm{Tr}_R \gamma_{n-1} R^a \right\rangle ;$$

l'azione della derivata funzionale sulle osservabili fondamentali è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A^a} \gamma_1(C_\times) &= \gamma_0(C_1) R^a \gamma_1(C_2) + \gamma_1(C_1) R^a \gamma_0(C_2), \\ \frac{\delta}{\delta A^a} \gamma_0(C_\times)^{-1} &= -\gamma_0(C_2)^{-1} \gamma_0(C_1)^{-1}, \end{aligned}$$

dove C_1 e C_2 sono i due nodi in cui viene spezzato il nodo singolare $C_\times$ (C_1 e C_2 sono anche le due componenti del *link* C_0). Se ora ci mettiamo nella rappresentazione fondamentale di $SU(N)$ è possibile usare la (2.121) e, dopo un po' di calcoli, ottenere

$$\begin{aligned}(\delta_C+\delta_{C_f})\left\langle \mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_n\right\rangle = \; & -2\pi i n\langle \textstyle\sum_{p+q=n-2}[\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_p\gamma_0(C_2)^{-1}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1(C_2)\gamma_0^{-1}\gamma_q+\\ & +\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_p\gamma_0^{-1}\gamma_1(C_1)\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)^{-1}\gamma_q]+\\ & -\textstyle\sum_{p+q=n-1,p>1,q>1}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_o\gamma_0(C_2)^{-1}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)^{-1}\gamma_q+\\ & -\tfrac{1}{N}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_{n-1}\rangle,\end{aligned} \tag{4.151}$$

dove nei termini γ_i l'argomento sottinteso è $C_\times$. Un calcolo esplicito, come si è visto, mostra che $w_n(C,R)=0$ se n è dispari. Se ci mettiamo nella situazione in cui n è pari, la (4.151) ci dà la differenza di due termini non nulli calcolati sul nodo C_+ e sul nodo singolare $C_\times$; in questo caso tuttavia è dispari $n-1$ e quindi l'ultimo termine nella (4.151) sparisce. Nel caso $n=2$, si ha

$$\delta w_2(C_\times,R_f) = -2\pi i\left\langle \mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1(C_2)+\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1(C_1)\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_2)\right\rangle. \tag{4.152}$$

Si noti che il secondo membro della (4.152) dà, a meno di un fattore costante, $\Phi(C_1,C_1)+\Phi(C_2,C_2)$. Poiché al primo membro è sottinteso che $0=\Phi(C,C)=\Phi(C_1,C_1)+2\Phi(C_1,C_2)+\Phi(C_2,C_2)$ (a causa della bilinearità di Φ), allora il secondo membro dà il numero di autoconcatenazioni di C_1 con C_2. Il calcolo per $n=4$ è molto più complicato; riporto il risultato per completezza:

$$\begin{aligned}\delta w_4(C_\times,R_f) = \frac{-2\pi i}{3!}\; & [\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_2\gamma_0(C_2)^{-1}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1(C_2)+\\ & +\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1\gamma_0(C_2)^{-1}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1(C_2)\gamma_0^{-1}\gamma_1+\\ & +\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1(C_2)\gamma_0^{-1}\gamma_2+\\ & +\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_2\gamma_0^{-1}\gamma_1(C_1)\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_2)+\\ & +\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1(C_1)\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)^{-1}\gamma_1+\\ & +\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1(C_1)\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)^{-1}\gamma_2+\\ & -\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_2\gamma_0(C_2)^{-1}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)^{-1}\gamma_1+\\ & -\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_1\gamma_0(C_2)^{-1}\mathrm{Tr}_{R_f}\gamma_0(C_1)^{-1}\gamma_2],\end{aligned} \tag{4.153}$$

dove l'argomento sottointeso è $C_\times$.

4.4.4 Discussione

Che cosa rappresenta l'invariante $\langle C \rangle_R (\kappa)$ definito nella (4.135)? La discussione precedente mostra che esso deve in qualche modo essere legato al polinomio di Alexander–Conway $\Delta(C, z)$. Ciò è suggerito in primo luogo dalla struttura geometrica che sottostà alla teoria BF pura. L'invarianza per deformazioni separate del nodo e del *framing* mostra che, a differenza che nella teoria con termine cosmologico, la (4.135) è associata veramente al nodo C anziché alla banda C, C_f. Inoltre il fatto che i campi B "commutino" e l'assenza dell'ordinamento lungo il cammino nella definizione (4.134) (che renderà possibile una definizione dell'osservabile anche in dimensione più alta) fanno pensare che questo invariante non sia legato ai gruppi quantici come accade per il Jones. Inoltre lo sviluppo perturbativo contiene solo termini pari, v. la (4.149), come il polinomio di Alexander–Conway, v. la (A.9), e sembra dipendere solo dal fattore gruppale $c_2(R)c_v$. Questo fattore gruppale è l'unico che sopravvive nella teoria BF con termine cosmologico (e in quella di Chern–Simons, v. Ref. [42]), quando si effettui il limite formale $N \to 0$; dalla (4.73) è chiaro che questo limite è legato al polinomio di Alexander–Conway. Infine c'è il fatto che le mosse proibite, che compaiono quando si sceglie il *gauge* assiale reale, e che presumibilmente sono assenti nel caso della teoria BF pura, sono eliminate se si sceglie il sistema di pesi associato al polinomio di Alexander–Conway.

Se la (4.135) è legata al polinomio di Alexander–Conway, la relazione (4.140) comparata con la relazione $\Delta(C_1 \# C_2, z) = \Delta(C_1, z)\Delta(C_2, z)$ ci dice

che restano solo due scelte possibili:[16]

$$\langle C \rangle_R (\kappa) = 1/\Delta(C, z) \tag{4.154}$$

e

$$\langle C \rangle_R (\kappa) = \Delta(z). \tag{4.155}$$

Il confronto con il second'ordine dello sviluppo perturbativo (4.150) richiede quindi nel primo caso

$$z = \pm 4\pi i\kappa \sqrt{c_2(R) c_v} + O(\kappa^3), \tag{4.156}$$

e nel secondo, proposto nella Ref. [25],

$$z = \pm 4\pi\kappa \sqrt{c_2(R) c_v} + O(\kappa^3). \tag{4.157}$$

Si noti che la (4.137) comparata con la proprietà $\Delta(C^!, z) = \Delta(C, -z)$ richiede che richiede che z sia una funzione dispari di κ. Per quanto riguarda l'analiticità (A.15) del polinomio di Alexander–Conway, essa è comunque soddisfatta poiché dalla (4.139) segue nel primo caso che $\overline{\Delta(C, z)} = \Delta(C, \bar{z})$, mentre nel secondo si ha che $\overline{\Delta(C, z)} = \Delta(C, -\bar{z}) = \Delta(C, \bar{z})$, grazie alla parità imposta dalla (4.149). Per risolvere questa ambiguità le strade possibili sono le seguenti:

1. Studiare il sistema di pesi corrispondente agli invarianti di tipo finito (4.133).

[16] È interessante notare che un conto semiclassico, sul modello di quello considerato nella Ref. [31], porta a questo stesso risultato. In un certo limite è possibile riscrivere la (4.134) come

$$\Gamma(C, \kappa) \sim \exp[\kappa \mathrm{Tr} \gamma_1(C)].$$

L'integrazione su B dà a questo punto una δ funzionale $\delta[F(x) - 2\pi i\kappa H(C_x) J_C(x) H(C^x)]$, dove J_C è una sorgente localizzata sul nodo C. Riesprimendo la δ come una $\delta[A - A^{(\alpha)}]$ (dove $A^{(\alpha)}$ è una connessione piatta fuori dal nodo con olonomia attorno al nodo uguale a $\exp 2\pi i\kappa$), divisa per il determinante $\det[d_{A^{(\alpha)}}]$, e tenendo conto dei contributi dovuti ai *ghost*, si ottiene infine

$$\langle C \rangle (\kappa) \sim \frac{1}{\mathcal{T}(M/C; \exp 2\pi i\kappa)}$$

dove $\mathcal{T}$ è la torsione di Ray–Singer associata a tale connessione. In [27][56] si mostra che essa è uguale alla torsione di Reidemeister, che a sua volta è uguale [55][68] al polinomio di Alexander–Conway. Questo argomento non è assolutamente rigoroso e non permette di capire se la funzione di partizione dia il polinomio di Alexander–Conway o il suo inverso.

2. Calcolare esplicitamente per alcuni nodi semplici l'invariante w_4.

3. Ricavare esplicitamente una relazione di matassa.

Come si è visto, tuttavia, per l'ultimo punto è necessario capire quale osservabile definisca l'invariante per un *link*. Nella Ref. [25] si suggerisce che tali invarianti potrebbero avere la forma:

$$\langle C_1, \ldots, C_n \rangle_R (\kappa) := \langle \mathrm{Tr}_R \Gamma(C_1) \cdots \mathrm{Tr}_R \Gamma(C_n) \rangle_c \tag{4.158}$$

dove con $\langle \cdot \rangle_c$ si intende il valore di aspettazione "connesso" definito sottraendo in tutti i modi possibili i valori di aspettazione dei termini $tr_R \Gamma(C_i)$.

4.5 La teoria BF pura in quattro dimensioni ed i 2-nodi

Abbiamo visto nel Cap. 3 che la teoria BF è una teoria topologica anche in dimensione più alta. La presenza di un termine quadratico BdA la rende trattabile in ogni dimensione. La discussione della Ref. [52] mostra inoltre che anche la struttura supersimmetrica è presente in ogni dimensione e che, in assenza di anomalie, essa garantisce la finitezza della teoria. Un'analisi dettagliata [52] mostra che tali anomalie sono assenti in dimensione 3,4 e 5. La teoria BF rappresenta dunque il miglior candidato per lo studio di invarianti topologici in ogni dimensione.[17] La necessità di considerare B come una $(d-2)$-forma, e di associarla quindi ad una $(d-2)$-sottovarietà, induce a pensare che la teoria BF con osservabili possa descrivere gli invarianti dei $(d-2)$-nodi.[18] Tali osservabili dovrebbero essere una generalizzazione di quelle considerate nel Cap. 4, e nella Ref. [25] per la teoria tridimensionale. Considererò qui solo il caso quadridimensionale, già affrontato preliminarmente nella Ref. [31]. Si noti che la teoria tridimensionale si presta ad una generalizzazione solo nel caso di costante cosmologica nulla, dove l'osservabile (4.134) non richiede un'ordinamento lungo il nodo.

[17] Più correttamente si dovrebbe parlare di *invarianti lisci (smooth)* poiché la teoria è in realtà invariante per diffeomorfismi [connessi all'identità].

[18] Si ricordi che lo studio delle classi di equivalenza sotto diffeomorfismi non connessi all'identità dell'immersione di una sottovarietà (ossia la *teoria dei nodi*) è non banale solo quando la codimensione è uguale a due. Infatti un q-nodo può sempre essere sciolto se $q < d-2$ e non può essere annodato se $q > d-2$.

4.5.1 L'introduzione delle osservabili

Una prima osservabile disponibile in quattro dimensioni è la $\gamma_0(K)$ definita nella (4.39), dove K è una curva chiusa. Essa è invariante (sotto l'operazione di traccia) sia per trasformazioni di *gauge* (3.8) sia per trasformazioni speciali (3.26) con $\kappa = 0$. I valori di aspettazione di questa osservabile sono tuttavia banali (per lo meno nel caso $M^4 = \mathbf{R}^4$, l'unico qui considerato). Una seconda osservabile non banale potrebbe essere costituita dalla $\gamma_1(C, \{K\})$, definita nella (4.40), interpretando ora C come una superficie chiusa. Tale osservabile è ovviamente invariante (sotto l'operazione di traccia) per trasformazioni di *gauge* (3.8,3.9). Non è invece banalmente invariante per trasformazioni speciali (3.26,3.27), con $\kappa = 0$. Per studiare in dettaglio questo problema è necessario introdurre alcune notazioni. Si fissi prima di tutto un punto base x_0 sulla superficie C (eventualmente poi potremo usare l'invarianza per diffeomorfismi per mandare questo punto all'infinito). Si pensi quindi che le curve K^x e K_x appartenenti alla famiglia $\{K\}$ abbiano un estremo in x_0 e l'altro in $x \in C$ e che corrano lungo la superficie C (ossia $K^x, K_x \in C$). Ad ogni punto $x \in C$ potremo associare una direzione $\mathbf{b}$ ortogonale alla superficie. Possiamo inoltre fissare sulla superficie stessa un sistema locale di coordinate (t, n) dove t rappresenta la tangente in x alle curve K^x e K_x (come nel caso tridimensionale imponiamo $t_x K_x = t_x K^x$) e n la direzione normale a t in C. Per ogni $x \in C$ abbiamo così definito il sistema locale di coordinate (t, n, b_1, b_2). Riscriviamo quindi la (4.40) come

$$\gamma_1(C, \{K\}) := \oint_C dx^t \wedge dx^n H^x B_{tn}(x) H_x, \tag{4.159}$$

dove

$$H^x := \mathcal{P} \exp \int_{K^x} dy^t A_t(y), \tag{4.160}$$

$$H_x := \mathcal{P} \exp \int_{K_x} dy^t A_t(y). \tag{4.161}$$

Sotto una trasformazione speciale (3.26,3.27), con $\kappa = 0$, si ha

$$\delta_2 \gamma_1(C, \{K\}) = -\oint_C dx^t \wedge dx^n H^x (d_A \chi)_{tn}(x) H_x = \tag{4.162}$$

$$= -\oint_C dx^t \wedge dx^n \{\partial_t (H^x \chi_n(x) H_x) + \\ -H^x (\partial_n \chi_t(x) + [A_n(x), \chi_t(x)]) H_x\}, \tag{4.163}$$

dove nel primo termine della (4.163) ho potuto sostituire la derivata covariante nella direzione t, che è tangente ai cammini K^x e K_x, con una derivata ordinaria. Si potrebbe fare altrettanto nel secondo termine se sostituissimo le curve K^x e K_x con altre curve $\bar{K}^x$ e $\bar{K}_x$ che coincidono con le prime salvo nell'ultimo tratto, che possiamo supporre infinitesimo, dove formano un'ansa in modo da arrivare in x con tangente parallela alla direzione n, v. fig. 15. Se indichiamo con Σ la superficie (infinitesima) dell'area sottesa dalla differenza delle curve K^x e $\bar{K}^x$ (e delle curve K_x e $\bar{K}_x$), allora possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}\delta_2\gamma_1(C,\{K\}) = \; & \oint_C d\widetilde{\chi} + \Sigma \oint_C dx^t \wedge dx^n H^x[F_{tn}(x), (\partial_n\chi_t(x)+ \\ & +[A_n(x),\chi_t(x)])]H_x + O(\Sigma^2 F_{tn}(x)^2),\end{aligned} \tag{4.164}$$

dove

$$\widetilde{\chi}_n(x) \;\; = H^x\chi_n(x)H_x, \tag{4.165}$$

$$\widetilde{\chi}_t(x) \;\; = \bar{H}^x\chi_t(x)\bar{H}_x, \tag{4.166}$$

mentre $\bar{H}$ è definita come H nella (4.160,4.161) sostituendo $\bar{K}$ a K. Poiché C è per ipotesi una superficie chiusa, il primo termine della (4.164) si annulla (a patto che $\chi(x_0) = 0$, come nel caso tridimensionale). Gli altri termini, infinitesimi in Σ, contengono sempre la componente tn della curvatura F. Si noti ora che la teoria BF corrisponde alla rappresentazione integrale della delta funzionale $\delta[F]$ in tutti quei punti in cui il campo B non compare nell'osservabile γ_1 di cui si vuole prendere il valore di aspettazione. Quindi $F_{\mu\nu}(x) = 0$ se $x \notin C$, mentre se $x \in C$, poiché nell'osservabile compare solo $B_{tn}(x)$, avremo le condizioni

$$F_{nb_i}(x) = F_{tb_i}(x) = F_{tn} = 0. \tag{4.167}$$

Quindi i termini che rendono γ_1 non invariante nella (4.164) svaniscono all'interno di un valore di aspettazione. Dunque siamo giunti al risultato che

$$\langle \delta_2 \mathrm{Tr}_R f(\gamma_1(K), \gamma_2(C,\{K\})\rangle = 0, \tag{4.168}$$

dove f è una generica funzione. L'annullarsi di tutte le componenti di F, tranne la b_1b_2, nella (4.167) implica inoltre che, come nel caso tridimensionale, è possibile deformare liberamente le curve della famiglia $\{K\}$, a patto di non cambiarne la classe di omotopia; infatti una deformazione che cambia la

classe di omotopia genera dei termini contenenti $F_{b_1 b_2}$ che non svaniscono.[19] Possiamo usare questa libertà di deformare i cammini nella famiglia $\{K\}$ per introdurre il *framing*. La condizione più naturale ci sembra la seguente:

1. si introduca una superficie C_f infinitamente vicina a C
2. si considerino le curve della famiglia $\{K\}$ come appartenenti a C_f anziché a C
3. si imponga la condizione di *framing canonico* nel modo seguente

$$\Phi_4(K, C) = 0 \quad \forall K \in C_f, \tag{4.169}$$

dove $\Phi_4(K, C)$ è il numero di concatenazioni della curva chiusa K con la superficie chiusa C definito nella (3.6).

Se le considerazioni su esposte sono valide, possiamo a questo punto passare allo studio degli "invarianti" finiti del 2-nodo C. L'"invariante" di ordine n sarà definito come il valore di aspettazione della traccia dell'osservabile $\gamma_n(C, C_f)$ definita dall'ovvia generalizzazione della (4.129) (o equivalentemente della (4.132)). Si noti che l'invarianza per deformazioni delle curve K sulla superficie C_f fa sì che non sia necessario specificare qual è la curva che connette i campi B. Sarà inoltre possibile considerare anche il valore di aspettazione della funzione generatrice Γ, definita nella (4.134). Nella Ref. [31] si suggerisce che l'invariante così ottenuto debba essere legato all'invariante di Alexander del 2-nodo.

4.5.2 Il calcolo degli invarianti

Per verificare che i valori di aspettazione di cui sopra definiscono effettivamente degli invarianti, l'unica strada praticabile è quella di fissare un *gauge* e dedurre esplicitamente delle formule analitiche e quindi verificare, caso per

[19] Si noti che la stessa analisi può essere effettuata anche nel caso tridimensionale. Se t indica la direzione tangente al nodo e b_1, b_2 le direzioni ortogonali ad esso, allora l'osservabile γ_1 contiene solo $B_t(x)$. L'integrazione funzionale porta quindi alle condizioni $F_{tb_i} = 0$ che permettono le deformazioni che "allontanano" le curve nella famiglia $\{K\}$ dal nodo C. Non è invece possibile cambiare la classe di omotopia del *framing*, poiché una deformazione di questo tipo dipende da $F_{b_1 b_2}$.

caso, se esse davvero non dipendono dalle deformazioni del nodo. La supersimmetria sottostante alla teoria BF [52] assicura anche in questo caso la possibiltà di calcolare i valori aspettazione contraendo in tutti i modi possibili le coppie AB e le terne ABB secondo le (4.22) e (4.23), dove ora però l è una (1,2)-forma in $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ mentre v è una (1,2,2)-forma in $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ definita da

$$v(x,y,z) = \int_{w \in \mathbf{R}^4} l(x-w) \wedge \tilde{l}(y-w) \wedge \tilde{l}(z-w), \tag{4.170}$$

dove $\tilde{l}$ è la (2,1)-forma corrispondente al valore di aspettazione $\langle BA \rangle_0$.

Il gauge assiale

In questo *gauge* si pone

$$A_0 = B_{i0} = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{4.171}$$

Come nel caso della teoria tridimensionale in questo *gauge* sopravvive solo il termine quadratico $\epsilon^{ijk} B_{ij} \partial_0 A_k$ da cui si ricava

$$l(x) = \frac{1}{2} \mathrm{sgn}(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{4.172}$$

e $v = 0$. Un'analisi analoga a quella del caso tridimensionale dovrebbe portare [23] a degli invarianti dei 2-nodi quando essi siano presentati come *filmati* di trecce (ovvero sequenze di fotogrammi ciascuno dei quali contiene una treccia). Nella Ref. [22] sono indicate le mosse che permettono di passare da un 2-nodo ad un altro ad esso equivalente, generalizzando in quattro dimensioni le mosse di Reidemeister, in una rappresentazione di questo tipo. Bisogna dunque verificare che i valori di aspettazione delle osservabili siano invarianti rispetto a queste mosse.

Il gauge covariante

Nel *gauge* covariante si ha

$$l(x) = \frac{1}{\Omega_4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{x^\sigma}{|x|^4}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \tag{4.173}$$

ossia il nucleo dell'integrale (3.6) per il numero di concatenazioni. Nel *framing canonico* il primo invariante $\langle \mathrm{Tr}_R \gamma_1 \rangle$ non dà contributo. Il secondo invece vale

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Tr}_R \gamma_2(C, \{K\}) \rangle = \; & -(4\pi)^2 2 c_2(R) c_v \dim R \int_{y,z \in C} \Big(\int_{x \in K_z^y} v(x,y,z) + \\ & + \int_{x < x' \in K_z^y} l(z - x') \wedge l(x - y) \Big), \end{aligned} \tag{4.174}$$

dove K_z^y è un tratto di curva in C che unisce z a y. Per prima cosa, quindi, bisogna mostrare l'indipendenza della (4.174) dalle curve K. A questo punto segue immediatamente la finitezza (basta considerare K_z^y come la geodetica che collega z a y) e resta solo da dimostrare che la (4.174) non dipende dalle deformazioni del 2-nodo C. Bisognerebbe infine calcolare l'invariante su due 2-nodi non equivalenti per verificare che esso non è banale.

Si noti che in quattro dimensioni non esiste una relazione di matassa tra nodi. È tuttavia possibile [40] costruire una teoria degli invarianti finiti del tipo di quella di Vassiliev, considerando cioè accanto ai nodi anche le immersioni singolari. Un'applicazione del calcolo funzionale potrebbe descrivere come cambiano i nostri invarianti sotto queste deformazioni singolari.

4.6 Conclusioni

In questo capitolo si è visto come la teoria BF risolva in maniera naturale i vari problemi che affliggono la teoria di Chern–Simons. Essa rappresenta dunque il miglior candidato per lo studio degli invarianti dei nodi. Abbiamo visto come la teoria con termine cosmologico riproduca, in un contesto più chiaro, gli invarianti di Jones generalizzati. La teoria pura rappresenta invece una situazione nuova non ottenibile in Chern–Simons e legata al polinomio di Alexander–Conway. Probabilmente è nel contesto della teoria BF pura che è possibile studiare gli invarianti di Casson (probabilmente legati ad un'osservabile derivata da quella che compare nella (4.70)). La generalizzazione quadridimensionale oltre agli invarianti dei 2-nodi [31][23], cui si è accennato in questo capitolo, è legata [24] agli invarianti di Donaldson–Witten [32][73][76].

Appendice A

Gli invarianti dei nodi

In quest'appendice do alcune informazioni essenziali sugli invarianti dei nodi. Per un approfondimento si rimanda alla Ref. [46].

La teoria dei nodi studia la classificazione di come uno spazio X può essere immerso in uno spazio Y. Nella *teoria dei nodi classica* $X = S^1$ e $Y = S^3$. L'immersione di n copie di S^1 in S^3 è invece chiamata *link*. Nel seguito tuttavia parlando di nodi mi riferirò, impropriamente, anche ai *link*. Due nodi sono considerati equivalenti se il primo può essere mandato nel secondo tramite un *diffeomorfismo connesso all'identità.* Un *invariante dei nodi* è una funzione con dominio nella spazio dei nodi modulo la relazione di equivalenza, ossia una funzione dei nodi che dà lo stesso valore se valutata su due nodi equivalenti (si noti tuttavia che un invariante può dare lo stesso valore anche se valutato su due nodi inequivalenti; si dice allora che esso non li distingue).

La *teoria combinatoria dei nodi si basa sul concetto di proiezione.* Si sceglie un piano arbitrario e vi si proietta il nodo. Su tale piano il nodo apparirà come una curva con intersezioni. In una proiezione generica[1] tali intersezioni saranno regolari, ossia tali che i vettori tangenti alla curva nel punto di intersezione non siano paralleli. Chiameremo *incrocio* ogni intersezione (regolare) di una proiezione del nodo. È possibile associare ad

[1]Nella letteratura si distingue tra nodi *tame* e nodi *wild*. Nei primi le proiezioni singolari occorrono solo per scelte particolari del piano di proiezione. Nei secondi invece le proiezioni sono genericamente singolari. Noi ci occuperemo dei nodi *tame*. I nodi *wild* possono essere visti come limiti di nodi *tame* con numero di intersezioni, in una generica proiezione, che tende all'infinito.

ogni incrocio una convenzione grafica, v. fig. 4, per ricordare da quale nodo provenga la proiezione.

Se si lavora col nodo proiettato, allora è possibile mostrare [61] che due nodi sono equivalenti se e solo se possono essere ottenuti l'uno dall'altro con un numero *finito* di *mosse di Reidemeister*, che sono mostrate nelle figg. 1, 2 e 3. Un *invariante dei nodi* in questo contesto sarà una funzione che è invariante sotto tali mosse. Un tale invariante è detto anche *invariante per isotopia d'ambiente*. Nella letteratura si considerano anche gli *invarianti per isotopia regolare* ossia delle funzioni dei nodi che distinguono $\hat{C}_+$, $\hat{C}_-$ e $\hat{C}_0$ nella fig. 1; essi non sono quindi dei veri invarianti dei nodi, ma possono essere visti come invarianti di *bande* (una banda è l'immersione di una corona circolare in S^3).

Molti invarianti conosciuti soddisfano alla cosiddetta *relazione di matassa*, ossia una relazione lineare tra gli invarianti valutati sui nodi C_+, C_- e C_0 che differiscono tra loro solo in prossimità di un singolo incrocio come mostrato nella fig. 4.

Passerò ora in rassegna i principali invarianti sia per isotopia d'ambiente, come il numero di concatenazioni, il polinomio di Alexander–Conway, quello di Jones e quello di HOMFLY, sia per isotopia regolare come la contorsione ed i polinomi di Alexander–Conway e HOMFLY per le bande.

Il numero di concatenazioni e la contorsione

Il più semplice invariante per un *link* L a due componenti è dato dal numero di concatenazioni $\mathrm{lk}(L)$. Se C_1 e C_2 sono i due nodi che costituiscono il *link*, il numero di concatenazioni è dato dall'integrale di Gauss (2.40), con $\mathrm{lk}(L) = \Phi(C_1, C_2)$. Se lavoriamo con una proiezione del nodo, $\mathrm{lk}(L)$ può essere definito in maniera più semplice in termini di *variabili d'incrocio* ϵ, Esse sono definite come segue: dato un incrocio tra C_1 e C_2, la variabile ϵ assume il valore $+1$ se l'incrocio è del tipo C_+ e -1 se l'incrocio è di tipo C_-, v. fig. 4. Quindi il numero di concatenazioni è dato da

$$\mathrm{lk}(L) = \frac{1}{2} \sum_{p \in C_1 \sqcap C_2} \epsilon(p), \tag{A.1}$$

dove la somma è estesa a tutti gli incroci tra C_1 e C_2. Il numero di concatenazioni soddisfa alla relazione di matassa

$$\mathrm{lk}(L_+) - \mathrm{lk}(L_-) = c(L_0), \tag{A.2}$$

dove l'invariante c vale 1 se L_0 ha una sola componente (cioè è un vero nodo) e vale 0 se L_0 ha più di una componente. Se estendiamo la somma (A.1) agli incroci di un nodo, otteniamo la *contorsione*:

$$w(C) = \sum_{p \in C} \epsilon(p). \tag{A.3}$$

Essa non è invariante per isotopia d'ambiente ma solo per isotopia regolare; infatti sotto la prima mossa di Reidemeister si ha (v. fig. 1):

$$w(\hat{C}_\pm) = w(\hat{C}_0) \pm 1. \tag{A.4}$$

Se pensiamo a C come ad una banda costituita da C e da un secondo nodo C_f, allora è possibile mostrare che

$$w(C) + t(C) = \mathrm{lk}(C, C_f), \tag{A.5}$$

dove t è la torsione della banda. Essa è definita dando un contributo ± 1 ad ogni configurazione come quella mostrata in fig. 9.

I polinomi di matassa

Si definiscono polinomi di matassa gli invarianti dei nodi a valori nello spazio dei polinomi a variabili complesse che soddisfano ad una relazione di matassa, ossia tali che ci sia una relazione lineare tra gli invarianti associati ai nodi C_+, C_- e C_0 valutati per le stesse variabili.

Il polinomio di Alexander–Conway Il polinomio di Alexander rappresenta il più antico invariante polinomiale conosciuto [1]. Se C è un nodo, il polinomio $\Delta(C; z)$, $z \in \mathbf{C}$, può essere definito in termini di proprietà geometriche del complemento del nodo $S^3 \backslash C$. Si verifica che esso soddisfa alla relazione di matassa

$$\Delta(C_+; z) - \Delta(C_-; z) = z\Delta(C_0; z), \tag{A.6}$$

dove C_0 è un *link* a due componenti e l'invariante per C_0 è definito implicitamente da questa relazione. Nella Ref. [29], si mostra che è possibile definire assiomaticamente il polinomio Δ, che quindi chiameremo di Alexander–Conway, come quel polinomio che soddisfa alla relazione

$$\Delta(L_+; z) - \Delta(L_-; z) = z\Delta(L_0; z), \tag{A.7}$$

dove ora $L_\pm$ e L_0 sono *link* con un numero generico di componenti. La dimostrazione che la (A.7) definisce un polinomio è immediata: basta notare che applicandola un numero finito di volte ci si riduce al nodo snodato $\bigcirc$, cui viene assegnato un valore costante, o a *link* che contengono n nodi snodati separati. La normalizzazione classica è

$$\Delta(\bigcirc; z) = 1. \tag{A.8}$$

Più complicato è mostrare che Δ definisce un invariante [29].

Vediamo ora alcune proprietà che si possono dedurre dalla (A.7) e valide per il polinomio di Alexander–Conway (per le proprietà valide per tutti i polinomi di che soddisfano ad una relazione di matassa, si vedano le (A.17), (A.15), (A.16), (A.18) e (A.19)). Prima di tutto c'e' una relazione di parità

$$\Delta(L, -z) = (-1)^{\lambda+1}\Delta(L, z), \tag{A.9}$$

dove λ è il numero di componenti di L. Inoltre la (A.7) implica che $\Delta(L; z) = 0$ se L è costituito da due *link* separati. Se si sviluppa $\Delta(L; z) = \sum_n a_n(L) z^n$, allora la (A.7) può essere riscritta nella forma

$$a_{n+1}(L_+) - a_{n+1}(L_-) = a_n(L_0). \tag{A.10}$$

Se si sceglie la normalizzazione (A.8), allora i coefficienti $a_n(L)$ sono degli interi. È inoltre possibile reinterpretare i primi coefficienti come segue:

$$a_0(L) = c(L), \tag{A.11}$$

$$a_1(L) = \begin{cases} \mathrm{lk}(L) & \text{se } L \text{ ha due componenti} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \tag{A.12}$$

con c e lk definiti nel paragrafo precedente. Si può mostrare inoltre che $a_n(L) = 0$ se L ha più di $n+1$ componenti. Il coefficiente $a_2(C)$, se C è un nodo, è chiamato invariante di Arf. Nonostante che il polinomio Alexander–Conway possa essere definito geometricamente [1], tuttavia non si conosce un'interpretazione geometrica dei suoi coefficienti a_n per $n > 2$.

Il polinomio di Jones Si tratta di un polinomio a coefficienti interi nelle variabili t e t^{-1} che soddisfa alla relazione di matassa

$$tV(L_+; t) - t^{-1}V(L_-; t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0; t). \tag{A.13}$$

Esso fu ottenuto [45] a partire dalle rappresentazioni del gruppo delle trecce.

Il polinomio di HOMFLY Si tratta di un polinomio a coefficienti interi nelle variabili t, t^{-1} e z che soddisfa alla relazione di matassa

$$tG(L_+;t,z) - t^{-1}G(L_-;t,z) = zG(L_0;t,z), \tag{A.14}$$

scoperto nella Ref. [34]. Esso contiene sia il polinomio di Alexander–Conway $\Delta(L;z) = G(L;1,z)$ sia il polinomio di Jones $V(L;t) = G(L;t,t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$. Il polinomio di HOMFLY soddisfa alle seguenti relazioni (valide ovviamente anche per l'Alexander–Conway e per il Jones):

1. Analiticità Il polinomio di HOMFLY è una funzione analitica a coefficienti interi e quindi
$$\overline{G(L;t,z)} = G(L;\bar{t},\bar{z}). \tag{A.15}$$

2. Immagine speculare Se $L^!$ è l'immagine speculare di L, ottenuta invertendo il tipo di tutti gli incroci, allora
$$G(L^!;t,z) = G(L;t^{-1},-z). \tag{A.16}$$

3. Inversione Se L^* è il *link* ottenuto invertendo l'orientazione di tutti i nodi che compongono L, allora
$$G(L^*;t,z) = G(L;t,z). \tag{A.17}$$

4. Somma connessa Se $L = L_1 \# L_2$, dove $\#$ indica la somma connessa, allora
$$G(L;t,z)G(\bigcirc;t,z) = G(L_1;t,z)G(L_2;t,z). \tag{A.18}$$

5. Nodi separati Se L è costituito da due *link* L_1 e L_2 separati, allora
$$G(L;t,z)G(\bigcirc;t,z) = \frac{t-t^{-1}}{z}G(L_1;t,z)G(L_2;t,z) \tag{A.19}$$

Il polinomio di HOMFLY può essere normalizzato fissando un valore per $G(\bigcirc;t,z)$. La scelta analoga a quella usata per l'Alexander–Conway $G(\bigcirc;t,z) = 1$, rende più semplice la relazione (A.18) (che prende anche il nome di *regola del denominatore*). La normalizzazione naturale derivata dai *gruppi quantici* è invece $G(\bigcirc;t,z) = (t-t^{-1})/z$, che rende più semplice la (A.19). Tale normalizzazione ovviamente è impossibile per l'Alexander–Conway, che infatti non può essere derivato dai gruppi quantici.

Polinomi invarianti per isotopia regolare È possibile introdurre il polinomio di Alexander–Conway anche nel caso di una banda [47]. Esso risulta essere un polinomio a coefficienti interi nelle variabili α, α^{-1} e z, che soddisfa alla relazione di matassa

$$R(L_+;\alpha,z) - R(L_-;\alpha,z) = zR(L_0;\alpha,z), \tag{A.20}$$

e che sotto la prima mossa di Reidemeister si comporta come segue:

$$R(\hat{L}_\pm;\alpha,z) = \alpha^{\pm 1}R(\hat{L}_0;\alpha,z). \tag{A.21}$$

Si tratta quindi di un invariante per isotopia regolare. Esso è legato [47] al polinomio di HOMFLY dalla relazione:

$$G(L;\alpha,z) = \alpha^{-w(L)}R(L;\alpha,z), \tag{A.22}$$

dove w è la contorsione definita nella (A.3).

È possibile introdurre anche il polinomio di HOMFLY nel caso di una banda. Esso risulta essere un polinomio a coefficienti interi nelle variabili α, α^{-1}, β, β^{-1} e z, che soddisfa alla relazione di matassa

$$\beta P(L_+;\alpha,\beta,z) - \beta^{-1}P(L_-;\alpha,\beta,z) = zP(L_0;\alpha,\beta,z), \tag{A.23}$$

e che sotto la prima mossa di Reidemeister si comporta come segue:

$$P(\hat{L}_\pm;\alpha,\beta,z) = \alpha^{\pm 1}P(\hat{L}_0;\alpha,\beta,z). \tag{A.24}$$

Si tratta quindi di un invariante per isotopia regolare. Esso è legato al polinomio di HOMFLY dalla relazione:

$$G(L;\alpha\beta,z) = \alpha^{-w(L)}P(L;\alpha,\beta,z), \tag{A.25}$$

dove w è la contorsione definita nella (A.3).

Bibliografia

[1] J.W. Alexander: *Trans. AMS* **30**, 275-306 (1923).

[2] D. Altschuler, L. Freidel: *"On Universal Vassiliev Invariants"*, ENSLAPP-L 455/94, ETH-TH/94-07, hep-th/9403053, febbraio 1994.

[3] M. Alvarez, J.M.F. Labastida: *Nucl. Phys.* **B 395**, 198 (1993).

[4] M. Alvarez, J.M.F. Labastida: *"Numerical Knot Invariants of Finite Type from Chern–Simons Perturbation Theory"*, US-FT-8/94, hep-th/9407076, luglio 1994.

[5] L. Alvarez-Gaumé, J.M.F. Labastida, A.V. Ramallo: *Nucl. Phys.* **B 334**, 103 (1990).

[6] F. Archer, R.M. Williams: *"The Turaev–Viro State Sum Model and 3-Dimensional Quantum Gravity"*, CERN-TH 6258/91.

[7] I.Ya. Aref'eva: *Teor. Mat. Fiz.* **43**, 111-116 (1980).

[8] A. Ashtekar: *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244-2247 (1986); *Phys. Rev.* **D 36**, 1587-1602 (1987). (AMS 1998).

[9] M.F. Atiyah, V. Patodi, I. Singer: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77**, 43 (1975); **78**, 405 (1975); **79**, 71 (1976).

[10] D. Bar-Natan: *"Perturbative Chern–Simons Theory"*, Ph.D. Thesis, Princeton University, UMI-91-35830, ottobre 1991.

[11] D. Bar-Natan: *"On the Vassiliev's Knot Invariants"*, Harvard University preprint, agosto 1992 (apparirà su *Topology*).

[12] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis: *"On the Melvin–Morton–Rozansky Conjecture"*, Harvard University preprint, luglio 1994.

[13] D. Bar-Natan, E. Witten: *Commun. Math. Phys.* **141**, 423 (1991).

[14] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora: *Ann. of Phys.* **98**, 287-321 (1976).

[15] J.S. Birman, X.S. Lin: *"Knot Polynomials and Vassiliev's Invariants"*, Columbia University Preprint, 1991 (apparirà su *Invent. Math.*).

[16] M. Blau, G. Thompson: *"Topological Gauge Theories of Antisymmetric Tensor Fields"*, SISSA Preprint, 1989 (apparirà su *Phys. Rep.*).

[17] R. Bott, C. Taubes: *J. Math. Phys.* **35**, 5247-5287 (1994).

[18] A. Brandhuber, M. Langer, M. Schweda, O. Piguet, S.P. Sorella: *Phys. Lett.* **B 300**, 92-95 (1993).

[19] B. Brügmann: *"On a Geometric Derivation of Witten's Identity for Chern–Simons Theory"*, preprint MPI-PH-93-107, hep-th/9401055 gennaio 1994.

[20] C.P. Burgess, F. Quevedo: *"Non Abelian Bosonization as Duality"*, preprint hep-th/9403173 (1994).

[21] G. Călugăreanu: *Rev. Math. Pure Appl.* **4**, 5-20 (1959); *Czech. Math. J.* **11**, 588-624 (1961).

[22] J.S. Carter, M. Saito: *Lett. Math. Phys.* **23**, 287-300 (1991); *"Reidemeister Moves for Surface Isotopies and Their Interpretation as Moves to Movies"*, preprint, 1992 (apparirà su *J. Knot Theory and its Ramifications*); *"A Diagrammatic Theory of Knotted Surfaces"*, atti del congresso dell'A.M.S. n. 876 su *Knots and Quantum Field Theory*; *"Braids and Movies"*, preprint, aprile 1993; *"Knotted Surfaces, Braid Movies, and Beyond"*, preprint, luglio 1993.

[23] A.S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, J. Fröhlich, M. Martellini: in preparazione.

[24] A.S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, A. Gamba, M. Martellini: *"The Donaldson–Witten Invariants in Pure 4D-QCD with Order and Disorder 't Hoof-like Operators"*, preprint Università di Milano IFUM 493/FT, hep-th/9502110, febbraio 1995.

[25] A.S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, M. Martellini: *"Three-dimensional BF Theories and the Alexander–Conway Invariant of Knots"*, preprint Università di Milano IFUM 478/FT, hep-th/9407070, luglio 1994 (apparirà su *Nucl. Phys.* **B**).

[26] A.S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, M. Martellini: "Three and Four Dimensional Topological Quantum *BF* Theories Toward Ashtekar–Einstein Gravity Theory", in preparazione.

[27] J. Cheeger: *Ann. Math.* **109**, 259-322 (1979).

[28] S.S. Chern, J. Simons: *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **68**, 791-794 (1971).

[29] J.H. Conway: in *Computational Problems in Abstract Algebra*, Pergamon Press, New York, 329-358 (1970).

[30] P. Cotta-Ramusino, E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev: *Nucl. Phys.* **B 330**, 557-574 (1990).

[31] P. Cotta-Ramusino, M. Martellini: *"BF-theories and 2-knots"*, in *Knots and Quantum Gravity*, J. Baez (ed.), Oxford University Press, Oxford NY (1994), hep-th/9407097.

[32] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer: *The Geometry of Four Manifolds*, Oxford Press, Oxford, 1991.

[33] F. Delduc, F. Gieres, S.P. Sorella: *Phys. Lett.* **B 255**, 367 (1989).

[34] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millet, A. Ocneanu: *Bull. AMS* **12**, 239-246 (1985).

[35] J. Fröhlich: *"Statistics of Fields, the Yang–Baxter Equation and the Theory of Knots and Links"*, Cargèse Summer Institute Lectures 1987, ed. A. Jaffe *et al.*, Plenum Press.

[36] J. Fröhlich, R. Götschmann, P.A. Marchetti: *"Bosonization of Fermi Systems in Arbitrary Dimension in Terms of Gauge Forms"*, preprint hep-th/9406154 (1994).

[37] J. Fröhlich, C. King: *Commun. Math. Phys.* **126**, 167-199 (1989).

[38] G. Giavarini, C.P. Martin, F. Ruiz Ruiz: *Nucl. Phys.* **B 381**, 222-280 (1992).

[39] G. Giavarini, C.P. Martin, F. Ruiz Ruiz: *"Shift versus No-shift in Local Regularization of Chern–Simons Theory"*, FTUAM 94/8, NIKHEF-H 94/14, UPRF 94/395, hep-th-9406034 (1994).

[40] V. Goriounov: comunicazione privata.

[41] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev: *Phys. Lett.* **B 227**, 111 (1989); *Nucl. Phys.* **B 330**, 575-607 (1990).

[42] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev: *Phys. Lett.* **B 228**, 489-494 (1989).

[43] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev: *Nucl. Phys.* **B 336**, 581-609 (1990).

[44] G.T. Horowitz: *Commun. Math. Phys.* **125**, 417-437 (1989).

[45] V.F.R. Jones: *Bull. AMS* **12**, 103-111 (1985); *Ann. Math.* **126**, 335-388 (1987).

[46] L.H. Kauffman: *On Knots*, Princeton University Press, 1987.

[47] L.H. Kauffman: *Trans. AMS* **312**, 417-471 (1990); *Knots and Physics*, II edizione, World Scientific, 1994.

[48] V.G. Knizhnik, A.B. Zamolodchikov: *Nucl. Phys.* **B 247**, 83-103 (1984).

[49] T. Kohno: *Ann. Inst. Fourier* **37**, 139-160 (1987).

[50] M. Kontsevich: *"Vassiliev's Knot Invariants"*, *Adv. Sov. Math.* **16**, 137-150 (1993).

[51] K. Landsteiner, M. Langer, M. Schweda, S.P. Sorella: *Phys. Lett.* **B 337**, 294-302 (1994).

[52] C. Lucchesi, O. Piguet, S.P. Sorella: *Nucl. Phys.* **B 395**, 325-353 (1993).

[53] N. Maggiore, S.P. Sorella: *Nucl. Phys.* **B 377**, 236-251 (1992).

[54] C.P. Martin: *Phys. Lett.* **B 241**, 513 (1990); *Phys. Lett.* **B 263**, 69-78 (1991).

[55] J. Milnor: *Ann. Math.* **76**, 137-147 (1962).

[56] W. Müller: *Adv. Math.* **28**, 233-305 (1978).

[57] H. Ooguri: *Nucl. Phys.* **B 382**, 276-304 (1992).

[58] H. Ooguri, N. Sasakura: *Mod. Phys. Lett.* **A 6**, 3591-3600 (1991).

[59] R.D. Pisarski, S. Rao: *Phys. Rev.* **D 32**, 2081 (1985).

[60] A.M. Polyakov: *Mod. Phys. Lett.* **A 3**, 325-328 (1988).

[61] K. Reidemeister: *Knotentheorie*, Chelsea Publ. Co. New York (1948). Copyright 1932, Julius Springer, Berlin.

[62] N. Reshetikhin, V.G. Turaev: *Invent. Math.* **103**, 547-597 (1991).

[63] C. Rovelli, L. Smolin: *Nucl. Phys.* **B 331**, 80-152 (1990).

[64] A.S. Schwarz: *Lett. Math. Phys.* **2**, 247 (1978); *Commun. Math. Phys.* **67**, 1 (1979).

[65] C.H. Taubes: *Math. Res. Lett.* **1**, 1-14 (1994).

[66] A. Tsuchiya, Y. Kanie: *Lett. Math. Phys.* **13**, 303-312 (1987).

[67] V.G. Turaev: *Invent. Math.* **92**, 527-553 (1988).

[68] V.G. Turaev: *Russ. Math. Surveys* **41**, 97-147 (1986).

[69] V.G. Turaev, O. Viro: *Topology* **31**, 865-902 (1992).

[70] Tyutin, non pubblicato.

[71] V.A. Vassiliev: *"Cohomology of Knot Spaces"*, in *Theory of Singularities and its Applications*, ed. V.I. Arnold, *Adv. Sov. Math.* **1**, AMS, 1990.

[72] E. Verlinde: *Nucl. Phys.* **B 300**, 360 (1988).

[73] E. Witten: *Commun. Math. Phys.* **117**, 353 (1988).

[74] E. Witten: *Nucl. Phys.* **B 311**, 46-78 (1988/89); *Nucl. Phys.* **B 323**, 113-140 (1989).

[75] E. Witten: *Commun. Math. Phys.* **121**, 351-399 (1989).

[76] E. Witten: *J. Math. Phys.* **35**, 5101 (1994); *"Monopoles and Four-Manifolds"*, preprint IASSNS-HEP94-96, hep-th/9411102, novembre 1994.

Lista delle figure

Fig. 1 La prima mossa di Reidemeister.

Fig. 2 La seconda mossa di Reidemeister.

Fig. 3 La terza mossa di Reidemeister.

Fig. 4 Gli incroci.

Fig. 5 La prima mossa di Reidemeister per una banda.

Fig. 6 Gli incroci per una banda.

Fig. 7 La mossa proibita nel *gauge* di cono di luce.

Fig. 8 Il nodo snodato ∞.

Fig. 9 Il cambio di *framing* (la torsione della banda).

Fig. 10 Una deformazione del *framing* permessa.

Fig. 11 Gli incroci singolari.

Fig. 12 Le mosse proibite nel *gauge* assiale.

Fig. 13 L'effetto delle mosse proibite nel *gauge* assiale.

Fig. 14 La regolarizzazione dei punti critici.

Fig. 15 I cammini K e $\bar{K}$ sul 2-nodo C.