Probeklausur
Mathematik für die Chemie II

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? *(1 Pt.)*

(b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$? *(1 Pt.)*

(c) Für welche Werte von a kann man den Vektor

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

als Linearkombination von $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ darstellen? Stellen Sie in diesem Fall den Vektor b in der Basis $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ dar. *(3 Pt.)*

(d) Sei der Vektor

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

in der Basis $[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ gegeben. Geben Sie die Komponenten von c in der Standardbasis an. *(1 Pt.)*

Lösung

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix mit Spalten $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$. Dann gilt

$$\det A = 1 + a^3 .$$

Damit ist $\det A = 0$ für $a = -1$ und $\det A \neq 0$ sonst. Also ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ für $a \neq -1$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Jede Basis des $\mathbb{R}^3$ ist auch eine Basis des $\mathbb{C}^3$ und damit ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ für $a \neq -1$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$.

(c) Gesucht sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Also muss das LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gelöst werden. Mit dem Gaussalgorithmus erhält man für $a \neq -1$:

$$\alpha = \frac{1-2a}{a^3+1}, \quad \beta = \frac{a^2+2}{a^3+1}, \quad \gamma = \frac{a(2a-1)}{a^3+1} .$$

Damit ist der Vektor b für $a \neq -1$ durch

$$b = \frac{1-2a}{a^3+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \frac{a^2+2}{a^3+1} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{a(2a-1)}{a^3+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

darstellbar. Für $a = -1$ kann man den Vektor b nicht als Linearkombination von $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ darstellen.

(d) Die Komponenten von c in der Standardbasis sind gegeben durch

$$1v^{(1)} + 3v^{(2)} + 4v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1+3a \\ 3+4a \\ 4+a \end{bmatrix} .$$

Aufgabe 2

Für den Vektorraum K_2 der Polynome vom Grad 2 mit Standardbasis $[e] = [1, x, x^2]$ definieren wir eine Basis $[v]$ durch $[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}] = [1, 1+x, 1+x+x^2]$. Die lineare Abbildung $T\colon K_2 \to K_2$ sei definiert durch

$$\begin{aligned} T(v^{(1)}) &= (1+x)^2 \\ T(v^{(2)}) &= 4 - x \\ T(v^{(3)}) &= -2x^2. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $T_{[v]\to[e]}$. *(2 Pt.)*

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]}$. *(2 Pt.)*

(c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $T_{[e]\to[e]}$ bezüglich der Standardbasis und $T_{[v]\to[v]}$ bezüglich der Basis $[v]$. *(2 Pt.)*

Lösung

(a) Wir drücken die Bilder der Basisvektoren $[v]$ bezüglich der Standardbasis aus:

$$\begin{aligned} T(v^{(1)}) &= 1 + 2x + x^2 = e^{(1)} + 2e^{(2)} + e^{(3)} = [1, 2, 1], \\ T(v^{(2)}) &= 4 - x = 4e^{(1)} - e^{(2)} = [4, -1, 0], \\ T(v^{(3)}) &= -2x^2 = -2e^{(3)} = [0, 0, -2]. \end{aligned}$$

Folglich

$$T_{[v]\to[e]} = \left[T(v^{(1)}) \mid T(v^{(2)}) \mid T(v^{(3)})\right] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Wir drücken die Basis $[v]$ bezüglich der Standardbasis $[e]$ aus:

$$[v] = [1, 1+x, 1+x+x^2] = [e^{(1)}, e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)}] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Damit finden wir die Basiswechselmatrizen

$$\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = \left[v^{(1)} \mid v^{(2)} \mid v^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und

$$\mathrm{Id}_{[e]\to[v]} = \mathrm{Id}_{[v]\to[e]}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$T_{[e]\to[e]} = T_{[v]\to[e]}\mathrm{Id}_{[e]\to[v]} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T_{[v]\to[v]} = \mathrm{Id}_{[e]\to[v]}T_{[v]\to[e]} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Finden Sie eine Matrix P, sodass $P^{-1}AP$ diagonal ist. *(3 Pt.)*

(b) Berechnen sie A^n, für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von (a). *(3 Pt.)*

Lösung:

(a) Aus dem charakteristischen Polynom $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(1-\lambda)(\lambda-4)$ finden wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Die zugehörige Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir setzen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

und mittels Gauss-Verfahren finden wir $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Dann ist $A = PDP^{-1}$ und somit $P^{-1}AP = D$, wobei D diagonal ist.

(b) Von oben, $A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{PD\overbrace{P^{-1}P}^{Id}DP^{-1}\dots PDP^{-1}}_{n-mal} = PD^nP^{-1}$. Wir berechnen $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$, und folglich auch $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 + 2 \cdot 4^n & 3 \cdot 4^n & -4 + 4^n \\ -2 + 2 \cdot 4^n & 3 \cdot 4^n & 2 + 4^n \\ -2 + 2 \cdot 4^n & 3 \cdot 4^n & 2 + 4^n \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin(y)e^{-(x-2)^2} + 10.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten $(\nabla f)(x, y)$ an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *(1 Pt.)*

Lösung: Wir berechnen die beiden Komponenten $\partial_x f(x, y)$ und $\partial_y f(x, y)$ des Gradientenvektors. Es gilt

$$\partial_x f(x, y) = -2(x - 2)\sin(y)e^{-(x-2)^2}, \quad \partial_y f(x, y) = \cos(y)e^{-(x-2)^2}.$$

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}(f)(x, y)$ an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *(2 Pt.)*

Lösung: Wir berechnen die Komponenten $\partial_x^2 f(x, y), \partial_y^2 f(x, y), \partial_x\partial_y f(x, y)$ und nutzen aus, dass $\partial_x\partial_y f(x, y) = \partial_y\partial_x f(x, y)$, da f zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Es gilt

$$\partial_x^2 f(x, y) = -2\sin(y)e^{-(x-2)^2} + 4(x-2)^2\sin(y)e^{-(x-2)^2}, \quad \partial_y^2 f(x, y) = -\sin(y)e^{-(x-2)^2}$$

und

$$\partial_x\partial_y f(x, y) = -2(x - 2)\cos(y)e^{-(x-2)^2}.$$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und zeigen Sie, ob es sich dabei jeweils um einen Sattelpunkt, ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt. *(3 Pt.)*

Lösung: Zunächst suchen wir die Nullstellen des Gradienten. Da $e^{-(x-2)^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt aus $\partial_y f(x, y) = \cos(y)e^{-(x-2)^2} = 0$, dass

$$\cos(y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad y \in \left\{ \frac{2n+1}{2}\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Wir definieren daher $y_n := \frac{2n+1}{2}\pi$. Es gilt $\sin(y_n) = (-1)^n \neq 0$ und somit folgt aus $\partial_x f(x, y_n) = -2(x - 2)\sin(y_n)e^{-(x-2)^2} = 0$, dass $x = 2$ gelten muss. Die kritischen Punkte sind daher durch die Punkte $\{(2, y_n) : n \in \mathbb{Z}\}$, gegeben. Die Hesse-Matrix hat an den kritischen Stellen die Form

$$\mathrm{Hess}(f)(2, y_n) = \begin{bmatrix} -2(-1)^n & 0 \\ 0 & -1(-1)^n \end{bmatrix}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass $\mathrm{Hess}(f)(2, y_n)$ positiv definit ist, falls n ungerade ist und negativ definit, falls n gerade ist. Damit folgt, dass $(2, y_n)$ ein lokales Maximum ist, falls n gerade ist und ein lokales Minimum, falls n ungerade ist.

Aufgabe 5

Betrachte das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 10y_1(t) + 3y_2(t) \\ y_2'(t) &= -5y_1(t) + 2y_2(t)\,. \end{aligned}$$

(a) Bestimme die allgemeine Lösung. *(3 Pt.)*

Lösung: Das System ist $y'(t) = Ay(t)$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Die allgemeine Lösung ist somit $y(t) = e^{At}c$ mit $c \in \mathbb{R}^2$.
Eigenwerte (je 0.5 P): Es ist

$$\chi(z) = z^2 - 12z + 35 = (z-7)(z-5)$$

und somit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = 5$.
Eigenvektoren (je 0.5 P): Wir finden

$$E_7 = \ker \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right],$$

und

$$E_5 = \ker \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \mathbb{L}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right].$$

Somit kriegt man zwei Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Mit $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ und $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ folgt

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matrixexponential (1 P): Die allgemeine Lösung ist somit durch $y(t) = ae^{7t}v_1 + be^{5t}v_2$ gegeben, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.
Alternativ können wir nachrechnen und kriegen

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{7t} & 3e^{5t} \\ -e^{7t} & -5e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5c_1 + 3c_2 \\ -(c_1 + c_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (5c_1 + 3c_2)e^{7t} - 3(c_1 + c_2)e^{5t} \\ -(5c_1 + 3c_2)e^{7t} + 5(c_1 + c_2)e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(5c_1 + 3c_2)e^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)e^{5t}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Finde die Lösung mit $y_1(0) = 1 + 3e^2$, $y_2(1) = -6e^7$. *(2 Pt.)*
Lösung: Einsetzen ergibt das Gleichungssystem (1 P.)

$$\begin{aligned} a + 3b &= 1 + 3e^2 \\ -ae^7 - 5be^5 &= -6e^7 \end{aligned}$$

Dies ist $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -e^7 & -5e^5 \end{pmatrix}$ und $b = (1 + 3e^2, -6e^7)$. Lösen dieses Gleichungssystems (1 P.) durch Hinschauen ergibt $a = 1, b = e^2$ oder rechnerisch

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{5e^5 - 3e^7} \begin{pmatrix} -5e^5 & -3 \\ e^7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 3e^2 \\ -6e^7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5e^5 - 3e^7} \begin{pmatrix} -5e^5 + 3e^7 \\ -5e^7 + 3e^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die eindeutige Lösung $y(t) = e^{7t}(1, -1) + e^{5t+2}(3, -5)$.

(c) In welche Richtung zeigt die Lösung y aus (b) zur Zeit $t = 1$? *(1 Pt.)*
Lösung: Es ist $y'(1) = 7e^7(1, -1) + 5e^7(3, -5) = e^7(22, -32)$.