2te Partielle Ableitungen

Sind die Partiellen Ableitungen selbst wieder differenzierbar, so können wir die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \text{bilden}$$

Beispiel 2 $\quad f(x,y) = xy^2 + \sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = -y^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y + \cos(xy) - yx\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y + \cos(xy) - yx\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial y}(x,y) = 2x - x^2\sin(xy)$$

<u>Beispiel:</u> (1) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

<u>Satz:</u> Ist f zweimal stetig partiell diff'bar

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Ist f zweimal stetig diff'bar, $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

so heisst
$$\mathrm{Hess}(f)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

<u>Beispiel:</u> $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Hesse Matrix ist wichtig bei der Diskussion von Extremwerten einer Funktion.

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, x ein Punkt im Innern von D.

Def.: - f hat lokales Maximum in x, wenn $f(y) \leq f(x)$ für alle y in einer Umgebung von x.

- f hat lokales Minimum in x, wenn $f(y) \geq f(x)$ für alle y in einer Umg. von x.

Def.: x heisst kritischer Punkt von f, wenn $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Ein lokaler Extremwert ist ein lokales Maximum bzw. Minimum.

Satz (a) Ist f diff'bar in x und hat in x ein lokales Extremum dann ist x ein kritischer Punkt.

(b) Ist f zweimal diff'bar und x kritischer Punkt (d.h. $\operatorname{grad} f(x) = 0$) und $\operatorname{Hess}(f)(x)$ positiv definit

$\Rightarrow$ x ist lokales Minimum.

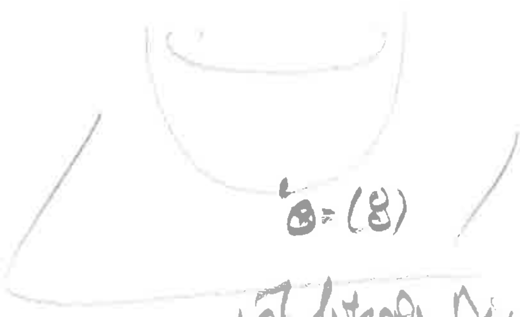
(b) Ist f zweimal diff'bar,

$\operatorname{grad} f(x) = 0$

$\operatorname{Hess} f(x)$ neg. definit

$\Rightarrow$ x ist lokales Maximum.

Beispiel. $f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$\operatorname{grad} f(0) = 0$

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{pos. Definit.}$$

Differentialgleichungen

In physikalischen oder chemischen Systemen betrachtet man häufig Grössen, die von der Zeit abhängen z.B. Temperatur, Konzentration einer Substanz etc

Die Zeitvariable wird meistens mit t bezeichnet, die grösse selbst wird mit $y(t)$ bezeichnet.

Sei nun $D \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

eine Funktion

Dann nennt man

(1) $\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$ eine Differentialgleichung 1ter Ordnung.

Eine Lösung von (1) ist eine Funktion $y : I \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$ so dass für alle $t \in I$, der Punkt $(t, y(t)) \in D$ und $y'(t) = f(t, y(t))$ gilt.

Beispiele: ① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) \equiv 0$, d.h. die

D-Gl lautet $y'(t) = 0$

Die Lösungen dieser D-Gleichung sind alle konstanten Funktionen, $y(t) = C$, $C \in \mathbb{R}$

② $y'(t) = y(t)$; d.h. $f(x,y) = y$

In diesem Fall ist $y(t) = e^t$ eine Lösung,

denn $\frac{d}{dt} e^t = e^t$ (Eigenschaft der Exponentialfunktion).

Ist C eine Konstante, dann ist auch $C \cdot e^t$ eine Lösung.

Dies sind dann auch alle Lösungen: Dies sieht man so ein:

Ist $y(t)$ eine Lösung, so betrachte die Hilfsfunktion $z(t) = e^{-t} y(t)$

Nach der Produktregel gilt

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= -e^{-t} y(t) + e^{-t} y'(t) \\
&= -e^{-t} y(t) + e^{-t} y(t) \qquad (\text{da } y'(t) = y(t)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

d.h. $z'(t)$ ist konstant $= C$, d.h. $e^{-t} y(t) = C$

$\Rightarrow y(t) = C e^t$.

3. f hängt nur vom ersten Parameter ab, d.h. von t ab:

$$y'(t) = f(t)$$

In diesem Fall ist

$$y(t) = \underbrace{\int f(s)ds}_{\text{Stammfkt. von } f} + C \quad \text{eine Lösung.}$$

Die Beispiele machen klar, dass eine D-Gl. (1) in der Regel keine eindeutige Lösung besitzt, sondern noch "freie" Parameter (Konstanten) besitzt.

Die Menge aller Lösungen einer D-Gleichung heisst die <u>allgemeine Lösung</u>.

Eine D-Gleichung mit <u>Anfangsbedingung</u> erhält man indem man die Lösung sucht, die zu einem Zeitpunkt t_0 den vorgegebenen Anfangswert y_0 annimmt.

Man hat dann das <u>Anfangswertproblem</u>: gesucht $y: I \to \mathbb{R}$ so dass

(1) $y'(t) = f(t, y(t))$

und $y(t_0) = y_0$

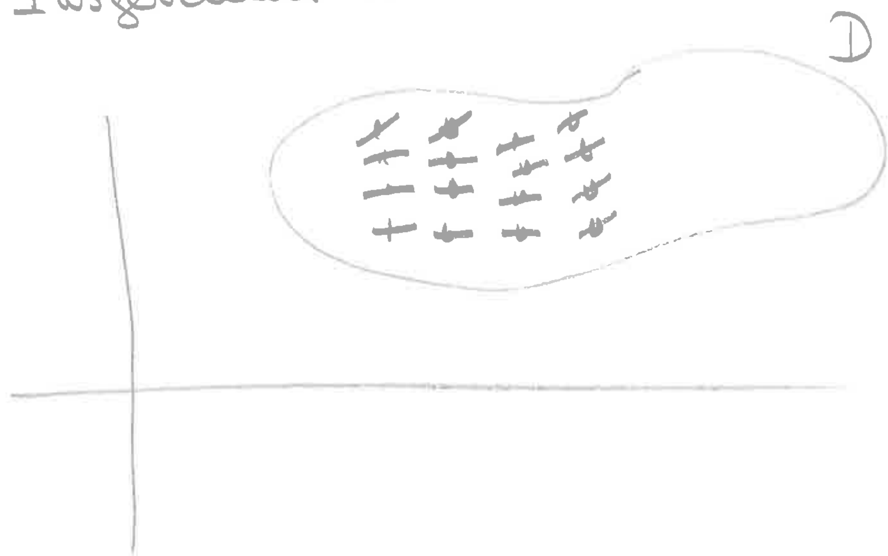
Geometrische Interpretation:

Eine Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt ein "Richtungsfeld", d.h. jedem $(x,y) \in D$ wird eine Steigung $f(x,y)$ zugeordnet.

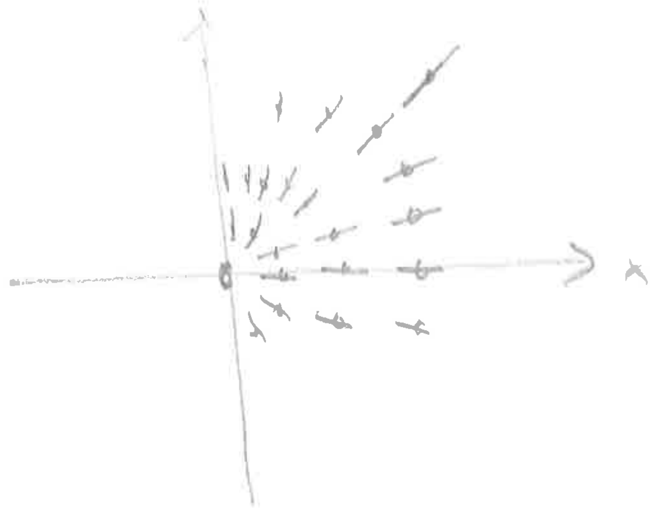
Ist also z.B.: $f(x,y) = 2$ dann zeichnen wir durch (x,y) ein kleines Stück Gerade mit Steigung 2, also etwa

ist $f(x,y) = -1$ so:

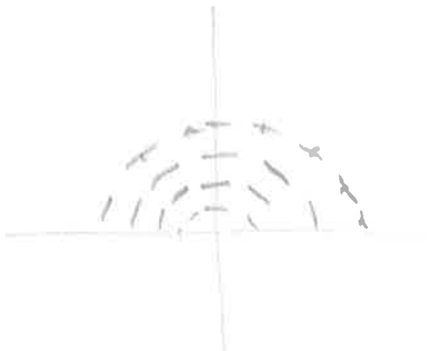
Insgesamt erhalten wir das Richtungsfeld



z.B.: $D = (0,\infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, $y' = \frac{y}{x}$



z.B.: $D = \mathbb{R} \times (0,\infty)$, $y' = -\frac{x}{y}$



Eine Lösung ist eine Funktion, deren graph tangential an das Richtungsfeld ist.

Man sieht im ersten Fall, dass $y(t) = Ct$ eine Lösung ist, C konst.

$$\boxed{y'(t) = \frac{y(t)}{t}}$$

, im zweiten Fall sind die Lösungen

Kurven, deren Graph ein Kreis ist

$y^2(t) + t^2 = c$, $y = +\sqrt{c - t^2}$

param. auf $[-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$, $c > 0$

besser $y(t) = \sqrt{c^2 - t^2}$ pa. auf $[-c, c]$, $c > 0$.

$y'(t) = -\frac{1}{2}(c^2 - t^2)^{-1/2} \cdot 2t$

$= -t / \sqrt{c^2 - t^2}$ also $y'(t) = -\frac{t}{y(t)}$

dies ist genau die D-Gl.

Wir wollen nun einen einfachen Typ von Differentialgleichungen betrachten: und zwar die homogenen D-Gleichungen mit einem konstanten Koeffizient. Dies ist eine D-Gl. von der Form

$$\boxed{y'(t) = a\, y(t)}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = ay$

wobei $a \in \mathbb{R}$, d. h.

Satz Sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Dann hat die Differentialgleichung

$$y'(t) = a\, y(t)$$

die allgemeine Lösung $y(t) = c\, e^{at}$, $c \in \mathbb{R}$

(b) für $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ist

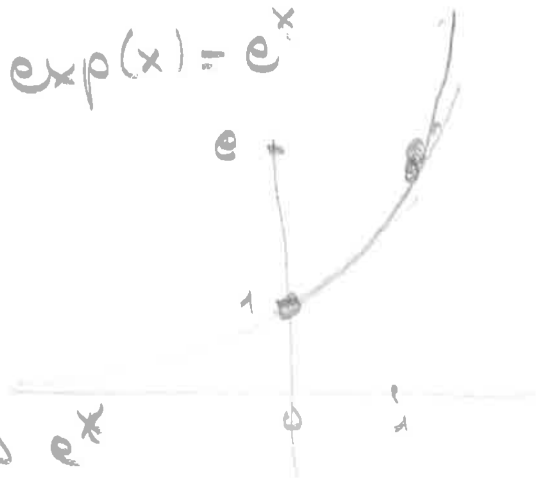
$$y(t) = y_0\, e^{a(t-t_0)}$$

die eindeutige Lösung der D-Gleichung $y' = ay$ mit Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$.

Ich beweise diese Tatsachen und erinnere dabei an die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion.

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Manchmal schreibt man auch $\exp(x) = e^x$



Graph sieht etwa so aus

e ist die Eulersche Zahl

die Ableitung von e^x ist wieder e^x

d.h. e^t erfüllt die D-Gleichung $y' = y$

Reihendarstellung

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

An dieser Reihendarstellung sieht man leicht, dass sich die Exponentialfunktion bei der Ableitung reproduziert:

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \dots\right.$$

$$0 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Zum Satz: die Funktion $y(t) = c\, e^{at}$ abgeleitet gibt $y'(t) = c\, a\, e^{at}$ und erfüllt somit die DGl.

Wir zeigen dass so alle Lösungen zustande kommen.

Sei $y(t)$ eine beliebige Lösung der D-Gl.

Betrachte $z(t) = y(t)\, e^{-at}$

$\Rightarrow$ Ableiten, Produktregel und $y' = ay$ ergibt

$$z'(t) = a\, y(t)\, e^{-at} - y(t)\, a\, e^{-at} = 0$$

Es folgt dass $z'(t) \equiv 0$ und

somit $z(t) = c$ Konstante

also $c = y(t)\, e^{-at}$, somit $y(t) = c\, e^{at}$.

Man sieht auch leicht, dass

$$y(t) = y_0\, e^{a(t-t_0)} = \underbrace{\left(y_0 \cdot e^{-at_0}\right)}_{\text{konst.}} e^{at} \quad \text{Lösung ist}$$

mit $y(t_0) = y_0$.

Diese Lösung ist eindeutig.

Sei $\bar{y}$ eine weitere Lösung, dann ist $\bar{y} = C' \cdot y$

wobei $\bar{C}$ eine Konstante.

<u>Fallunterscheidung</u>: (a) $y_0 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow \bar{y} \equiv 0$

also $y = \bar{y}$

(b) $y_0 \neq 0 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{y_0}}{\bar{y}(t_0)} = C' \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{y_0}}{y(t_0)} \Rightarrow C' = 1$

$\Rightarrow y = \bar{y}$.

Systeme von gewöhnlichen D-Gleichungen

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung eines gewöhnlichen D-Gleichung.
Gesucht ist nun nicht eine Funktion
$y: I \to \mathbb{R}$ sondern eine Kurve
$y: I \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$

Hierzu passen wir die Definition wie folgt an.

__Def__: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und sei
$f: D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion
Dann nennt man
$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$ ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Lösung dieses D-Gleichungssystems ist eine parametrisierte Kurve
$y: I \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$

so dass

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$$

Beispiel 1:

$$y_1'(t) = 3y_1(t) + 2y_2(t) + \sin t$$
$$y_2'(t) = 5y_1(t) - 3y_2(t) - \cos t$$

Dies entspricht der Funkt. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(t, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 3y_1 + 2y_2 + \sin t \\ 5y_1 + 3y_2 - \cos t \end{pmatrix}$$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Wir werden zeigen, dass man einen speziellen Typ von solchen Gleichungen eine vollständige Lösungsmethode hat.