Lösung zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Sei $L \in \mathbb{R}^{n\times m}, n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = LL^T$. Zeigen Sie:

(a) *A besitzt nur reelle Eigenwerte.* *(2 Pt.)*

Lösung: A ist symmetrisch:

$$A^T = \left(LL^T\right)^T = \left(L^T\right)^T L^T = LL^T = A\,.$$

Somit ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und symmetrisch. Nach der Vorlesung besitzt A also nur reelle Eigenwerte.

(b) *A besitzt nur nichtnegative Eigenwerte.* *(2 Pt.)*

Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Eigenwert von A. Dann existiert ein reeller Eigenvektor $v \neq 0, v \in \mathbb{R}^n$, d. h. insbesondere $\langle v, v\rangle \neq 0$, zum Eigenwert λ:

$$Av = \lambda v\,.$$

Weiter ist

$$\lambda = \frac{\lambda\langle v, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle LL^T v, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{\langle L^T v, L^T v\rangle}{\langle v, v\rangle} \geq 0.$$

Damit ist jeder Eigenwert $\lambda \geq 0$ und somit nichtnegativ.

Aufgabe 2

Falls definiert, geben Sie ohne Rechnung die Eigenwerte und deren Eigenräume für die folgenden Abbildungen f, g, h, j: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an. Als Vektor werden im Folgenden stets Ursprungsvektoren bezeichnet.

(a) *f streckt jeden Vektor um den Faktor 3.* *(1 Pt.)*

Lösung: Zunächst halten wir fest, dass f eine lineare Abbildung ist und somit Eigenwerte und zugehörige Eigenräume wohldefiniert sind. f streckt insbesondere $e_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 3, d. h. $f(e_i) = 3e_i, i = x, y, z$. Damit hat f den Eigenwert 3 und da $[e_x, e_y, e_z]$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$ bildet, ist der Eigenraum von f zum Eigenwert 3 der ganze $\mathbb{C}^3$.

(b) g projiziert jeden Vektor auf die xy-Ebene. *(1 Pt.)*

Lösung: Zunächst halten wir fest, dass g eine lineare Abbildung ist und somit Eigenwerte und zugehörige Eigenräume wohldefiniert sind. Es gilt $g(e_x) = e_x, g(e_y) = e_y$ und $g(e_z) = 0$. Da e_x, e_y und e_z linear unabhängig sind und $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$, sind alle Eigenwerte (0 und 1) gefunden. Also sind die Eigenwerte 0 mit zugehörigem Eigenraum $\left\{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \colon \alpha \in \mathbb{C}\right\}$ und 1 mit zugehörigem Eigenraum $\left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \colon \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$.

(c) h projiziert jeden Vektor auf die z-Achse. *(1 Pt.)*

Lösung: Zunächst halten wir fest, dass h eine lineare Abbildung ist und somit Eigenwerte und zugehörige Eigenräume wohldefiniert sind. Es gilt $h(e_x) = 0, h(e_y) = 0$ und $h(e_z) = e_z$. Da e_x, e_y und e_z linear unabhängig sind und $\dim(\mathbb{C}^3) = 3$, sind alle Eigenwerte (0 und 1) gefunden. Also sind die Eigenwerte 1 mit zugehörigem Eigenraum $\left\{\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \colon \alpha \in \mathbb{C}\right\}$ und 0 mit zugehörigem Eigenraum $\left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \colon \alpha, \beta \in \mathbb{C}\right\}$.

(d) j verlängert jeden Vektor um den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *(1 Pt.)*

Lösung: Bei j handelt es sich nicht um eine lineare Abbildung. Deshalb sind Eigenwerte und Eigenvektoren von j nicht definiert.

Aufgabe 3

Finden Sie für jede der folgenden symmetrischen Matrizen eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T AS$ diagonal ist.

(a)

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2 Pt.)

Lösung: Wir berechnen $\det(A - z) = (2.5 - z)^2 - 4$ und erhalten die Nullstellen $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = \frac{9}{2}$. Wir berechnen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten somit mit $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ einen normalisierten Eigenvektor zum Eigenwert $z_1 = \frac{1}{2}$. Nach der Vorlesung existiert eine reelle Eigenbasis aus Orthonormalvektoren. Da wir bereits einen Eigenvektor bestimmt haben und $\dim \mathbb{C}^2 = 2$, wissen wir, dass der Eigenraum des Eigenwerts $z_2 = \frac{9}{2}$ von $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, da $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. In der Tat berechnen wir $Av_2 = \frac{9}{2}v_2$. Definieren wir nun

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 Pt.)

Lösung: Wir berechnen

$$\det(B - z) = -z^3 + 3z + 7z^2 - 21 = -(z(z^2 - 3) - 7(z^2 - 3)) = (7 - z)(z^2 - 3).$$

Damit erhalten wir die Nullstellen $z_1 = 7, z_2 = \sqrt{3}$ und $z_3 = -\sqrt{3}$. Gauss'sche Elimination bzw. das Lösen der Eigenwertgleichung $Bv_i = z_i v_i$ für $i = 1, 2, 3$ ergibt die drei orthonormalen Eigenvektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{(3-\sqrt{3})}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}-1} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{(3+\sqrt{3})}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}+1} \end{pmatrix}$ zu den Eigenwerten z_1, z_2 beziehungsweise z_3. Wie im ersten Aufgabenteil definiert die Matrix $S = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine orthogonale Matrix und wir berechnen

$$S^T BS = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^2 = A$ besitzt nur die Eigenwerte 0 oder 1. *(1 Pt.)*

Lösung: Die Aussage ist richtig. Sei $0 \neq v$ ein Eigenvektor zu einem beliebigen Eigenwert λ von A. Dann gilt

$$\lambda v = Av = A^2 v = \lambda^2 v,$$

also $\lambda(1-\lambda) = 0$, da $v \neq 0$. Daraus schliessen wir, dass $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$ gelten muss.

(b) Jede obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt ausschliesslich reelle Eigenwerte. *(1 Pt.)*

Lösung: Die Aussage ist richtig. Sei A obere Dreiecksmatrix mit reellen Diagonalkoeffizienten $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$. Nach der Vorlesung berechnen wir

$$\det(A - z) = (a_{11} - z)(a_{22} - z)\ldots(a_{nn} - z).$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. die Eigenwerte von A, entsprechen somit genau den reellen Diagonalkoeffizienten $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$, und sind insbesondere reell.

(c) Jede obere Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar. *(1 Pt.)*

Lösung: Die Aussage ist falsch. Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Das charakteristische Polynom ist offenbar $\det(A - z) = (1 - z)^2$, hat also die doppelte Nullstelle 1. Nach der Vorlesung ist A genau dann diagonalisierbar, falls der

Eigenraum zum Eigenwert 1 die Dimension 2 hat. Löst man jedoch die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

so sehen wir, dass $\mathrm{Eig}(1) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, der Eigenraum also nur eindimensional ist. Folglich ist die obere Dreiecksmatrix A nicht diagonalisierbar.

(d) Besitzen die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die gleichen Eigenwerte, so gilt $A = B$. *(1 Pt.)*

Lösung: Die Aussage ist falsch. Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ besitzen die Eigenwerte 1 und 2, aber es gilt offensichtlich $A \neq B$.