

Übungsblatt 11

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 18. Mai 2016.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

- (a) Prüfen Sie nach, ob A hermitesch ist. (1 Pt.)
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A . (1 Pt.)
- (c) Finden Sie eine unitäre Matrix S , so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist. (1 Pt.)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = A \cdot x$ wobei

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Überprüfen Sie, ob A orthogonal ist. (1 Pt.)
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die dazugehörigen Eigenvektoren w_1, w_2, w_3 . (2 Pt.)
- (c) Seien w_2 und w_3 die komplexen Eigenvektoren. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $f_{[v] \rightarrow [v]}$ in der Basis

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, v_2 = \frac{w_2 + w_3}{\|w_2 + w_3\|}, v_3 = \frac{i(w_3 - w_2)}{\|i(w_3 - w_2)\|}.$$

(1 Pt.)

- (d) Beschreiben Sie geometrisch, was die Abbildung f macht. (1 Pt.)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie:

- (a) Alle Eigenwerte von A sind verschieden von 0. (1 Pt.)
- (b) Mindestens ein Eigenwert ist reell. (1 Pt.)
- (c) Wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind, dann sind die Eigenwerte von A^{-1} durch $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$ und λ_3^{-1} gegeben. (1 Pt.)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ gegeben, sodass $AB = BA$ gilt.

- (a) Zeigen Sie, falls v ein Eigenvektor von B ist und $Av \neq 0$, dann ist auch Av ein Eigenvektor von B . (2 Pt.)
- (b) Verwenden Sie a) um zu zeigen, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen (d.h. es existiert ein Vektor $w \neq 0$ sodass $Aw = \mu w$ und $Bw = \lambda w$ für gewisse $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$). Tipp: Untersuchen Sie die Abbildung $A|_{E_\lambda}$, wobei λ ein Eigenwert von B und E_λ der dazugehörige Eigenraum ist. (3 Pt.)