Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen

Orthogonale und unitäre Matrizen

Erinnerung: $\mathbb{R}^n$: $\langle\, , \rangle$ das eukl. SKP auf $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst orthogonal $\Leftrightarrow$

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, \forall y$$

$$\Leftrightarrow \quad A^T A = \mathrm{Id}_n$$

, $O(n) = \{A \mid A \text{ orthogonal}\}$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

inneres Produkt.

$\mathbb{C}^n$: $$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst unitär $\Leftrightarrow$

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{A}^T A = \mathrm{Id}_n$$

$U(n) = \{A \mid A \text{ unitär}\}$

Eine Matrix $A \in O(n)$, i.e. A orthogonal, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kann man auch als $A \in U(n)$

Beispiele: $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{pmatrix}$

Satz: $A \in U(n)$, $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto Ax$

(i) Jedes Eigenwert λ von A hat Betrag $|\lambda| = 1$

(ii) Sind λ, μ EW und $\lambda \neq \mu$, v EV zu λ, w EV zu μ

$\Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

(iii) $\exists$ Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{C}^n$, s.d.

$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ (i.e. orthonormal

so dass v_i Eigenvektoren

also $(f)_{[v] \to [v]}$ ist diagonal

Zu (i) $Av = \lambda v \Rightarrow$

$$\langle v, v \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ A \in U(n)}}{=} \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$$= |\lambda|^2 \langle v, v \rangle$$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1.$

(ii) $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$

$$\langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle$$

$$= \lambda \bar{\mu} \langle v, w \rangle$$

wäre $\langle v, w \rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda \bar{\mu} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{\mu}{\bar{\mu}\mu} = \mu$

(iii)

ist v Eigenvektor, dann ist das orthogonale Komplement invariant und man kann per Induktion schliessen auf diagonalisierbarkeit.

Satz: $A \in O(n)$, also $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T A = Id_n$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$
Dann gibt es eine ON Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$, so dass

$$f_{[v] \to [v]} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{D\varphi_1} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{D\varphi_k} \end{pmatrix}$$

$$D\varphi_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

Konkret: **Fall $n=2$:** $A \in O(2)$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$
Dann ist f entweder die Spiegelung an einer Geraden

$\mathbb{R}^2$ $\quad g = \{\lambda v^{(1)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$v^{(2)} = v^{(1)\perp}$

$$f_{[v^{(1)}, v^{(2)}]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Oder f ist die Drehung um einen Winkel φ

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Fall $n=3$: $A \in O(3)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$

χ_f charakteristisches Polynom, hat immer wenigstens eine reelle Nullstelle

$\lambda = \pm$ EW (hat Betrag 1), $v^{(1)}$ EV

$W = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w\rangle = 0\}$

$f(W) = W$. Hier Diskussion wie im $\mathbb{R}^2$

$$f_{[v]\to[v]} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder} \quad = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Symmetrische und Hermitesche Matrizen

$\mathbb{R}^n$, $\langle\,,\,\rangle$ das eukl SKP auf $\mathbb{R}^n$

$\langle x,y\rangle = \sum x_i y_i$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst symmetrisch

$\Leftrightarrow \quad A = A^T$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\langle Ax,y\rangle}_{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j y_i} = \underbrace{\langle x,Ay\rangle}_{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j x_i} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{C}^n$, $\langle x,y\rangle = \sum x_i \bar{y}_i$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst Hermitesch

$\Leftrightarrow \quad A = \bar{A}^T$

$\Leftrightarrow \quad \langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ A ist auch Hermitesch.

Satz: A Hermitesch, $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f_{[e]\to[e]} = A$

(i) Jeder Eigenwert von A ist reell

(ii) Sind λ, μ EW, $\lambda \neq \mu$, v, w entspr. E.V.

$\Rightarrow \langle v, w\rangle = 0$

(iii) $\exists\ v_1, \dots, v_n$ ON Basis von $\mathbb{C}^n$ s.d.

$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, $f_{[v]\to[v]}$ diagonal

Zu (i) $\quad Av = \lambda v \Rightarrow$

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle Av, v\rangle \underset{A\text{ herm.}}{=} \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar\lambda\langle v,v\rangle$$

$\Rightarrow$ (da $v \neq 0$) $\lambda = \bar\lambda$ i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$

Zu (ii) $\quad Av = \lambda v, \quad Aw = \lambda w$

$$\lambda\langle v,w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle \underset{\mu\in\mathbb{R}}{=} \mu\langle v,w\rangle$$

da $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle v,w\rangle = 0$.

(iii)

v EV. $\Rightarrow$ Komplement ist invariant. usw.

Satz: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A^T = A$, $f_{[e]\to[e]} = A$
d.h. $f(x) = Ax$.

Dann ex. eine ON Basis von $\mathbb{R}^n$ so dass

$f_{[v]\to[v]}$ diagonal.

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(z) = (2-z)^2 - 9 = z^2 - 4z - 5$$

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5}\ , \quad z_1 = -1,\ z_2 = 5$$

$$x \in E_{-1} \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|v^{(1)}\| = 1$$

$E_{-1} = \mathbb{R} \cdot v^{(1)}$

$$x \in E_5 \iff \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$E_5 = \mathbb{R} \cdot v^{(2)}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_{f_{[v]\to[v]}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{Id_{[e]\to[v]}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{Id_{[v]\to[e]}}$$

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -z & 2 \\ 2 & -z \end{pmatrix} = z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$

EW sind $2, -2$

$x \in E_{-2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

<u>Beispiel:</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad \overline{A}^T = A$

$\chi_A(z) = (2-z)(2-z) - 1$

$= z^2 - 4z + 3$

$z_{1,2} = 2 \pm 1, \quad EW = 1, 3$

$x \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow R_2 \to R_2 + iR_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1, \quad \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$x \in E_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(z) = \det \begin{pmatrix} -4-z & 2 & -2 \\ 2 & -7-z & 4 \\ -2 & 4 & -7-z \end{pmatrix}$$

$$= (-4-z)(-7-z)^2 - 16 - 16$$

$$+ 28 + 4z + 64 + 16z + 28 + 4z$$

$$= -(z+4)(49 + 14z + z^2) + 88 + 24z$$

$$= -z^3 - 18z^2 - (49 + 56 - 24)z - (196 - 88)$$

$$= -(z^3 + 18z^2 + 81z + 108)$$

$$= -(z+12)(z+3)^2$$

D.h. Eigenwerte sind $-12, -3$ wobei -3 die algebraische Vielfachheit 2 hat.

$$x \in E_{-12} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - \frac{1}{4}R_1]{R_2 - \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 9/2 & 9/2 & 0 \\ 0 & -9/2 & -9/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\leadsto \begin{array}{l} R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \to \frac{2}{9}R_2 \\ R_3 \to R_3 + R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$R_1 - R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\frac{1}{4} R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -1, \quad x_1 = \frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-3/2}, \qquad v^{(1)} := \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|v^{(1)}\| = 1$

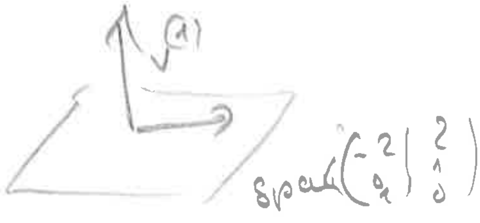
$\| \ \| = \frac{3}{2}$

$x \in E_{-3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 2 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow w^{(1)} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w^{(2)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{-2}$



Beide Vektoren stehen $\perp$ auf $v^{(1)}$

$w^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^{(3)} \in \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ so dass $w^{(3)} \perp w^{(2)}$

$$w = w^{(2)} - \frac{\langle w^{(1)}, w^{(2)}\rangle}{\langle w^{(1)}, w^{(1)}\rangle}\, w^{(1)}$$

$$w \perp w^{(1)}, \quad w \in \mathrm{span}\left(w^{(1)}, w^{(2)}\right)$$

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5}\, w^{(1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

<u>ONB:</u> $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$