Übungsblatt 9

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 04. Mai 2016.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie ob die folgenden Abbildungen innere Produkte auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen sind und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad \langle u, v\rangle = u_1 + u_2\overline{v_2}$ *(1 Pt.)*

Lösung:
$\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{v_1 + v_2\overline{u_2}} = \overline{v_1} + u_2\overline{v_2} \neq u_1 + u_2\overline{v_2} = \langle u, v\rangle \implies \langle .,.\rangle$ ist kein inneres Produkt.

(b) $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad \langle u, v\rangle = 4u_1\overline{v_1} + 6u_2\overline{v_2}$ *(1 Pt.)*

Lösung:

(i) $\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{4v_1\overline{u_1} + 6v_2\overline{u_2}} = 4\overline{v_1}u_1 + 6\overline{v_2}u_2 = \langle u, v\rangle;$

(ii) $$\begin{aligned}\langle \alpha_1 u + \alpha_2 v, w\rangle &= 4(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 v_1)\overline{w_1} + 6(\alpha_1 u_2 + \alpha_2 v_2)\overline{w_2} \\ &= 4\alpha_1 u_1\overline{w_1} + 6\alpha_1 u_2\overline{w_2} + 4\alpha_2 v_1\overline{w_1} + 6\alpha_2 v_2\overline{w_2} = \alpha_1\langle u, w\rangle + \alpha_2\langle v, w\rangle;\end{aligned}$$

(iii) $\langle u, u\rangle = 4u_1\overline{u_1} + 6u_2\overline{u_2} = 4|u_1|^2 + 6|u_2|^2 \geq 0 \quad$ und $\quad \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Somit ist $\langle .,.\rangle$ ein inneres Produkt.

(c) $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad \langle u, v\rangle = u_1 + v_1 + 2(\overline{u_2} + \overline{v_2})$ *(1 Pt.)*

Lösung:
$\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{v_1 + u_1 + 2(\overline{v_2} + \overline{u_2})} = \overline{u_1} + \overline{v_1} + 2(u_2 + v_2) \neq \langle u, v\rangle \implies \langle .,.\rangle$ ist kein inneres Produkt.

(d) $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad$ wobei $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$ *(1 Pt.)*

Lösung: Die Eigenschaften (i) und (iii) zeigt man gleich wie in Aufgabe 3(b) aus Übungsblatt 8. Es bleibt noch (ii) zu zeigen. Jede komplexwertige Funktion f kann man als $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ schreiben, wobei f_1, f_2 reelwertige Funktionen sind.

Falls f stetig ist, dann sind auch f_1, f_2 stetig. Jetzt kann man zeigen

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle g, f\rangle} &= \overline{\int_0^1 g(x)\overline{f(x)}\,dx} = \overline{\int_0^1 (g_1(x) + ig_2(x))(f_1(x) - if_2(x))\,dx} = \\
&= \overline{\int_0^1 f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)\,dx + i\int_0^1 f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x)\,dx} = \\
&= \int_0^1 f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)\,dx - i\int_0^1 f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x)\,dx = \langle f, g\rangle,
\end{aligned}
$$

und daher ist $\langle .,. \rangle$ ein inneres Produkt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von folgenden Matrizen

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *(2 Pt.)*

Lösung:
Eigenwerte:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$.
Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 5 \\ -2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3i & 5 \\ -2 & -1-3i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-3i & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis für den (eindimensionalen) Eigenraum E_{λ_1} ist gegeben durch $[(-5, 1-3i)]$.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 5 \\ -2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & 5 \\ -2 & -1+3i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+3i & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis für den Eigenraum E_{λ_2} ist gegeben durch $[(-5, 1+3i)]$.

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ *(2 Pt.)*

Eigenwerte:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 35 = (\lambda-7)(\lambda-5) = 0$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 5$.
Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & 1 \\ -3 & 8-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis für den Eigenraum E_{λ_1} ist gegeben durch $[(1,3)]$.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & 1 \\ -3 & 8-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis für den Eigenraum E_{λ_2} ist gegeben durch $[(1,1)]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die Rotationsmatrix in zwei Dimensionen um den Winkel θ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und deren algebraische Vielfachheiten in Abhängigkeit von θ. *(2 Pt.)*
Lösung: Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} = (\cos\theta-\lambda)^2+\sin^2\theta = \lambda^2-2\lambda\cos\theta+1 = (\lambda-\cos\theta)^2+\sin^2\theta.$$

Für die Umformungen wurde $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$ verwendet. Die Eigenwerte sind demnach

$$(\lambda-\cos\theta)^2+\sin^2\theta = 0 \implies \lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

Wenn $\sin\theta \neq 0$, d.h. $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dann gibt es zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ und $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$ mit algebraischer Vielfachheit von jeweils 1. Wenn $\sin\theta = 0$, d.h. $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dann gibt es nur einen Eigenwert $\lambda = \cos\theta$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Für ungerade Werte von k ist $\lambda = -1$, für gerade Werte von k ist $\lambda = 1$.

(b) Bestimmen Sie für alle Eigenwerte die Eigenräume und deren Dimensionen (geometrische Vielfachheit) in Abhängigkeit von θ. *(1 Pt.)*
Lösung:

$\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$: Wir bestimmen die Eigenvektoren für den Eigenwert $\lambda = \cos\theta$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta-\lambda & -0 \\ 0 & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich sind $(1,0), (0,1)$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren und somit ist der Eigenraum $E_\lambda = \mathbb{C}^2$, mit geometrischer Vielfachheit 2.

$\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$: Wir bestimmen die Eigenvektoren für den Eigenwert $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist der Eigenraum E_{λ_1} gegeben durch die Basis $[(i,1)]$, mit geometrischer Vielfachheit 1.

Für $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist der Eigenraum E_{λ_2} gegeben durch die Basis $[(1,i)]$, mit geometrischer Vielfachheit 1.

(c) Für welche Rotationswinkel gibt es reelle Eigenwerte und reelle Eigenvektoren? *(1 Pt.)*
Lösung: Reelle Eigenwerte erhalten wir für $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\lambda = \cos\theta$, also $\lambda = -1$ für eine Drehung mit π, und $\lambda = 1$ für eine Drehung mit 2π. Im ersten Fall wird ein Vektor auf sein Negatives abgebildet, im zweiten Fall auf sich selber. In beiden Fällen sind die möglichen reellen Eigenvektoren beliebige Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von folgenden Matrizen *(3 Pt.)*

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(i) **Eigenwerte:**

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$$

Der einzige Eigenwert ist $\lambda = 2$.
Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis für den Eigenraum E_λ ist gegeben durch $[(1,1)]$.

(ii) **Eigenwerte:**

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(4-\lambda)+0+0-0-2\cdot(-1)\cdot(2-\lambda)-0$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\right] = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis für den Eigenraum E_{λ_1} ist gegeben durch $[(1,0,0)]$.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis für den Eigenraum E_{λ_2} ist gegeben durch $[(1,1,-2)]$.

(iii) **Eigenwerte:**

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-5-\lambda)\cdot(4-\lambda)+(-3)\cdot 3\cdot 6+3\cdot 3\cdot(-6)$$

$$-6\cdot(-5-\lambda)\cdot 3-(-6)\cdot 3\cdot(1-\lambda)-(4-\lambda)\cdot 3\cdot(-3)$$

$$= -\lambda^3+12\lambda+16$$

Eine (geratene) Nullstelle ist $\lambda_1 = -2$. Polynomdivision ergibt

$$(-\lambda^3+12\lambda+16)/(\lambda+2) = -\lambda^2+2\lambda+8 = -(\lambda-4)(\lambda+2).$$

Das charakteristische Polynom ist also $-(\lambda-4)(\lambda+2)^2$ und es existiert noch ein zweiter Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda_1 & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis für den Eigenraum E_{λ_1} ist gegeben durch $[(1,1,0),(0,1,1)]$.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda_2 & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis für den Eigenraum E_{λ_2} ist gegeben durch $[(1,1,2)]$.

(b) Welche der obigen Matrizen sind diagonalisierbar? Geben Sie für diese Matrizen die Diagonalform sowie die zugehörige Basis an. *(1 Pt.)*

Lösung: Eine Matrix ist diagonalisierbar, falls für jeden Eigenwert die algebraische Multiplizität gleich der geometrischen Multiplizität ist. Die Multiplizitäten für alle Eigenwerte der Matrizen (i), (ii), (iii) sind:

	alg.	geom.
(i)	2	1
(ii)	2	1
	1	1
(iii)	2	2
	1	1

Nur bei der Matrix (iii) stimmen die Multiplizitäten überein, also ist nur diese Matrix diagonalisierbar. Die Basis bezüglich der (iii) diagonal ist, ist gegeben durch die Eigenvektoren

$$[v] = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right].$$

Die Einträge der Diagonalform sind durch die Eigenwerte der Basisvektoren gegeben

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Hinweis: die Transformation zwischen der Diagonalform und der ursprünglichen Matrix in der Standardbasis ist explizit gegeben durch

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}.$$