(v) $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{R}^3$, $\|v^{(1)}\| = \|v^{(2)}\| = 1$

$\langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle = 0$

$\Rightarrow$ $[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(1)} \times v^{(2)}]$ ist ON-Basis von $\mathbb{R}^3$

Innere Produkte auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen

Sei V ein $\mathbb{C}$ Vektorraum

Def.: Eine Abb. $\langle \,,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ (Hermite-sches Produkt) heißt inneres Produkt, wenn gilt

(1) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ $\forall v, w \in V$, wobei $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

insbesondere $\forall v \in V$, $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$, i.e. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$

(2) $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w \rangle = \alpha_1 \langle v_1, w \rangle + \alpha_2 \langle v_2, w \rangle$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

(3) $\forall v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $= 0 \iff v = 0$

Wir können wieder definieren

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle} \in [0,\infty] \quad \text{reell}$$

$$\|v\| \geq 0, \quad \|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$$

C.S: $\quad |\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$

aber es macht keinen Sinn einen Winkel zu schließen da $\langle v,w\rangle \in \mathbb{C}$

Standard Produkt in $\mathbb{C}^n$

$$\langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{w}_i \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$v_i, w_i \in \mathbb{C}$

Ist V ein endl. dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\langle\,,\rangle$, dann sagt man, V ist endl. dim. $\mathbb{C}$-Hilbertraum

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst unitär, wenn $\forall\, v,w \in \mathbb{C}^n$

$$\langle Av, Aw\rangle = \langle v,w\rangle$$

A unitär $\iff \bar{A}^T A = \mathrm{Id} \iff \bar{A}^T = A^{-1}$

$\cancel{\bar{A}}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$

Eine Basis $[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}]$ heisst $\mathbb{C}$-ON Basis,

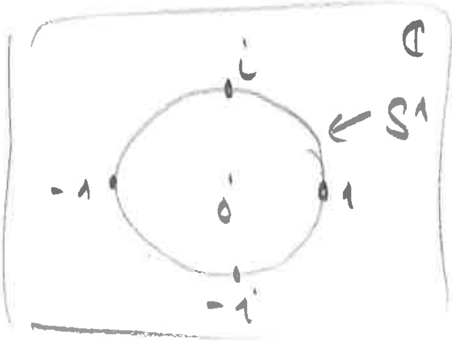
$:\Leftrightarrow \quad \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$

$A = (a^{(1)} | \dots | a^{(n)})$ unitär $\Leftrightarrow$ $[a^{(1)}, \dots, a^{(n)}]$ $\mathbb{C}$-ON Basis

$\mathcal{U}(n) := \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A \text{ unitär} \}$

$S\mathcal{U}(n) := \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A \text{ unitär}, \det A = 1 \}$

$A \in \mathcal{U}(n)$, $\det A \in S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

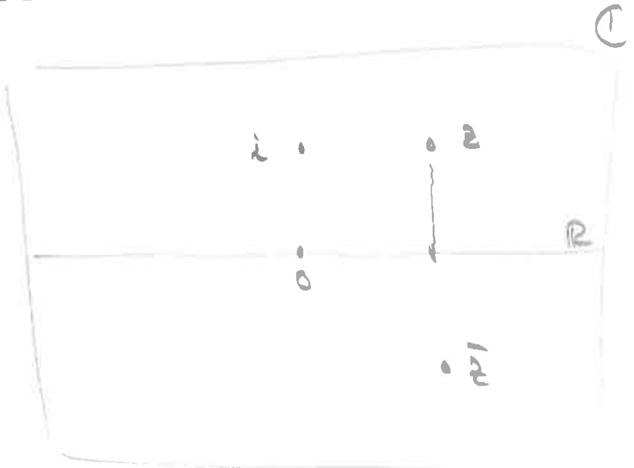


§ 4 Eigenwerte und Eigenvektoren

In diesem Kapitel werden wir Eigenwerte und Eigenvektoren untersuchen. In diesem gilt es einen Unterschied ob wir lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ Vektorräumen betrachten.

Wir werden zunächst $\mathbb{C}$ Vektorräume betrachten, da hier die Theorie einfacher ist.

Ich werde aber zunächst ein paar Dinge über die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ wiederholen, da sie dabei eine wichtige Rolle spielen.



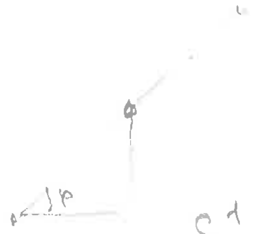
$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad a = \mathrm{Re}(z)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b = \mathrm{Im}(z)$

$\bar{z} = a - ib$ konjugiert komplexe Zahl

$i = \sqrt{-1}, \quad i \cdot i = -1$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \bar{z}}$



$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$z \in S^1$, $\quad z = \cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}$

<u>Polynome</u>: $\quad p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \sum a_k z^k$

Polynom vom Grad n. $\qquad p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\; z \mapsto p(z)$

Eine <u>Nullstelle</u> (oder W<u>urzel</u>, engl. <u>root</u>) von p ist $w \in \mathbb{C}$ s.d. $p(w) = 0$.

Ist w eine Nullstelle, dann kann man p schreiben als $\quad p(z) = (z - w)\, p_1(z)$

wobei p_1 Polynom vom Grad $(n-1)$.

<u>Satz</u> (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes komplexe Polynom vom Grad ≥ 1 hat eine Nullstelle.

Also anschaulich es gibt n Nullstellen.

d.h. $\exists\; z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ so dass

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

Hierbei können die z_i gleich sein

d. h. Es gibt verschiedene $\zeta_1, \ldots, \zeta_e \in \mathbb{C}$

und $m_1, \ldots, m_e \in \mathbb{N}$ so dass

$$p(z) = a_n (z - \zeta_1)^{m_1} \cdots (z - \zeta_e)^{m_e} \quad , \quad m_1 + \cdots + m_e = n$$

<u>Beispiel</u>: $\boxed{p(z) = z^2 + 1} = (z - i)(z + i)$

d. h. $z_1 = i, \; z_2 = -i$,

Polynome mit reellen Koeffizienten

Sei $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ Polynom

und $a_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i = n, \ldots, 0$

In diesem Fall können die Wurzel auch komplex sein (wie im Beispiel) doch mit jeder Wurzel $w \in \mathbb{C}$ ist auch $\overline{w} \in \mathbb{C}$ eine Wurzel. denn

$$p(w) = 0 \Rightarrow p(\overline{w}) = a_n \overline{z}^n + \cdots + a_0$$
$$= \overline{a_n} \overline{z}^n + \cdots \overline{a_0}$$
$$= \overline{p(w)} = \overline{0} = 0$$

Zurück zu linearer Alg.

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f: V \to V$ eine lineare Abbildung.

Def.: Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst Eigenwert von f, wenn es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$f(v) = \lambda v$$

d.h. durch f wird v nur mit λ gestreckt.
v heisst dann Eigenvektor von f zum Eigenwert λ

Beispiel: (a) $V = \mathbb{C}^n$, $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$f(v) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} v \quad , \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(e^{(j)}) = \lambda_j e^{(j)} \quad , \quad \text{wobei } e^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{te Stelle}$$

d.h. $e^{(j)}$ ist ein Eigenvektor.

<u>also:</u>

$$f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 \\ 3z_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum EW 2
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor

Wie kann man Eigenwerte berechnen?

$f: V \to V$ linear, V ein $\mathbb{C}$-VR

Sei $[v^{(1)}, \dots, v^{(n)}] = [v]$ Basis von V

und sei $A = f_{[v]\to[v]} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die entsprechend Matrix. Annahme $v \in V\setminus\{0\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^{(j)}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\} \text{ und}$$

$$Ax = \lambda x \quad \text{oder} \quad (A - \lambda \mathrm{Id}_n)x = 0$$

Somit is $(A - \lambda \mathrm{Id}_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nicht regulär und daher $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$.

Daher

<u>Satz</u>: λ Eigenwert $\overset{\text{von } f: V\to V}{\Longleftrightarrow}$ $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_n) = 0$

wobei $A = f_{[v]\to[v]}$

Wir untersuchen nun die Fkt:

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \det(A - z\,\mathrm{Id}_n)$$

<u>Beispiel</u>: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ diagonal.

$$\Rightarrow \det(A - z\,\mathrm{Id}_n) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-z & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}-z \end{pmatrix}$$

$= (a_{11} - z) \cdots (a_{nn} - z)$

Somit sind die Nullstellen $\lambda_1 = a_{11}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$ genau die Eigenwerte.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A - z\,\mathrm{Id}_2) = \det\begin{pmatrix} (a_{11}-z) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-z) \end{pmatrix}$$

$$= z^2 - (a_{11} + a_{22})z + \det A$$

Allgemein: $f : V \to V$, $\mathbb{C}$-linear (n-dim)

$A = f_{[v] \to [v]}$ für eine Basis $[v]$

$\Rightarrow$ (i) $z \longmapsto \det(A - z\,\mathrm{Id}_n)$ ist Polynom vom Grad n

$$\chi(z) = p_n z^n + \dots + p_1 z + p_0$$

wobei $p_n = (-1)^n$, $p_0 = \det A$

(ii) Jede Wurzel des Polynoms χ ist ein Eigenwert

Bemerkung: χ hängt nicht von der Basis ab

$A = f_{[v] \to [v]}$, $B = f_{[w] \to [w]}$

$S = \mathrm{id}_{[w] \to [v]} \Rightarrow A = S B S^{-1}$

$$\det(A - z\,Id_n) = \det(SBS^{-1} - z\,Id_n)$$
$$= \det(SBS^{-1} - z\,S\,Id_n\,S^{-1})$$
$$= \det(S(B - z\,Id_n)S^{-1})$$
$$= \det S \,\det(B - z\,Id_n)\,\det(S^{-1})$$
$$= \det(B - z\,Id_n)$$

Wir schreiben daher χ_f für χ, da χ nur von f abhängt und nicht von der Basis. χ_f heisst charakteristisches Polynom.

Equivalent: Wie viele Eigenwerte hat f. Equivalent: wie viele Nullstellen hat χ_f.

Da wir über $\mathbb{C}$ sind hat χ_f n Nullstellen, wenn sie mit Vielfachheiten gezählt werden. Die Vielfachheit der Nullstelle heisst die algebraische Multiplizität des entsprechenden Eigenwertes.

Beispiel: (i) $f: V \to V$ hat charakt. Polynom

$$\chi_f(z) = (1-z)^2 (3-z)^5 (4-z)^3$$

Nullstellen sind $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = 4$ mit

Multiplizitäten $m_1 = 2$, $m_2 = 5$, $m_3 = 3$

$$\Rightarrow \quad n = m_1 + m_2 + m_3 = \dim V$$

(ii) V $\mathbb{C}$-V.R., $f = id: V \to V$, $\Rightarrow f_{[V] \to [V]} = Id_n = A$

$$\det(Id_n - z I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-z \end{pmatrix} = (1-z)^n$$

i.e.: $z_1 = 1$, $m_1 = n$

Satz: f hat genau n Eigenwerte, wenn sie mit ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Terminologie: die Menge der Eigenwerte von f, mit ihren Multiplizitäten gezählt, ist das Spektrum von f, $\operatorname{spec}(f)$. Für Eigenwert λ sei m_λ die algebraische Multiplizität.

Beispiel: Ist $\chi_f(z) = (1-z)^2 (3-z)^5 (4-z)^3$ dann ist $\operatorname{spec}(f)$ gegeben durch

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_7 = 3, \ \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 4.$$

Def.: Sei λ ein Eigenwert von $f: V \to V$ so ist

$$E_\lambda = E_\lambda(f) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der Eigenraum von f zum Eigenwert λ.

$E_\lambda = \{0\} \cup \{v \in V \mid v$ Eigenvektor zum E.W. $\lambda\}$

Lemma: $E_\lambda(f)$ ist ein Unterraum von V.

d.h. $f(v) = \lambda v$, $f(w) = \lambda w$

$\Rightarrow f(v+w) = \lambda(v+w)$

Def.: $\dim(E_\lambda(f))$ heisst die geometrische Multiplizität von λ.

$f: V \to V$

Satz: (i) $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda$

$1 \leq$ geom. Multipl. $\leq$ algebr. Multipl.

(ii) $\dim E_\lambda(f) = m_\lambda$ $\forall \lambda$ Eigenwerte dann hat V eine Basis $[v]$ aus Eigenvektoren und $f_{[v] \to [v]}$ ist diagonal

Beispiele:

$$f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \text{ linear } \quad f = f_A$$

$$f_{[e] \to [e]} = A$$

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Schritt 1 bestimme Eigenwerte

$$\chi(z) = \det \begin{pmatrix} 1-z & 2 \\ 3 & 4-z \end{pmatrix} = (1-z)(4-z) - 6$$

$$= z^2 - 5z - 2$$

$$= (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)$$

$$z_\pm = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$$

Schritt 2 bestimme Eigenräume

$$E_{\lambda_1}(f) = E_{\lambda_1}(A)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(A) \iff \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 3 & 4-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda_1)x_1 + 2x_2 = 0 \quad , \quad 1-\lambda_1 \neq 0$$

wäre $x_2 = 0$, dann auch $x_1 = 0$.

Somit wähle $x_2 = 1$ (wir können ja Vielfaches von $\binom{x_1}{x_2}$ nehmen)

$$\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{1-\lambda_1}$$

Man checkt, dass $v^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{1-\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}(A)$

$$-\frac{6}{1-\lambda_1} + 4 - \lambda_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda_1)(4-\lambda_1) - 6 = 0$$

da algebraische Multiplizität $= 1$.

E_{λ_2}, zu lösen $\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 \\ 3 & 4-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

genauso wie oben

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{1-\lambda_2} \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}(A)$$

$$f(v^{(1)}) = \lambda_1 v^{(1)}$$

$$f(v^{(2)}) = \lambda_2 v^{(2)}$$

$$\Rightarrow \quad f_{[v] \to [v]} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Somit ist A diagonalisierbar, c.e.

$$A = f_{[e]\to[e]} = Id_{[v]\to[e]} \underbrace{f_{[v]\to[v]}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} Id_{[e]\to[v]}$$

$$Id_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{1-\lambda_1} & -\frac{2}{1-\lambda_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = S$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}}$$

kann man überpr.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} S = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{1-\lambda_1}+2 & -\frac{2}{1-\lambda_2}+2 \\ -\frac{6}{1-\lambda_1}+4 & -\frac{6}{1-\lambda_2}+4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2\lambda_1}{1-\lambda_1} & -\frac{2\lambda_2}{1-\lambda_2} \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{6}{1-\lambda_1}+4 = \lambda_1 \quad \text{wenn}$$

$$(1-\lambda_1)(4-\lambda_1) - 6 = 0$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Step 1: Eigenvalues

$$\chi(z) = \det \begin{pmatrix} 1-z & 1 \\ 0 & 2-z \end{pmatrix} = (1-z)(2-z)$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\quad m_1 = 1 = m_2$

Step 2: E_{λ_1}, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e.: $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $x_2 = 0$,

also z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow$ $$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}$

da $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq m_i = 1$

ist $\dim E_{\lambda_1} = \dim E_{\lambda_2} = 1$

somit $E_{\lambda_1} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\}$

$E_{\lambda_2} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\}$

Bezüglich der Basis $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

hat $f_{[v] \to [v]} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$A = \underset{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{f_{[e] \to [e]}} = \underset{\underset{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\overset{\parallel}{\underset{\parallel}{S}}}}{\mathrm{Id}_{[v] \to [e]}} \; \underset{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}}{f_{[v] \to [v]}} \; \underset{\overset{\parallel}{S^{-1}}}{\mathrm{Id}_{[e] \to [v]}}$$

also $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

also $\underset{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$