Übungsblatt 7

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 20. April 2016.

Aufgabe 1

Entscheiden Sie ob die folgenden Abbildungen linear sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die einen Vektor auf seine Länge abbildet. *(1 Pt.)*
Lösung: Die Abbildung ist nicht linear. Wäre die Abbildung linear, so müsste gelten $f(-1 \cdot v) = -1 \cdot f(v)$, doch ein Vektor hat dieselbe Länge wie sein Negatives.

(b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die einen Vektor um $45°$ dreht und um den Faktor 3 streckt. *(1 Pt.)*
Wir zeigen die Linearität der Abbildung, indem wir die Abbildungsmatrix aufstellen. Angenommen die Drehung ist im Uhrzeigersinn, wird sie durch die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Streckung mit Faktor 3 wird durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Folglich ist die Abbildungsmatrix für f

$$T = R \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(c) Die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , n \in \mathbb{N}.$$

Für welche $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ist f eine lineare Abbildung? *(1 Pt.)*
Lösung: Zuerst bestimmen wir die a_i für die gilt $f(\alpha x) = \alpha f(x)$:

$$f(\alpha x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i x^i,$$
$$\alpha f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha x^i.$$

Aus $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt für beliebige $x \in \mathbb{R}$

$$a_i\alpha^i = a_i\alpha,$$
$$a_i(\alpha^{i-1} - 1) = 0,$$

also muss gelten $a_i = 0$ oder $i = 1$. Folglich ist a_i nur dann ungleich 0 wenn $i = 1$ ist. Es kann also nur die folgende Abbildung linear sein:

$$f(x) = a_1 x.$$

Durch Nachprüfen der Bedingung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ sehen wir, dass diese Abbildung tatsächlich linear ist. Die gesuchte Lösung ist also

$$a_1 \in \mathbb{R}, a_i = 0 \text{ für } i \in \mathbb{N}\backslash 1.$$

(d) Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, x \mapsto \det(x).$$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist f eine lineare Abbildung? *(1 Pt.)*
Lösung: für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\alpha x) = \alpha^n \det(x)$. Für eine lineare Abbildung muss aber gelten $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Also kann die Determinante nur für $n = 1$ eine lineare Abbildung sein. Für $n = 1$ gilt ausserdem $\det(x + y) = x + y = \det(x) + \det(y)$, folglich ist die Determinante für $n = 1$ eine lineare Abbildung.

Aufgabe 2

Es sei gegeben die Basis $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und die Basis $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung T sei gegeben durch

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $T_{[e]\to[e]}$ bezüglich der Standardbasis $[e]$. *(1 Pt.)*
Lösung:

$$T_{[e]\to[e]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$, $\mathrm{Id}_{[w]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[w]}$. *(1 Pt.)*
Lösung:

$$\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = \left(v^{(1)}|v^{(2)}|v^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Id}_{[w]\to[e]} = \left(w^{(1)}|w^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Id}_{[e]\to[w]} = {\mathrm{Id}_{[w]\to[e]}}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $T_{[v]\to[w]}$.
Hinweis: Verwenden Sie $T_{[v]\to[w]} = \mathrm{Id}_{[e]\to[w]} T_{[e]\to[e]} \mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$. *(1 Pt.)*
Lösung:

$$T_{[v]\to[w]} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Sei x in Koordinatendarstellung bezüglich der Standardbasis $[e]$ gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung x' bezüglich der Basis $[v]$ von x. Berechnen Sie $T(x)$ in beiden Basisdarstellungen als $T_{[e]\to[e]}x$ und $T_{[v]\to[w]}x'$ und zeigen Sie, dass beide Darstellungen dasselbe Ergebnis haben. *(1 Pt.)*
Lösung:

$$x' = \mathrm{Id}_{[e]\to[v]}x = {\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}}^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y = T_{[e]\to[e]}x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y' = T_{[v]\to[w]}x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Es ist zu zeigen dass y und y' derselbe Vektor ist. Da y die Koordinatendarstellung bezüglich Basis $[e]$ und y' die Koordinatendarstellung bezüglich Basis $[w]$ ist, ist zu prüfen dass $y = \mathrm{Id}_{[w]\to[e]}y'$:

$$\mathrm{Id}_{[w]\to[e]}y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = y$$

Aufgabe 3

$X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezeichne die 60°-Rotation gegen den Uhrzeigersinn in der xz-Ebene um die y-Achse.

Hinweis zur Notation: Mit (x, y, z) wird der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet.

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix $X_{[e]\to[e]}$ an, wobei $[e] = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ die Standardbasis bezeichnet. *(1 Pt.)*

Lösung: Bezeichne $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$. Mit $60° \equiv \pi/3$, gilt

$$Xe_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) e_1 - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) e_3$$

$$Xe_2 = e_2$$

$$Xe_3 = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) e_1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) e_3\,.$$

Die Vorzeichen des Sinus macht man sich anhand einer Skizze klar. Man liest an den obigen Gleichungen ab:

$$X_{[e]\to[e]} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie $X^{-1}_{[e]\to[e]}$. Welche geometrische Interpretation hat die Abbildung X^{-1}? *(1 Pt.)*

Lösung: Die Inverse berechnet sich zu

$$X^{-1}_{[e]\to[e]} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Forme um und erhalte

$$X^{-1}_{[e]\to[e]} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & 0 & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Damit ist X^{-1} die Drehung um $-60°$ gegen den Uhrzeigersinn in der xz-Ebene um die y-Achse, also die Drehung um 60° im Uhrzeigersinn in der xz-Ebene um die y-Achse.

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $X_{[v]\to[v]}$, wobei $[v] = [(1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1)]$. Interpretieren Sie, warum $X_{[v]\to[v]} = X_{[e]\to[e]}$ gilt. *(2 Pt.)*
Erratum: Die Basis $[v]$ muss korrekterweise lauten: $[v] = [(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)]$.
Lösung: Nach Vorlesung gilt

$$\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\mathrm{Id}_{[e]\to[v]} = \mathrm{Id}^{-1}_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$X_{[v]\to[v]} = \mathrm{Id}_{[e]\to[v]} X_{[e]\to[e]} \mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Die Basis $[v]$ besteht aus einem Vektor in Richtung der Drehachse, v_2, und den beiden dazu senkrechten Vektoren v_1 und v_3. Ausserdem sind v_1, v_2, v_3 im gleichen Drehsinn angeordnet wie e_1, e_2, e_3. Deshalb sind die Abbildungsmatrizen in der $[v]$-Basis und $[e]$-Basis identisch.

Aufgabe 4

Hinweis: Die Notation wurde präzisiert.

Betrachten Sie die Vektorräume der Polynome $K_n[x]$ vom Grad kleiner gleich n, und die Abbildung $f\colon K_2[x] \to K_6[x]$ mit

$$f(t)(x) = \int_{6x-1}^{x^2} t(y)\,dy\,.$$

(a) Ist f linear? Beweisen Sie Ihre Antwort. *(1 Pt.)*
Lösung: Ja, f ist linear. Beweis: Sei $u, v \in K_2[x]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v)(x) &= \int_{6x-1}^{x^2} \alpha u(y) + \beta v(y)\,dy = \alpha \int_{6x-1}^{x^2} u(y)\,dy + \beta \int_{6x-1}^{x^2} v(y)\,dy \\ &= \alpha f(u)(x) + \beta f(v)(x)\,. \end{aligned}$$

Damit ist f nach der Definition einer linearen Abbildung linear.

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung A von f bezüglich der Basen $[v] = [1, x, x^2]$ und $[w] = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6]$. *(2 Pt.)*
Lösung: Berechne $f(t_i)(x), i = 1, 2, 3$ für $t_1(x) = 1, t_2(x) = x, t_3(x) = x^2$ aus der Basis $[v] = [1, x, x^2]$:

$$f(t_1)(x) = \int_{6x-1}^{x^2} 1\,dy = x^2 - 6x + 1\,,$$

$$f(t_2)(x) = \int_{6x-1}^{x^2} y\,dy = \frac{1}{2}(x^2)^2 - \frac{1}{2}(6x-1)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 18x^2 + 6x - \frac{1}{2}\,,$$

$$f(t_3)(x) = \int_{6x-1}^{x^2} y^2\,dy = \frac{1}{3}(x^2)^3 - \frac{1}{3}(6x-1)^3 = \frac{1}{3}x^6 - 72x^3 + 36x^2 - 6x + \frac{1}{3}\,.$$

Da die Abbildung f von einem 3-dimensionalen in einen 6-dimensionalen Vektorraum abbildet, hat die Abbildungsmatrix A 3 Spalten und 6 Zeilen, da $Ax = y$ gelten muss für $x \in \mathbb{R}^3$ und $y \in \mathbb{R}^6$. Lese anhand der obigen Rechenergebnisse ab:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -6 & 6 & -6 \\ 1 & -18 & 36 \\ 0 & 0 & -72 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(c) Geben Sie ein $s \in K_6[x]$ an, für das gilt: Es gibt kein $t \in K_2[x]$ mit $f(t)(x) = s(x)$. *(1 Pt.)*
Lösung: Zum Beispiel: $s(x) = x^5$. Das kann man z. B. daran erkennen, dass die 5. Zeile in A nur Nullen enthält:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -6 & 6 & -6 \\ 1 & -18 & 36 \\ 0 & 0 & -72 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ 0 \\ * \end{pmatrix}.$$

$*$ kennzeichnet einen beliebiger Eintrag. Damit ist im Ergebnisvektor der 5. Eintrag stets null. Dieser Eintrag gehört zum Basiselement x^5. Damit gibt es kein $t \in K_2[x]$ mit $f(t)(x) = x^5$.