# Übungsblatt 8

## Mathematik für die Chemie II

**Abgabe am 27. April 2016.**

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**

Sei $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

**(a)** Zeigen Sie: $v^\perp$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

**(b)** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $v_1, v_2$ und die Dimension von $v^\perp$.

**(c)** Überprüfen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v \\ | & | & | \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

**(d)** Stellen Sie den Vektor $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v\}$ dar.

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um $90^\circ$ um den Vektor $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2\}$ von $u^\perp$.

**(b)** Finden sie die Darstellungsmatrix $f_{[v]\to[v]}$ der Abbildung $f$ bezüglich der Basis $[v] = [v_1, v_2, v_3]$, wobei $v_3 := u$.

**(c)** Prüfen Sie nach, ob $f$ eine Isometrie ist.

**(d)** Bestimmen sie $f_{[e]\to[e]}$, wobei $[e]$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien

$$\begin{aligned} V &= \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \; f \text{ ist stetig}\}, \\ W &= \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \text{Die Ableitungsfunktion } f' : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ existiert und } f' \in V\} \end{aligned}$$

gegeben (die Ableitungen $f'(0)$ und $f'(1)$ einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind hier über die einseitigen Grenzwerte definiert).

**(a)** Zeigen Sie, dass $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und dass $W$ ein Unterraum von $V$ ist.

**(b)** Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 dx\, f(x) g(x).$$

Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt definiert.

**(c)** Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in V$ die Ungleichung

$$\int_0^1 dx\, f(x) g(x) \leq \left( \int_0^1 dx\, f^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 dx\, g^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt.

**(d)** Sei $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle : W \times W \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle\!\langle f, g \rangle\!\rangle = \int_0^1 dx\, f'(x) g'(x).$$

Definiert $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle : W \times W \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt?

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt aus der Vorlesung.

**(a)** Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt, dass

$$\langle v \times w, v \rangle = 0, \quad \langle v \times w, w \rangle = 0.$$

**(b)** Zeigen Sie, dass für $v, w \in \mathbb{R}^3$ die Gleichheit $v \times w = 0$ genau dann gilt, wenn $v$ und $w$ linear abhängig sind.