Übungsblatt 6

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 13. April 2016.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Prüfen Sie nach, ob es sich bei den folgenden Teilmengen um Untervektorräume handelt.

(a) Die Menge $\mathrm{Sym}_n := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^\top\}$ der symmetrischen $n \times n$ Matrizen. *Lösung:* Wir müssen nachprüfen ob die Summe zweier symmetrischer Matrizen sowie das Vielfache einer symmetrischen Matrix immernoch eine symmetrische Matrix ist. Seien also $A, B \in \mathrm{Sym}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist

a) $A + B =: C \in \mathrm{Sym}_n$,

b) $\lambda A \in \mathrm{Sym}_n$.

Es muss also $C = C^\top$ gelten. Da $A, B \in \mathrm{Sym}_n$ gilt $A = A^\top$ sowie $B = B^\top$. Daraus folgt

$$C = A + B = A^\top + B^\top = (A + B)^\top = C^\top \,,$$

also $C \in \mathrm{Sym}_n$. Ausserdem ist

$$\lambda A = \lambda A^\top = (\lambda A)^\top \,,$$

und somit auch $\lambda A \in \mathrm{Sym}_n$. Damit ist gezeigt, dass Sym_n ein Untervektorraum ist.

(b) Die Menge $U = \{f \in K_n[x] : f(2) = 0\}$. *Lösung:* Seien $f, g \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist wieder

a) $f + g \in U$,

b) $\lambda f \in U$.

Da die Summe zweier Polynome von Grad $\leq n$ (und das Produkt eines Polynoms von Grad $\leq n$ mit einem Skalar) wieder ein Polynom von Grad $\leq n$ ist, müssen wir nur zusätzlich $(f + g)(2) = 0$ und $(\lambda f)(2) = 0$ nachprüfen. Aber

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0 \,, \quad (\lambda f)(2) = \lambda \cdot f(2)0\lambda \cdot 0 = 0 \,.$$

Somit ist U ein Untervektorraum.

Aufgabe 2

Bilden die folgenden Mengen von Vektoren eine Basis des jeweiligen Vektorraumes V?

(a) *(1 Pt.)*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^3$.

Lösung: Wir nennen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und berechnen $\det(A) = 6 \neq 0$. Daraus folgt, dass die Gleichung $Ax = 0$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1}0 = 0$ hat, was die lineare Unabhängigkeit der Vektoren zeigt. Ausserdem kann jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination dieser drei Vektoren dargestellt werden, es gilt nämlich

$$b = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1} b\,.$$

Somit bilden die drei Vektoren eine Basis.

(b) *(1 Pt.)*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^4$.

Lösung: Mit Hilfe von Gausselimination sieht man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 4R_2]{R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_4]{R_2 \to 3R_2 - R_3, R_4 \to -1/4 R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Gleichung $Ax = 0$ die Lösungsmenge

$$L = \{(-2t, 0, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

hat; insbesondere ist $(0,0,0,0)$ nicht die einzige Lösung. Somit sind die Vektoren linear abhängig und bilden deshalb keine Basis.

(c) *(2 Pt.)*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

vom Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der 2×2 Matrizen. *Lösung*: Wir prüfen zuerst die lineare Unabhängigkeit der Matrizen. Sei also

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus muss nun folgen, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_4 = 0$. Die obige Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 3\lambda_1 + \lambda_4 & 6\lambda_1 - \lambda_2 - 8\lambda_3 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 12\lambda_3 - \lambda_4 & -6\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $\lambda_1, \ldots \lambda_4$ mit der zugehörigen Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Gausselimination ergibt

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_4 = 0$ und somit sind die Matrizen linear unabhängig. Da die Matrix ausserdem vollen Rang hat sind sie auch ein Erzeugendensystem und bilden somit eine Basis.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Rang von der folgenden Matrizen:

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow rang(M) = 3;$

(b) $M = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung: $M = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -26 & -13 \\ 0 & -18 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow rang(M) = 2;$

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

Lösung: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\implies rang(M) = 2;$

(d) $M = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung: $\det(M) = 102 \neq 0 \implies rang(M) = 3.$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei A eine 2×2 (reelle) Matrix, und $x \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, sodass $A^2x = 0$ und $Ax \neq 0$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass die Vektoren x, Ax eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass x und Ax linear unabhängig sind. Angenommen es ist $ax + bAx = 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Daraus folgt:

$$0 = A \cdot 0 = A(ax + bAx) = aAx + bA^2x = aAx.$$

Da $Ax \neq 0$ muss $a = 0$ sein. Aus der Annahme folgt dann $bAx = 0$ und daher $b = 0$. Wir schliessen, dass x und Ax linear unabhaïgig sind und somit eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.