Übungsblatt 7

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 20. April 2016.

Aufgabe 1

Entscheiden Sie ob die folgenden Abbildungen linear sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die einen Vektor auf seine Länge abbildet. *(1 Pt.)*

(b) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die einen Vektor um 45° dreht und um den Faktor 3 streckt. *(1 Pt.)*

(c) Die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , n \in \mathbb{N}.$$

Für welche $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ist f eine lineare Abbildung? *(1 Pt.)*

(d) Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, x \mapsto \det(x).$$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist f eine lineare Abbildung? *(1 Pt.)*

Aufgabe 2

Es sei gegeben die Basis $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

und die Basis $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die lineare Abbildung T sei gegeben durch

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $T_{[e]\to[e]}$ bezüglich der Standardbasis $[e]$. *(1 Pt.)*

(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$, $\mathrm{Id}_{[w]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[w]}$. *(1 Pt.)*

(c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $T_{[v]\to[w]}$.
Hinweis: Verwenden Sie $T_{[v]\to[w]} = \mathrm{Id}_{[e]\to[w]} T_{[e]\to[e]} \mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$. *(1 Pt.)*

(d) Sei x in Koordinatendarstellung bezüglich der Standardbasis $[e]$ gegeben durch

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung x' bezüglich der Basis $[v]$ von x. Berechnen Sie $T(x)$ in beiden Basisdarstellungen als $T_{[e]\to[e]}x$ und $T_{[v]\to[w]}x'$ und zeigen Sie, dass beide Darstellungen dasselbe Ergebnis haben. *(1 Pt.)*

Aufgabe 3

$X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezeichne die 60°-Rotation gegen den Uhrzeigersinn in der xz-Ebene um die y-Achse.

Hinweis zur Notation: Mit (x, y, z) wird der Spaltenvektor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ bezeichnet.

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix $X_{[e]\to[e]}$ an, wobei $[e] = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ die Standardbasis bezeichnet. *(1 Pt.)*

(b) Berechnen Sie $X^{-1}_{[e]\to[e]}$. Welche geometrische Interpretation hat die Abbildung X^{-1}? *(1 Pt.)*

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $X_{[v]\to[v]}$, wobei $[v] = [(1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1)]$. Interpretieren Sie, warum $X_{[v]\to[v]} = X_{[e]\to[e]}$ gilt. *(2 Pt.)*

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Vektorräume der Polynome $K_n[x]$ vom Grad kleiner gleich n, und die Abbildung $f\colon K_2[x] \to K_6[x]$ mit

$$f(t(x)) = \int_{6x-1}^{x^2} t(y)\, dy\,.$$

(a) Ist f linear? Beweisen Sie Ihre Antwort. *(1 Pt.)*

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung A von f bezüglich der Basen $[v] = [1, x, x^2]$ und $[w] = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6]$. *(2 Pt.)*

(c) Geben Sie ein $s(x) \in K_6[x]$ an, für das gilt: Es gibt kein $t(x) \in K_2[x]$ mit $f(t(x)) = s(x)$. *(1 Pt.)*