Lösung zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Überprüfen Sie anhand der Definition eines ($\mathbb{R}$-)Vektorraums, ob die folgenden Mengen ($\mathbb{R}$-)Vektorräume sind. Beweisen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. *(1 Pt.)*

(b) Die Menge $M = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}; A \text{ ist invertierbar}\}$ der invertierbaren 3×3-Matrizen. *(1 Pt.)*

(c) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. *(1 Pt.)*

(d) Die Kugel $B_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 1 um den Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. *(1 Pt.)*

Hinweis: Als Addition $+$ wird die gewöhnliche Addition von Zahlen, Vektoren bzw. Matrizen verwendet. Als Multiplikation $\cdot$ wird für ganze bzw. reelle Zahlen die gewöhnliche Multiplikation von Zahlen verwendet. Für Vektoren und Matrizen wird die komponentenweise Multiplikation mit einer reellen Zahl verwendet.

Lösung: Alle aufgeführten Mengen sind keine Vektorräume. Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Definition 4.1.1 eines $\mathbb{K}$-Vektorraums (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) aus dem Skript von Prof. Kappeler verwendet.

(a) Wähle $a = -2$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Dann gibt es kein Element $b \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, sodass $a + b = 0$, da $b = 2$ nicht in $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ liegt. Damit ist die Bedingung VS1 (ii) verletzt.

(b) Die einzige 3×3-Matrix O mit der Eigenschaft

$$A + O = A \qquad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da O nicht invertierbar ist ($\det O = 0$), ist $O \notin M$. Damit ist die Bedingung VS1 (iii) verletzt.

(c) Per Definition ist die Multiplikation definiert als $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, d. h. die Multiplikation muss in die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abbilden. Das heisst, dass für eine beliebige ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und eine beliebige reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ das Ergebnis $\lambda \cdot a$ wieder in $\mathbb{Z}$ liegen muss. Das ist nicht erfüllt, wähle zum Beispiel $a = 1$, $\lambda = 0.5$. In diesem Fall ist $\lambda \cdot a = 0.5 \notin \mathbb{Z}$.

(d) Wie in 3., nur mit Addition: $(0.8, 0, 0) \in B_1, (0.7, 0, 0) \in B_1$, aber $(0.8, 0, 0) + (0.7, 0, 0) \notin B_1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (G) das folgende lineare Gleichungssystem:

$$4x + y - 10z = a$$
$$2x - 3y - 12z = b$$

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum L_{hom} von (G) für $a = b = 0$ sowie die Dimension von L_{hom}. *(2 Pt.)*

Lösung:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -10 & 0 \\ 2 & -3 & -12 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -3\frac{1}{2} & -7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist

$$L_{\text{hom}} = \{(3t, -2t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R}\}.$$

L_{hom} hat die Basis $[(3, -2, 1)]$, d. h. einen Basisvektor. Nach Definition 4.1.4 aus dem Skript von Prof. Kappeler ist die Dimension von L_{hom} gleich eins.

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum L von (G) für $a = 5$ und $b = -1$. Handelt es sich bei L um einen Vektorraum? *(2 Pt.)*

Lösung: Durch Raten oder einen weiteren Gaussalgorithmus findet man die partikuläre Lösung

$$y_{\text{part}} = (1, 1, 0)$$

und der Lösungsraum L ist gegeben durch

$$L = L_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \} .$$

Es handelt sich bei L nicht um einen Vektorraum, da $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ nicht in L enthalten ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $U_1, \ldots, U_n$ Untervektorräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ einen Untervektorraum von V definiert. *(1 Pt.)*

Lösung: Seien $x, y \in U := U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Das bedeutet insbesondere, dass $x, y \in U_i, i \in \{1, \ldots, n\}$. Da die Mengen $U_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, Untervektorräume sind, gilt, dass $\alpha x, x + y \in U_i, i \in \{1, \ldots, n\}$. Daraus folgt, dass $\alpha x, x + y \in U$, also ist $U \subset V$ ein Untervektorraum.

(b) Sei die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ der Vektorräume $U_1, \ldots, U_n$ definiert durch

$$U_1 + \ldots + U_n = \{u \in V : \text{ Es existieren } u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n, \text{so dass } u = u_1 + \ldots + u_n.\}$$

Zeigen Sie, dass die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ einen Untervektorraum von V definiert. *(1 Pt.)*

Lösung: Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x, y \in U := U_1 + \ldots + U_n$. Per Definition existieren $u_i, v_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $x = \sum_{i=1}^n u_i$ und $v = \sum_{i=1}^n v_i$. Da die Mengen $U_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, Untervektorräume sind, folgt, dass $\alpha u_i, u_i + v_i \in U_i, i \in \{1, \ldots, n\}$. Folglich erhalten wir, dass $\alpha x = \sum_{i=1}^n \alpha u_i \in U$ und $x + y = \sum_{i=1}^n (u_i + v_i) \in U$. Damit ist $U \subset V$ ein Untervektorraum.

(c) Sei W der Unterraum $W = U_1 + U_2$ und nehmen Sie an, dass $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann jedes $w \in W$ eindeutig durch eine Summe $w = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ dargestellt wird. *(1 Pt.)*

Lösung: Sei $w = u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ mit $u_1, v_1 \in U_1, u_2, v_2 \in U_2$. Dann folgt, dass $U_1 \ni u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in U_2$, also $u_1 - v_1, u_2 - v_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und somit $u_1 = v_1, u_2 = v_2$. Damit ist die Darstellung von $w = u_1 + u_2$ eindeutig.

(d) Sei $W = U_1 + U_2$ wie in der letzten Teilaufgabe mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Zeigen Sie, dass zwei von null verschiedene Vektoren $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ stets linear unabhängig sind.

(1 Pt.)

Lösung: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, müssen wir zeigen, dass $\alpha = \beta = 0$ gilt. Da $U_1 + U_2$ ein Vektorraum ist, wissen wir, dass $0 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \in U_1 + U_2$. Per Annahme gilt ebenfalls $0 = \alpha u_1 + \beta u_2$. Nach dem letzten Aufgabenteil wissen wir, dass die Darstellung eines Vektors aus $U_1 + U_2$ eindeutig ist, also können wir schliessen, dass $\alpha = \beta = 0$.

Aufgabe 4* (Diese Aufgabe ist eine freiwillige Zusatzaufgabe, mit der 4 Zusatzpunkte aufgeholt werden können.)

Seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie (, falls möglich)

(a) $A \cdot B$ und $B^T \cdot A^T$. *(1 Pt.)*

Lösung: Es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 47 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 47 & 27 \end{pmatrix}.$$

(b) A^{-1} und B^{-1}. *(1 Pt.)*

Lösung: Wir berechnen zunächst $\det A = -1, \det B = 15$. Mit den Vorlesungsnotizen schliessen wir, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

sowie

$$B^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) $(A^T)^{-1}$ und $(B^T)^{-1}$. *(1 Pt.)*

Lösung: Mit den Vorlesungsnotizen schliessen wir mit Hilfe des letzten Aufgabenteils, dass

$$(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

sowie

$$(B^T)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) $\det(A \cdot B^T)$ und $\det(A^{-1} \cdot A^T)$. *(1 Pt.)*

Lösung: Es gilt

$$\det\left(A \cdot B^T\right) = \det A \cdot \det B^T = \det A \cdot \det B = -15$$

sowie

$$\det(A^{-1} \cdot A^T) = \frac{1}{\det A} \cdot \det A = 1.$$