Übungsblatt 6

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 13. April 2016.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Prüfen Sie nach, ob es sich bei den folgenden Teilmengen um Untervektorräume handelt.

(a) Die Menge $\mathrm{Sym}_n := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^\top\}$ der symmetrischen $n \times n$ Matrizen.

(b) Die Menge $U = \{f \in K_n[x] : f(2) = 0\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bilden die folgenden Mengen von Vektoren eine Basis des jeweiligen Vektorraumes V?

(a) *(1 Pt.)*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^3$.

(b) *(1 Pt.)*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

von $V = \mathbb{R}^4$.

(c) *(2 Pt.)*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

vom Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der 2×2 Matrizen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei A eine (reelle) 2×2 Matrix und $x \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, sodass $A^2 x = 0$ und $Ax \neq 0$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass die Vektoren x, Ax eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrizen (der Lösungsweg muss ersichtlich sein):

(a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $M_2 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

(d) $M_4 = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$