Übungsblatt 4

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 23. März 2016.

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen Sie deren Inverse. *(2 Pt.)*

Lösung: Für eine 2×2 Matrix wurde in der Vorlesung gezeigt, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

falls $\det(A) \neq 0$. Die Determinante ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} = b(a-b)$$

und die Inverse existiert falls $b \neq 0$ und $a \neq b$. Die Inverse ist dann

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{b(a-b)} \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie alle $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen Sie deren Inverse. *(2 Pt.)*
Lösung: die Determinante ist nach der Regel von Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot e \cdot 0 + b \cdot 0 \cdot f + c \cdot d \cdot 0 - f \cdot e \cdot c - 0 \cdot 0 \cdot a - 0 \cdot d \cdot b = -c \cdot e \cdot f,$$

folglich existiert die Inverse falls $c \neq 0, e \neq 0, f \neq 0$. Die Inverse berechnen wir mit dem Gauss-Eliminationsverfahren

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & e & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to (R_3 - aR_1 - bR_2)/c]{R_1 \to R_1/f, R_2 \to (R_2 - dR_1)/e}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} & -\frac{d}{ef} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{c} & \frac{-b}{ce} & -\frac{a}{cf} + \frac{bd}{cef} \end{array}\right].$$

Aufgabe 2

Seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -6 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 4 & 1-i & 2i \\ -3 & 4i & 0 \\ 1+2i & 5i & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

(a) $\det(A)$ *(1 Pt.)*
Lösung: Regel von Sarrus:

$$\det(A) = 1\cdot 2\cdot 1 + (-5)\cdot 0\cdot 4 + 3\cdot(-6)\cdot 7 - 4\cdot 2\cdot 3 - 7\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot(-6)\cdot(-5) = -178$$

(b) $\det(B)$ *(1 Pt.)*
Lösung: Man erhält eine Nullzeile mit $R_3 \to R_3 - 2R_2 + R_1$ (die Determinante ändert sich nicht wenn man zu einer Zeile das Vielfache einer anderen addiert). Folglich ist die Determinante $\det(B) = 0$.

(c) $\det(C)$ *(1 Pt.)*
Lösung:
Hinweis: komplexe Zahlen wurden in Mathe I eingeführt. Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(C) &= 4\cdot 4i\cdot(-1) + (1-i)\cdot 0\cdot(1+2i) + 2i\cdot(-3)\cdot 5i \\ &\quad - (1+2i)\cdot 4i\cdot 2i - 5i\cdot 0\cdot 4 - (-1)\cdot(-3)\cdot(1-i) \\ &= -16i + 0 + 30 + (8+16i) + 0 - (3-3i) = 35 + 3i \end{aligned}$$

(d) $\det\left(\left(\frac{1}{7}\left(B - A^T\right)\right)^k C^{-1}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$ *(1 Pt.)*
Lösung: Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten die Regeln

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$ und $det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Wir verwenden diese, um die Rechnung zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
&\det\left(\left(\frac{1}{7}\left(B - A^T\right)\right)^k C^{-1}\right)\\
=&\det\left(\left(\frac{1}{7}\right)^k \left(B - A^T\right)^k C^{-1}\right)\\
=&\left(\frac{1}{7}\right)^{3k} (\det(B - A^T))^k \frac{1}{\det(C)}.
\end{aligned}$$

Wir benötigen folgende Zwischenresultate:

$$\begin{aligned}
\det(B - A^T) =& \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\\
=& \det\begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 9 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}\\
=& 0 - 32 - 72 + 12 + 0 - 576\\
=& -668
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\det(C)} = \frac{1}{35 + 3i} = \frac{35 - 3i}{(35 + 3i)(35 - 3i)} = \frac{35 - 3i}{1234}.$$

Schliesslich erhalten wir

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{3k} (\det(B - A^T))^k \frac{1}{\det(C)} = \left(-\frac{668}{343}\right)^k \frac{35 - 3i}{1234}.$$

Aufgabe 3

Entscheiden Sie, ob folgende 3 Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden und wenn ja, stellen Sie den Vektor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Basisvektoren dar:

(a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} -3 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(2 Pt.)*

Lösung: Die Vektoren $u, v, z \in \mathbb{R}^3$ bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn man jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^3$ (also insbesondere auch b) eindeutig als Linearkombination von u, v und z darstellen kann. Setzen wir

$$A = (u \,|\, v \,|\, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 20 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dann ist die diese Aussage äquivalent dazu, dass das System $A \cdot x = b$ eindeutig lösbar ist. Mit Gauss-Verfahren berechnen wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 20 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to 1/5 R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{5} \\ 0 & 15 & 15 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to -1/45(R_3 - 15R_2)]{R_1 \to R_1 + 2R_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 4R_3]{R_1 \to R_1 - 5R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/15 \\ 0 & 1 & 0 & -17/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right).$$

Daraus schliessen wir, dass u, v, z eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, und $b = \frac{11}{15}u - \frac{17}{15}v + \frac{1}{3}z$.

(b) $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ *(2 Pt.)*

Lösung: Gauss-Verfahren ergibt jetzt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - \frac{3}{4}R_1]{R_1 \to \frac{1}{4}R_1, R_2 \to R_2 - \frac{7}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & 2 & -5/2 \\ 0 & -12 & 2 & 7/2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right),$$

was nicht lösbar ist. Somit ist u, v, z keine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a+2 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ bilden u, v und z eine Basis von $\mathbb{R}^3$? *(2 Pt.)*

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass u, v, z genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, wenn die Matrix $A = (u|v|z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & a & 3 \\ -2 & a+2 & 5 \end{pmatrix}$ regulär ist. Mit der Regel von Sarrus berechnen wir $\det(A) = 5a-12-a(a+2)+2a^2-3(a+2)+10 = a^2-8$, d.h. $\det(A) = 0 \iff a = \pm\sqrt{8}$. Folglich ist u, v, z eine Basis für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind u und v linear unabhängig? *(2 Pt.)*

Lösung: Wir setzen $\alpha u + \beta v = 0$ (wobei 0 der Nullvektor aus $\mathbb{R}^3$ ist), und betrachten das entsprechende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ -\alpha + a\beta &= 0 \\ -2\alpha + (a+2)\beta &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir die erste und zweite Gleichung addieren und das Ergebnis von der dritten Gleichung subtrahieren, kriegen wir $\alpha = 0$. Dann folgt aus der ersten Gleichung, dass auch $\beta = 0$, und wir schliessen dass u und v für alle $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.