Übungsblatt 5

Mathematik für die Chemie II

Abgabe am 6. April 2016.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Überprüfen Sie anhand der Definition eines ($\mathbb{R}$-)Vektorraums, ob die folgenden Mengen ($\mathbb{R}$-)Vektorräume sind. Beweisen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. *(1 Pt.)*

(b) Die Menge $M = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}; A \text{ ist invertierbar}\}$ der invertierbaren 3×3-Matrizen. *(1 Pt.)*

(c) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. *(1 Pt.)*

(d) Die Kugel $B_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 1 um den Mittelpunkt $(0, 0, 0)$. *(1 Pt.)*

Hinweis: Als Addition $+$ wird die gewöhnliche Addition von Zahlen, Vektoren bzw. Matrizen verwendet. Als Multiplikation $\cdot$ wird für ganze bzw. reelle Zahlen die gewöhnliche Multiplikation von Zahlen verwendet. Für Vektoren und Matrizen wird die komponentenweise Multiplikation mit einer reellen Zahl verwendet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (G) das folgende lineare Gleichungssystem:

$$4x + y - 10z = a$$

$$2x - 3y - 12z = b$$

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum L_{hom} von (G) für $a = b = 0$ sowie die Dimension von L_{hom}. *(2 Pt.)*

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum L von (G) für $a = 5$ und $b = -1$. Handelt es sich bei L um einen Vektorraum? *(2 Pt.)*

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $U_1, \ldots, U_n$ Untervektorräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ einen Untervektorraum von V definiert. *(1 Pt.)*

(b) Sei die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ der Vektorräume $U_1, \ldots, U_n$ definiert durch

$$U_1 + \ldots + U_n = \{u \in V : \text{ Es existieren } u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n, \text{so dass } u = u_1 + \ldots + u_n.\}$$

Zeigen Sie, dass die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ einen Untervektorraum von V definiert. *(1 Pt.)*

(c) Sei W der Unterraum $W = U_1 + U_2$ und nehmen Sie an, dass $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann jedes $w \in W$ eindeutig durch eine Summe $w = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ dargestellt wird. *(1 Pt.)*

(d) Sei $W = U_1 + U_2$ wie in der letzten Teilaufgabe mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Zeigen Sie, dass zwei von null verschiedene Vektoren $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ stets linear unabhängig sind. *(1 Pt.)*

Aufgabe 4* (Diese Aufgabe ist eine freiwillige Zusatzaufgabe, mit der 4 Zusatzpunkte aufgeholt werden können.)

Seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie (, falls möglich)

(a) $A \cdot B$ und $B^T \cdot A^T$. *(1 Pt.)*

(b) A^{-1} und B^{-1}. *(1 Pt.)*

(c) $(A^T)^{-1}$ und $(B^T)^{-1}$. *(1 Pt.)*

(d) $\det(A \cdot B^T)$ und $\det(A^{-1} \cdot A^T)$. *(1 Pt.)*