Determinanten

Wir hatten schon die Determinanten von 2×2 Matrizen definiert

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Wir haben folgende wichtige Eigenschaften gezeigt:

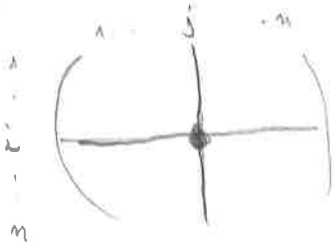
- $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist regulär $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$
- Cramer-Regel für die Lösung von $Ax = b$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

$$x_1 = \frac{\det\left(b \,\middle|\, \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\right)}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det\left(\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix} \,\middle|\, b\right)}{\det A}$$

Wir wollen nun allgemeiner für $(n\times n)$ Matrizen die Determinante einführen.
Wir führen das rekursiv auf $(n-1)\times(n-1)$ Matrizen zurück.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $1 \le i,j \le n$.
Dann sei $A^{(i,j)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix die man erhält indem man die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt.



Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$A^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $A^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$A^{(3,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^{(3,2)} =$

Nun betrachten wir (Motivation

$(n=1)$: $A = (a_{11}) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $\det(A) = a_{11}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

$= a_{11} \det(A^{(1,1)}) - a_{12} \det(A^{(1,2)})$

$= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A^{(1,j)})$

Definition: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\det A = \boxed{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1,j} \det(A^{(1,j)})}$$

Entwicklung nach der 1-ten Zeile

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2 - 6 - 6 = -10$

Ohne Beweis stelle ich nun die wichtigsten Tatsachen über Determinanten zusammen

<u>Satz</u>: (1) Man kann det A auch berechnen, indem man nach der k-ten Zeile entwickelt, die Formel lautet dann so:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det\left(A^{(k,j)}\right)$$

(2) Entwicklung nach der k-ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det\left(A^{(j,k)}\right)$$

(3) $\det(A) = \det(A^T)$

<u>Beispiel</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Entwicklung nach 2 ter <u>Zeile</u>: Vorzeichen $(-1)^{k+j}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -4 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot 2 + 2(-2) - 1(-2) = -10$$

Entwicklung 3-te Zeile:

$$\det(A) = 3 \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 3(-2) - 1(-2) + 1(-6) = -10.$$

Satz: (4) Vertauscht man zwei Spalten von A, dann ändert die Determinante das Vorzeichen

(5) Vertauscht man zwei Zeilen von A, ändert die Determinante das Vorzeichen

Beispiel:

$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2\cdot 3 - 1\cdot 2 + 3\cdot 2} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 10$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz: (6) Multipliziert man eine Spalte mit λ $\Rightarrow$ det wird mit λ multipliziert

(7) Multipliziert man eine Zeile mit λ, dann wird det mit λ multipliziert

Beispiel: also $A = \left(a^{(1)} \middle| a^{(2)} \middle| \dots \middle| a^{(n)} \right)$

$$A' = \left(a^{(1)} \middle| \lambda a^{(2)} \middle| a^{(3)} \middle| \dots \middle| a^{(n)} \right)$$

$$\det A' = \lambda \cdot \det A$$

Insbesondere: Ist eine Zeile oder eine Spalte $=0$ $\Rightarrow \det = 0$

Satz: (8) Addiert man zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile (d.h. macht man eine Zeilenoperation $R_i \rightsquigarrow R_i + \lambda R_j$) ändert sich die Determinante nicht.

(9) Addiert man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen, ändert sich die Det nicht.

Das heißt: (4), (6), (8) (und entsprechend (5), (7), (9)) zeigt, wie sich die Determinante bei den Zeilen- (und entsprechend beiden Spalten-) operationen verhält.

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 11/4 \\ 0 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 - \frac{1}{4} R_1 \\ R_3 - \frac{1}{4} R_1 \end{matrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 11/4 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} \qquad R_3 + \frac{1}{3} R_2$$

$$+ \frac{9}{12} + \frac{11}{12} = \frac{20}{12}$$

Satz: (10) Ist A eine obere Dreiecksmatrix

d.h. $a_{ij} = 0$ für $i < j$

$\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(11) entsprechend untere Δ-Matr.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 11/4 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = 10$$

Satz: (12) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ regulär

(13) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Satz (14) Cramersche Regel

Sei A regulär, dann ist das System

$Ax = b$ lösbar, $x = A^{-1}b$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_j = \frac{\det(A_{a^{(j)} \rightsquigarrow b})}{\det A}$$

dabei ist $A_{a^{(j)} \rightsquigarrow b}$ die Matrix die man erhält, indem man die j-te Zeile

(für die Praxis ist dies wohl nicht so effizient.

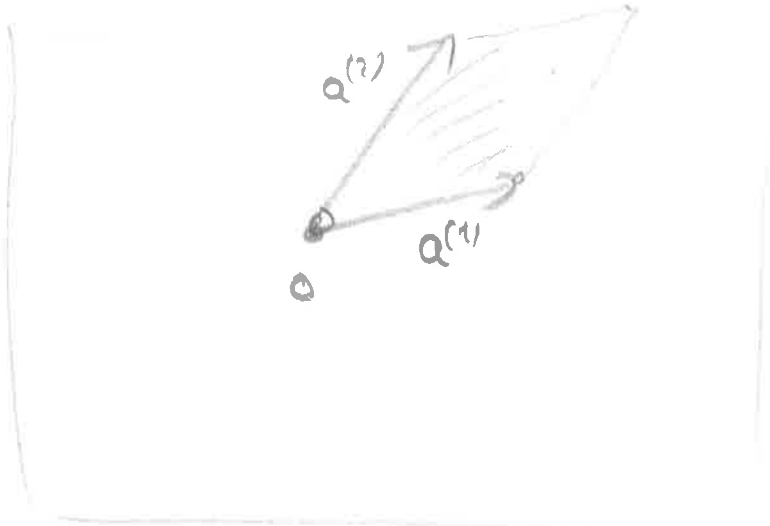
Viel-viel schneller ist es den Gauss Algorithmus anzuwenden

<u>geometrische Bedeutung der Determinante:</u>

$A = (a^{(1)} | \dots | a^{(n)})$ dann ist $\det(A)$

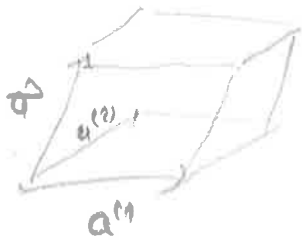
$= \pm$ volumen (Parallelepiped $(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$)

d.h. im $\mathbb{R}^2$



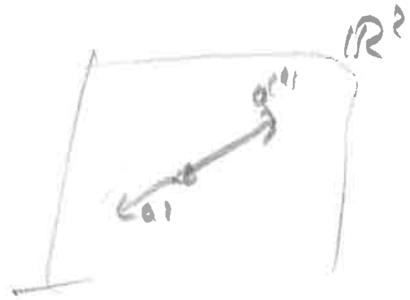
$\det(A) = \pm$ area (Parallelogr.)

Parallelogramm aufgespannt durch $a^{(1)}, a^{(2)}$



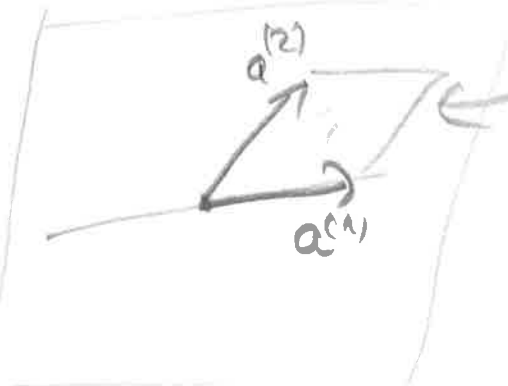
im 3-dim Spat.

$\det A = 0$, wenn dieses Parallelepiped degeneriert ist (d.h. niederdimensional

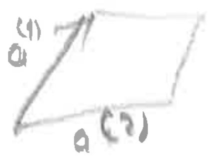


Vorzeichen hängt dann von der "Orientierung der Basis $a^{(1)} \dots a^{(n)}$ ab

z.B.:



$\det\left(a^{(1)} | a^{(2)}\right) > 0$

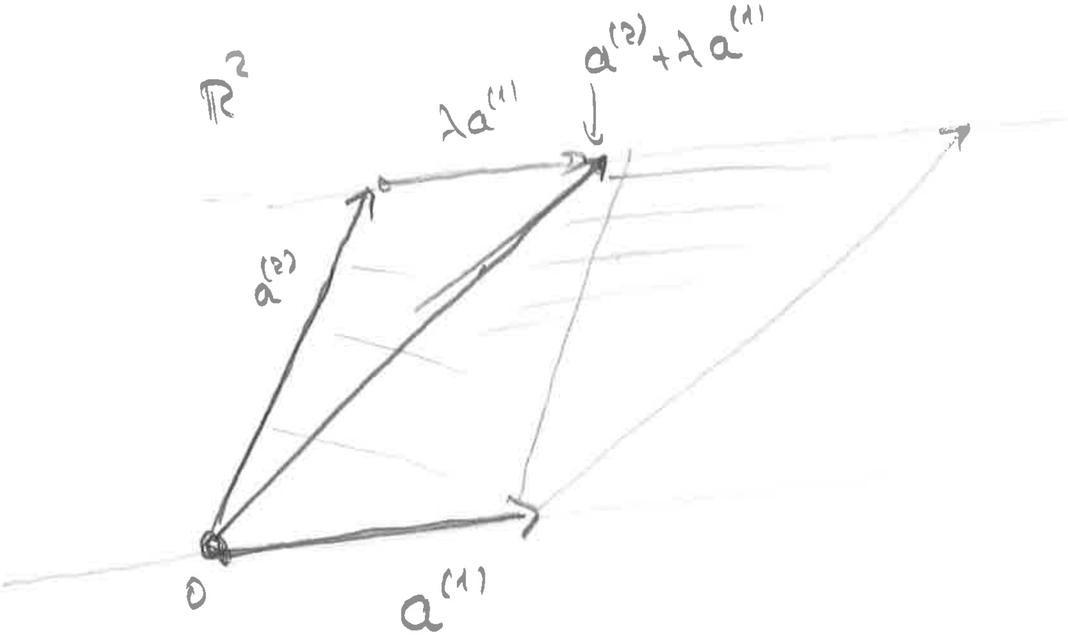


det < 0

Die Rechenregeln für die Determinante entsprechen einfachen geometrischen Sachverhalten:

z.B. Regel: Addieren zu einer Spalte das Vielfache einer anderen ändert nicht die Det.

entspricht der "Scherung"!



Komplexe Matrizen.

Man kann auch komplexe Matrizen betrachten. Einträge sind dann in $\mathbb{C}$

$$\det \begin{pmatrix} 5+2i & i \\ -i & 2+i \end{pmatrix} = (5+2i)(2+i) - (-i)(i)$$
$$= 10 + 4i + 5i - 2 - 1$$
$$= 7 + 9i$$

$$\begin{pmatrix} 5+2i & i \\ -i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+6i - i^2 \\ -3i - 2i - i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+6i \\ 1-5i \end{pmatrix}$$

etc. . .

§2 Vektorräume, lineare Abbildungen

Der $\mathbb{R}^n$ hat eine "Vektorraum"-Struktur

Allgemein:

Definition: Ein reeller Vektorraum ist eine

Menge V mit zwei Operationen:

eine Addition: d.h. zu $v, w \in V$ ist $v+w \in V$ erklärt

eine Skalarmultiplikation zu $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda v \in V$ erklärt.

so dass folgende Rechenregeln gelten:

VR1: $+$ ist assoziativ und kommutativ, d.h.

$$u+(v+w) = (u+v)+w, \quad v+w = w+v$$

Weiter existiert ein Element $0 \in V$, so dass

$$0+v = v+0$$

zu jedem $v \in V$ existiert eindeutiges $-v \in V$ mit $v+(-v)=0$ (($(V,+)$ ist abelsche Gruppe))

VR2: Distributivgesetze: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v, w \in V$

$$(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$$

$$\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$$

VR3: Assoziativität der Sk. Multip. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

VR4: $1 \cdot v = v$,

Man kann genauso komplexe Vektorräume beschreiben, statt $\mathbb{R}$, ist dann der Skalar in $\mathbb{C}$,

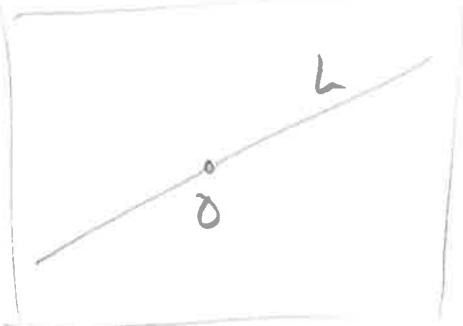
Vorsicht: Die $0 \in V$ aus VR1 ist der "Nullvektor" und nicht zu verwechseln mit $0 \in \mathbb{R}$

Beispiele von Vektorräumen

(a) Sei $Ax = 0$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

ein homogenes Gleichungssystem (m Gleichungen mit n Unbekannten)

$L \subset \mathbb{R}^n$ die Menge der Lösungen



Dann ist L ein Vektorraum.

ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L$

(b) Sei $K_n[x]$ die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$. K ist entweder $\mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ (z.B. $\mathbb{R}$)

$f \in K_n[x] \iff f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ~~(oder wenn K=~~

Polynome kann man addieren und skalar multiplizieren.

(c): V = Menge der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Addition: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Skal. Mult.: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Def.: V Vektorraum, $W \subset V$ nichtleer, mit der Eigenschaft

$w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$ und $\lambda w \in W$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Dann heisst W Untervektorraum von V.

Def.: V Vektorraum. Eine Basis ist eine Folge $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in V$, so dass jeder Vektor v eindeutig als

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^{(i)}}_{\text{Linearkombination}}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden kann