Lösung zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

(a) $A + B$ und $A - B$.
Es ist

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+1 \\ 3-1 & 2+1 & 1+0 \\ 2+0 & 1+1 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 3-1 \\ 3+1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 1-1 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 & 3\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 3\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 14 \\ 11 & 11 & 14 \\ 11 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+1 \\ -1-1 & 1 & -1 \\ -1 & 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+8 & 4+2 & 4+2+8 \\ 12+2 & 4+3 & 4+3+2 \\ 8+8 & 4+2 & 4+2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 14 \\ 14 & 7 & 9 \\ 16 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Bemerken Sie, dass dieses Resultat nicht mit $A^2 - B^2$ übereinstimmt, d.h. die dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ stimmt i.A. für Matrizen nicht (warum?).

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Produkte (gemäss der Vorlesung) definiert sind und berechnen Sie.

(a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt multiplizieren wir eine 3×3-Matrix mit einer 3×1-Matrix und erhalten eine 3×1-Matrix. Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 28 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt multiplizieren wir die verbliebene 1×3-Matrix mit der erhaltenen 3×1-Matrix und erhalten das Endergebnis

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 28 \\ 7 \end{pmatrix} = (4 \cdot 15 + 2 \cdot 28 + 5 \cdot 7) = 151.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 & 10 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 17 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Dieses Produkt ist nicht definiert. Zwar würden wir im ersten Schritt eine 3×2-Matrix, das Produkt einer 3×4-Matrix mit einer 4×2-Matrix, erhalten, aber das zweite Produkt einer 2×2-Matrix mit einer 3×2-Matrix ist nicht definiert.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt erhalten wir eine 3×3-Matrix als Produkt einer 3×1-Matrix mit einer 1×3-Matrix. Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 8 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 8 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 32 \\ 5 & 10 & 40 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt erhalten wir als Endergebnis eine 1×3-Matrix als Produkt einer 1×3-Matrix mit der erhaltenen 3×3-Matrix. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 32 \\ 5 & 10 & 40 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 32 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16 & 32 & 128 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\left(\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten zunächst

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) & 1 \cdot 7 + 7 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot 7 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Finden Sie alle Matrizen B, die mit der Matrix A kommutieren (d.h. $AB = BA$), wobei

(a) Wir schreiben

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$AB = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix},$$

sowie

$$BA = \begin{pmatrix} a + 3b & 2a + 4b \\ c + 3d & 2c + 4d \end{pmatrix}.$$

Somit müssen die Parameter das folgende Gleichungssystem erfüllen

$$\begin{cases} a + 2c &= a + 3b \\ b + 2d &= 2a + 4b \\ 3a + 4c &= c + 3d \\ 3b + 4d &= 2c + 4d \end{cases} \iff \begin{cases} 2c - 3b &= 0 \\ 2a + 3b - 2d &= 0 \\ a + c - d &= 0 \\ 3b - 2c &= 0 \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem löst sich (z.b. mit Hilfe von Gausselimination) zu

$$d, c \in \mathbb{R}, a = d - c, b = \frac{2}{3}c\,.$$

Somit haben alle Matrizen, die mit A kommutieren, die Form

$$B = \begin{pmatrix} d-c & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}, \quad d, c \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Genau gleich berechnen wir

$$AB = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix},$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+6b \\ c+3d & 2c+6d \end{pmatrix}.$$

Dies führt wieder zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2c &= 3b \\ b+2d &= 2a+6b \\ 3a+6c &= c+3d \\ 2c &= 3b \end{cases}.$$

Addition des Doppelten der dritten Zeile zum Dreifachen der Zweiten ergibt

$$\begin{cases} 2c &= 3b \\ 2c &= 3b \\ 3a+5c-3d &= 0 \\ 2c &= 3b \end{cases}.$$

Wir können somit zwei Parameter frei wählen und entschliessen uns für c und d. Dieses Gleichungssystem hat somit die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(d - \frac{5}{3}c, \frac{2}{3}c, c, d) : c, d \in \mathbb{R}\}\,.$$

Somit haben die Matrizen B die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} d - \frac{5}{3}c & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{mit } c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen regulär sind und bestimmen Sie das Inverse (falls es existiert).

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir versuchen die Inverse der Matrix über das Gauss-Verfahren zu bestimmen. Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+II, 3III-II'} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Als nächstes berechnen wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{3I-2II, \frac{1}{11}\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right).$$

Im vorletzten Schritt erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{I-III, II+2III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{21}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{9}{11} & \frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right).$$

Damit erhalten wir die Inverse A^{-1} der Matrix A mit

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie im ersten Teil versuchen wir das Gauss-Verfahren anzuwenden. Nach Subtraktion der ersten von der dritten Zeile und darauffolgender Subtraktion des dreifachen der resultierenden dritten Zeile von der zweiten Zeile erhalten wir jedoch

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III-I, II-3III'} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Da wir eine Nullzeile erhalten, sehen wir, dass die Matrix B nicht invertierbar sein kann.