Lösung zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (4 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Gleichungssystem mit den zwei Unbekannten x, y sowie den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x + ay &= 7 \\ -ax + (3+2a)y &= 4 + b. \end{aligned}$$

(a) Für welche Werte von (a, b) besitzt das obige Gleichungssystem eine eindeutige Lösung?

Wir berechnen gemäss Theorem 1.1.1. (i) die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 3 & a \\ -a & 3+2a \end{pmatrix} = 9 + 6a + a^2 = (3+a)^2. \tag{1}$$

Die Determinante ist also genau dann ungleich 0, falls $a \neq -3$. Das Gleichungsystem hat also für jedes paar $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \times \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung.

(b) Für welche Werte von (a, b) besitzt das obige Gleichungssystem keine Lösung und für welche Werte von (a, b) besitzt es unendlich viele Lösungen?

Nach Teil (a) genügt es, den Fall $a = -3$ zu betrachten. Wir erhalten damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 7 \\ 3x - 3y &= 4 + b. \end{aligned}$$

Falls $b \neq 3$, besitzt das Gleichungssystem offenbar keine Lösung. Falls hingegen $b = 3$ gilt, so erhalten wir unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems gegeben durch die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - \frac{7}{3}\}$.

Aufgabe 2: Das Gauß'sche Eliminationsverfahren (4 Punkte)

Finden Sie die Menge aller Lösungen der folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

(a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 8 \\ x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 &= \frac{11}{3} \\ \frac{6}{5}x_1 + 3x_2 + \frac{22}{5}x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung zunächst mit 3 und die dritte Gleichung mit 5. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 11 \\ 6x_1 + 15x_2 + 22x_3 &= 40. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt ziehen wir die erste Gleichung einmal von der zweiten Gleichung und zweimal von der dritten Gleichung ab. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 8 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 29x_2 + 2x_3 &= 24. \end{aligned}$$

Als nächstes eliminieren wir x_2 in der letzten Gleichung, in dem wir die dritte Gleichung mit 2 und die zweite Gleichung mit 29 multiplizieren und die resultierende zweite Gleichung von der dritten Gleichung abziehen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + 10x_3 &= 8 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 91x_3 &= -39. \end{aligned}$$

Indem wir nun das $\frac{3}{91}$-fache (bzw das $\frac{10}{91}$-fache) der dritten Zeile zur zweiten addieren (von der ersten subtrahieren) eliminieren wir x_3

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 &= \frac{86}{7} \\ 2x_2 &= \frac{12}{7} \\ 91x_3 &= -39. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt eliminieren wir x_2 in der ersten Zeile, indem wir das $\frac{7}{2}$-fache der zweiten zur ersten Zeile addieren

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{128}{21} \\ x_2 &= \frac{6}{7} \\ x_3 &= -\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass die eindeutige Lösung des Gleichungssystems durch $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{128}{21}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7})$ gegeben ist. In Matrixschreibweise sieht das folgendermassen aus. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 10 & 8 \\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{6}{5} & 3 & \frac{22}{5} & 8 \end{array}\right].$$

Wir bringen diese nun in Zeilenstufenform. $R_2 \to 3R_2$, $R_3 \to 5R_3$ ergibt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 10 & 8 \\ 3 & -5 & 7 & 11 \\ 6 & 15 & 22 & 40 \end{array}\right].$$

Mit $R_2 \to R_2 - R_1$ und $R_3 \to R_3 - 2R_2$ haben wir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 10 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 29 & 2 & 24 \end{array}\right].$$

Nun ergibt $R_3 \to 2R_3 - 29R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 10 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 91 & -39 \end{array}\right].$$

Hier machen wir $R_3 \to \frac{1}{91}R_3$, $R_2 \to R_2 + 3R_3$ und $R_1 \to R_1 - 10R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 0 & \frac{86}{7} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{91} \end{array}\right].$$

Mit $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ und $R_1 \to R_1 + 7R_2$ kriegt man

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & \frac{128}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{91} \end{array}\right].$$

Zuletzt ergibt $R_1 \to \frac{1}{3}R_1$ die gewünschte Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{128}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{39}{91} \end{array}\right].$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 16x_2 + 2x_3 &= 22 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 &= 46. \end{aligned}$$

Wir ziehen die erste Gleichung einmal von der dritten Gleichung und zweimal von der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$\begin{aligned} 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_2 - 4x_3 &= 20 \\ 9x_2 - 9x_3 &= 45. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die beiden letzten gleichungen äquivalent sind. Damit erhalten wir sofort die Lösungsmenge L

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{51}{2} + \frac{7}{2}z, y = 5 + z\}. \tag{2}$$

In Matrixschreibweise haben wir wieder

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -10 & 3 & 1 \\ 4 & -16 & 2 & 22 \\ 2 & -1 & -6 & 46 \end{array}\right] \underset{R_3 \to R_3 - R_1, R_1 \to \frac{1}{2}R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - 2R_1}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -4 & 20 \\ 0 & 9 & -9 & 45 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2 \to \frac{1}{4}R_2}{\overset{R_3 \to R_3 - \frac{9}{4}R_2}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \to R_1 + 5R_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{51}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

was die erwünschte Lösung gibt.