9ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées

Brasov, Roumanie, 2008

Sur des problèmes de perturbations singulières anisotropes

Senoussi GUESMIA, **Michel CHIPOT**

Angewandte Mathematik, Universität Zürich

Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zürich,.

1. Comportement Asymptotique

1.1. Un problème modèle. $\Omega = (0,1) \times (0,1)\,,\ \varepsilon > 0,\ x = (x_1, x_2)$

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \partial_{x_1}^2 u_\varepsilon - \partial_{x_2}^2 u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Que se passe-t-il qand $\varepsilon \to 0$?

La limite naturelle est u_0 solution de

$$\begin{cases} -\partial_{x_2}^2 u_0 (x_1, \cdot) = f (x_1, \cdot) & \text{dans } \omega_2 = (0,1)\,, \\ u_0 (x_1, \cdot) = 0 & \text{sur } \partial\omega_2. \end{cases}$$

Si

$$f = f(x_2) \neq 0 \quad \Longrightarrow u_0 = u_0(x_2) \notin H_0^1(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$u_\varepsilon \nrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega)$$

Mais on a

Theorem 1.1. *Pour* $\Omega_a = (a, 1-a) \times (0,1)\,,\ a > 0,$ *on a*

$$|u_\varepsilon - u_0|_{H^1(\Omega_a)} \leq Ce^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}},$$

$\alpha, C > 0$.

1.2. **Le cas général.** Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, de frontière $\partial\Omega$.

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (X_1, X_2), \qquad X_1 = (x_1, \ldots, x_p)\,, \qquad X_2 = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u)^T = \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u \\ \nabla_{X_2} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_p} u)^T \\ (\partial_{x_{p+1}} u, \ldots, \partial_{x_n} u)^T \end{pmatrix}.$$

Soit

$A = (a_{ij}(x))$ une matrice $n \times n$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

où A_{11}, A_{22} sont des matrices carrées $p \times p$ et $(n-p) \times (n-p)$ respectivement.

Hypothèses

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

$$A\xi \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ p.p. } x \in \Omega. \tag{1.2}$$

$$\Downarrow$$

$$A_\varepsilon \xi \cdot \xi \geq \lambda \{\varepsilon^2 |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

Pour $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique u_ε de

$$(\mathrm{P}\varepsilon) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

Estimation a priori

Prenant $v = u_\varepsilon$

$$\lambda \int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 \, dx \leq \langle f, u_\varepsilon \rangle \leq |f|_{L^2(\Omega)} |u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}$$

L'inégalité de Poincaré

$$\Downarrow$$

$$\lambda \int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2 \, dx \leq C |f|_{L^2(\Omega)} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{C^2}{2\lambda} |f|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2} |\nabla_{X_2} u_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Alors

$$(1.3) \qquad u_\varepsilon, \quad |\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon|, \quad |\nabla_{X_2} u_\varepsilon| \quad \text{sont bornés dans } L^2(\Omega).$$

$\exists\ u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in \left[L^2(\Omega)\right]^p$, $u_2 \in \left[L^2(\Omega)\right]^{n-p}$ (à une sous suite près)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \qquad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup u_1, \qquad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup u_2 \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

(La convergence dans $L^2(\Omega) \Longrightarrow$ la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$)

$$\Downarrow$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0, \qquad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup 0, \qquad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

u_0 solution du problème réduit

$$(P_\varepsilon) \Longleftrightarrow$$

$$\int_\Omega \varepsilon^2 A_{11} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v \, dx + \int_\Omega \varepsilon A_{12} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_1} v \, dx + \int_\Omega \varepsilon A_{21} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} v \, dx$$
$$+ \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$

(1.4) $$\int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Pour simplifier on prend

$$\Omega = U \times V \qquad U \subset \mathbb{R}^p, \quad V \subset \mathbb{R}^{n-p}$$

$$v = \varphi \eta, \qquad \eta \in H_0^1(V), \qquad \varphi \in H_0^1(U)$$

$$\int_U \eta(X_1) \int_V A_{22}(X_1, X_2) \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} \varphi(X_2) \, dX_2 \, dX_1$$
$$= \int_U \eta(X_1) \int_V f(X_1, X_2) \varphi(X_2) \, dX_2 \, dX_1 \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(U_i),$$

$$\Downarrow$$

$$\int_V A_{22}(X_1, X_2) \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} \varphi(X_2) \, dX_2 = \int_V f(X_1, X_2) \varphi(X_2) \, dX_2 \ \text{ p.p. } X_1$$

Ω quelconque, $\quad \Pi_\Omega$: la projection de Ω sur l'espace $X_2 = 0$

$$\Omega_{X_1} = \{\, X_2 \mid (X_1, X_2) \in \Omega \,\}.$$

On a aussi pour p.p. $X_1 \in \Pi_\Omega$

$$\int_{\Omega_{X_1}} A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} v \, dX_2 = \int_{\Omega_{X_1}} f v \, dX_2 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega_{X_1})$$

Si on suppose que

$$\int_\Omega |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dx = \int_{\Pi_\Omega} \int_{\Omega_{X_1}} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dX_2 \, dX_1 \longrightarrow 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\Omega_{X_1}} |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dX_2 \longrightarrow 0 \quad \text{p.p. } X_1 \in \Pi_\Omega.$$

Car $u_\varepsilon(X_1, \cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1})$

$$u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1}) \ \text{ p.p. } X_1 \in \Pi_\Omega.$$

La convergence forte

Prenant $v = u_\varepsilon$ et $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans (1.4)

$$\int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dx = \int_\Omega f u_0 \, dx. \tag{1.5}$$

Posant

$$I_\varepsilon = \int_\Omega A_\varepsilon \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \\ \nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0) \end{pmatrix} dx. \tag{1.6}$$

Par (P_ε)

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon = \int_\Omega f u_\varepsilon \, dx - \int_\Omega \varepsilon A_{12} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_1} u_\varepsilon \, dx - \int_\Omega \varepsilon A_{21} \nabla_{X_1} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 \\
- \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_\varepsilon \, dx - \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_\varepsilon \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dx \\
+ \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 dx \\
\longrightarrow \int_\Omega f u_0 \, dx - \int_\Omega A_{22} \nabla_{X_2} u_0 \cdot \nabla_{X_2} u_0 \, dx = 0. \qquad \text{de (1.5)}
\end{aligned}
$$

De l'ellipticité du problème

$$\lambda \int_\Omega \varepsilon^2 |\nabla_{X_1} u_\varepsilon|^2 + |\nabla_{X_2} (u_\varepsilon - u_0)|^2 \, dx \leq I_\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0, \qquad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \nabla_{X_2} u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Alors $u_0 = u_0(X_1, \cdot)$ est la solution unique de

$$
(1.7) \quad \begin{cases}
\displaystyle\int_{\Omega_{X_1}} A_{22} \nabla_{X_2} u_0(X_1, X_2) \cdot \nabla_{X_2} v(X_2) \, dX_2 \\
\qquad\qquad = \displaystyle\int_{\Omega_{X_1}} f(X_1, X_2) v(X_2) \, dX_2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega_{X_1}), \\
u_0(X_1, \cdot) \in H_0^1(\Omega_{X_1}).
\end{cases}
$$

Theorem 1.2. *On a*

(1.8)

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0, \qquad \nabla_{X_2} u_\varepsilon \longrightarrow \nabla_{X_2} u_0, \qquad \varepsilon \nabla_{X_1} u_\varepsilon \longrightarrow 0 \qquad \textit{dans } L^2(\Omega)$$

2. Amélioration du taux de convergence

Ω est un domaine cylindrique

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega_1 \times \omega_2, \\ \forall X_1 &\in \Pi_\Omega = \omega_1 \text{ on a } \Omega_{X_1} = \omega_2 \end{aligned}$$

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses*

$$\partial_{x_k} f \in L^2(\Omega), \ \partial_{x_k} A_{22} \in L^\infty(\Omega) \quad \forall k = 1, \ldots, p, \tag{2.1}$$

On a

$$\begin{aligned} u_0 &\in H^1(\Omega), \\ u_0 &= 0 \ sur \ \omega_1 \times \partial\omega_2. \end{aligned}$$

Theorem 2.2. *Soit* $\omega_1' \subset\subset \omega_1$, *et si*

$$\partial_{x_i} a_{ij}, \ \partial_{xj} a_{ij} \in L^\infty(\omega_1 \times \omega_2) \qquad i = 1, \ldots, p, \quad j = p+1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

les estimations suivantes sont vérifiées

$$|u_\varepsilon - u_0|_{L^2(\omega_1' \times \omega_2)}, \ |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|_{L^2(\omega_1' \times \omega_2)} \le C\varepsilon,$$

$$et \qquad \nabla_{X_1} u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_{X_1} u_0 \ \ faiblement \ dans \ L^2(\omega_1' \times \omega_2).$$

Theorem 2.3. *Si la matrice vérifie*

$$A_{12} = A_{21} = 0,$$

On a $\quad |u_\varepsilon - u_0|_{L^2(\omega_1' \times \omega_2)}, \quad |\nabla_{X_2}(u_\varepsilon - u_0)|_{L^2(\omega_1' \times \omega_2)} = o(\varepsilon),$

$$|\nabla_{X_1}(u_\varepsilon - u_0)|_{L^2(\omega_1' \times \omega_2)} = o(1).$$

$$\Downarrow$$

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_0 \quad dans\ H^1(\omega_1' \times \omega).$$

Example 2.4. $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Non diagonale}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - u_0) \rightharpoonup 0 \quad dans \quad L^2(\Omega) \Longleftrightarrow f \text{ est indépendant de } x_1.$$

3. Applications

$$\Omega = \omega_1 \times \omega_2.$$

Soit $a \in C(\mathbb{R})$ tel que

$$\limsup_{|r| \to \infty} \left| \frac{a(r)}{r} \right| = \mu < \infty, \tag{3.1}$$

c-à-d $\dfrac{a(r)}{r}$ est borné quand $|r| \to \infty$.

Pour une fonction $h \in L^\infty(\omega_1 \times \Omega)$, on pose

$$l(u) = \int_{\omega_1} h(X_1, X_1', X_2)\, u(X_1', X_2)\, dX_1'. \tag{3.2}$$

On considère le problème intégro-différentiel défini par (V.S. Vladimorov, 1961)

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} -\Delta_{X_2} u + \chi u = a(l\,(u)) \ \text{ dans } \ \Omega, \\ \\ u(X_1, \cdot) = 0 \ \text{ sur } \ \ \partial\omega_2 \quad a.e. \ X_1 \in \omega_1. \end{cases}$$

où $\chi > 0$.

Existence de la solution de (3.3) $\Rrightarrow$ Perturbation singulière.

On introduit

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} -\varepsilon\Delta_{X_1} u_\varepsilon - \Delta_{X_2} u_\varepsilon + \chi u_\varepsilon = a(l\,(u_\varepsilon)) \ \text{ dans } \ \Omega, \\ \\ u_\varepsilon = 0 \ \text{ sur } \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Les points essentiels de la démonstration

1) L'existence de la solution du problème (3.4)

   (i) a est borné $\longrightarrow$ Le théorème du point fixe de Schauder.

   (ii) a vérifie (3.1) $\longrightarrow$

On introduit la fonction $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_n\,(r) = \begin{cases} x \text{ si } \ |x| \leq n \\ n \text{ si } \ |x| \geq n, \end{cases}$$

$a_n \dashrightarrow a$ avec

$$a_n = a \circ \chi_n.$$

2) Le comportement asymptotique de u_ε solution de (3.4) quand $\varepsilon \to 0$.

(La méthode de perturbation singulière anisotrope)