

Übungsblatt 14 - Lösung

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2+3y}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} \\
 f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2+3y}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2+3y}{\sqrt{2x+3xy+4y}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2x+3xy+4y} - (2+3y) \frac{3x+4}{2\sqrt{2x+3xy+4y}}}{2x+3xy+4y} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{2x+3xy+4y} - (2+3y) \frac{3x+4}{\sqrt{2x+3xy+4y}}}{2(2x+3xy+4y)} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6(2x+3xy+4y) - (2+3y)(3x+4)}{2(2x+3xy+4y)\sqrt{2x+3xy+4y}} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{12x+18xy+24y - (6x+8+9xy+12y)}{\sqrt{(2x+3xy+4y)^3}} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{6x+9xy+12y-8}{\sqrt{(2x+3xy+4y)^3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x+4}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} \\
 f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3x+4}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3x+4}{\sqrt{2x+3xy+4y}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2x+3xy+4y} - (3x+4) \frac{2+3y}{2\sqrt{2x+3xy+4y}}}{2x+3xy+4y} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{2x+3xy+4y} - (3x+4) \frac{2+3y}{\sqrt{2x+3xy+4y}}}{2(2x+3xy+4y)} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6(2x+3xy+4y) - (3x+4)(2+3y)}{2(2x+3xy+4y)\sqrt{2x+3xy+4y}} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{12x+18xy+24y - (6x+9xy+8+12y)}{\sqrt{(2x+3xy+4y)^3}} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{6x+9xy+12y-8}{\sqrt{(2x+3xy+4y)^3}}
 \end{aligned}$$

Es ist tatsächlich $f_{xy} = f_{yx}$.

Aufgabe 2

- a) Um den maximalen Definitionsbereich von f zu bestimmen, bemerken wir, dass die Wurzelfunktion nur für nicht-negative Argumente und der Logarithmus nur für strikt positive Argumente definiert ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2 - 1} > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\} = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0) \end{aligned}$$

wobei $B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitskreis ist. D.h. die Funktion f ist definiert in allen Punkte der zweidimensionalen Ebene, die außerhalb des Einheitskreises liegen.

- b) Wir leiten ab:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 5(1 - yx)e^{-xy} + \frac{x}{x^2 + y^2 - 1} - \pi \sin(\pi x + y) + x, \\ f_y(x, y) &= -5x^2 e^{-xy} + \frac{y}{x^2 + y^2 - 1} - \sin(\pi x + y), \\ f_{yy}(x, y) &= 5x^3 e^{-xy} + \frac{x^2 - y^2 - 1}{(x^2 + y^2 - 1)^2} - \cos(\pi x + y), \\ f_{xy}(x, y) &= 5x(xy - 2)e^{-xy} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2} - \pi \cos(\pi x + y), \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} f_x(2; 0) &= \frac{23}{3}, & f_y(0; 2) &= \frac{2}{3} - \sin(2), & f_{xy}(-2; 0) &= 20 - \pi, \\ f_{yy}(5; 0) &= 626 + \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir berechnen zunächst die benötigten partiellen Ableitungen. Es gilt

$$\begin{aligned} h_x(x, y) &= \left(1 + \frac{y}{x}\right) e^{-\frac{y}{x}}, \\ h_y(x, y) &= -e^{-\frac{y}{x}}, \\ h_{xy}(x, y) &= \partial_y h_x(x, y) = -\frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}}, \\ h_{yy}(x, y) &= \frac{1}{x} e^{-\frac{y}{x}}. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} x \cdot h_{xy} + 2(h_x + h_y) - y \cdot h_{yy} &= -\frac{y}{x} e^{-\frac{y}{x}} + \left(2 + 2\frac{y}{x}\right) e^{-\frac{y}{x}} - 2e^{-\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{-\frac{y}{x}} \\ &= \left(-\frac{y}{x} + 2 + 2\frac{y}{x} - 2 - \frac{y}{x}\right) e^{-\frac{y}{x}} = 0, \end{aligned}$$

erfüllt h die Differentialgleichung.

Aufgabe 4

a) Aus $f(x, y) = 3x^2 - 4x + 2xy + y^2$ folgt:

$$\begin{array}{lll} f_x = 6x - 4 + 2y & f_{xx} = 6 & f_{xy} = 2 \\ f_y = 2x + 2y & f_{yy} = 2 & f_{yx} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} 6x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} 3x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{array}$$

Man erhält den Punkt $x = 1$ und $y = -1$. Jetzt weitere Kriterien testen. $A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 12 - 4 = 8 > 0$. Es liegt ein Extrema vor. Da $f_{xx} > 0$ ist liegt ein Minimum vor.

b) Aus $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ folgt:

$$\begin{array}{lll} f_x = 4x(x^2 + y^2) - 4x & f_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 4 & f_{xy} = 8xy \\ f_y = 4y(x^2 + y^2) + 4y & f_{yy} = 4x^2 + 12y^2 + 4 & f_{yx} = 8xy \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \end{array} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \begin{array}{|l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 1 = 0 \end{array}$$

Aus (*) folgt eine Lösung $x = 0$ und $y = 0$. Das letzte Gleichungssystem hat keine Lösung, denn $x^2 + y^2$ kann nicht gleichzeitig 1 und -1 werden. Somit bleibt nur der Punkt $P(0/0)$ übrig.

Man erhält: $A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-4) \cdot 4 - 0 = -16 < 0$. Es liegen keine Extrema vor.

Wir müssen nun nach weiteren Lösungen für $f_x = 0$ und $f_y = 0$ suchen. Aus (*) betrachten wir die zwei Fälle

- $x = 0$ und $y \neq 0$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left| \begin{array}{l} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 = 0 \\ 4y(y^2 + 1) = 0 \end{array} \right|$$

Man erhält keine zusätzliche Lösungen.

- $x \neq 0$ und $y = 0$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left| \begin{array}{l} 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4x(x^2 - 1) = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right|$$

Es gibt zwei neue Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Für $(\pm 1/0)$ erhält man $A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (8) \cdot 8 - 0 = 64 > 0$. Da $f_{xx}(\pm 1, 0) = 8 > 0$ ist, haben wir bei $(1/0)$ und $(-1/0)$ ein Minimum.

c) Aus $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$ folgt:

$$\begin{array}{lll} f_x = x^2 - 2x & f_{xx} = 2x - 2 & f_{xy} = 0 \\ f_y = 3y^2 - 12 & f_{yy} = 6y & f_{yx} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x(x - 2) = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{array} \right|$$

Das Gleichungssystem ist einfach aufzulösen und wir erhalten folgende Lösungen:

$$\bullet P(0/2) \quad \bullet Q(0/-2) \quad \bullet R(2/2) \quad \bullet S(2/-2)$$

Jetzt müssen wir für alle 4 Punkte jeweils A und f_{xx} berechnen.

- $P(0/2)$

$$A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2) \cdot 12 - 0 = -24 < 0 \Rightarrow \text{kein Extrema}$$

- $Q(0/-2)$

$$\begin{array}{l} A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2) \cdot (-12) - 0 = 24 > 0 \quad \text{und} \\ f_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \end{array}$$

- $R(2/2)$

$$\begin{array}{l} A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot 12 - 0 = 24 > 0 \quad \text{und} \\ f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \end{array}$$

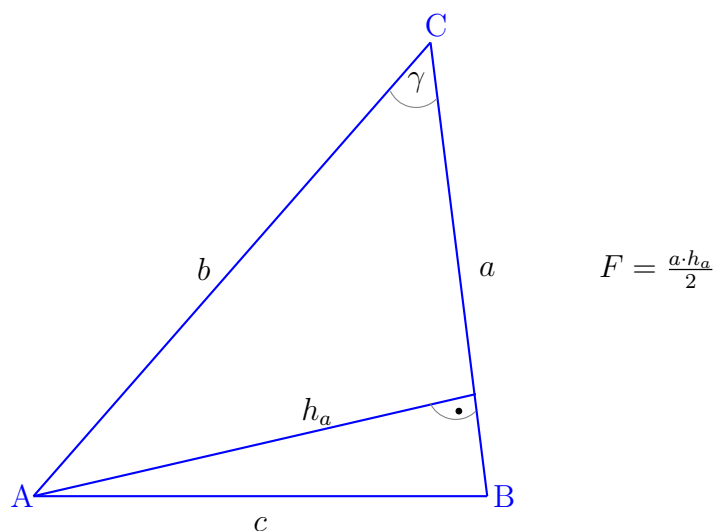
- S(2/-2)

$$A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 2 \cdot (-12) - 0 = -24 < 0 \Rightarrow \text{kein Extrema}$$

Aufgabe 5

Ziel muss sein, die Fläche durch den Umfang U und zwei Seiten ausdrücken zu können. Damit erhalten wir eine Funktion mit zwei Variablen.

Wir gehen von der Seite a , b und dem Winkel γ aus. c berechnet man mittels des Cosinus-Satzes $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$.



Aus dem Umfang $U = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$ folgt:

$$\cos(\gamma) = \frac{(a^2 + b^2) - (U - a - b)^2}{2ab} = \dots = \frac{2aU + 2bU - 2ab - U^2}{2ab}$$

Damit erhalten wir für die Höhe $h_a = b \cdot \sin(\gamma) = b \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)}$. Die Fläche lässt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}ab \sqrt{1 - \left(\frac{2aU + 2bU - 2ab - U^2}{2ab} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 - \left(\frac{2aU + 2bU - 2ab - U^2}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab)^2 - (2aU + 2bU - 2ab - U^2)^2} \end{aligned}$$

Damit haben wir die Fläche als eine Funktion mit zwei Variablen und dem gegebenen Umfang U ausgedrückt. Damit F maximiert werden kann, genügt es, die Funktion unter der Wurzel zu maximieren.

Somit kann nun folgende Aufgabe gelöst werden: Man finde das Maximum der Funktion

$$f(a, b) = (2ab)^2 - (2aU + 2bU - 2ab - U^2)^2$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f_a &= \frac{\partial f}{\partial a} = 8ab^2 - 4(2aU + 2bU - 2ab - U^2)(U - b) \\ f_{aa} &= \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 8b^2 - 8(U - b)^2 \\ f_{ab} &= \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = 16aU + 16bU - 12U^2 \\ f_b &= \frac{\partial f}{\partial b} = 8a^2b - 4(2aU + 2bU - 2ab - U^2)(U - a) \\ f_{bb} &= \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 8a^2 - 8(U - a)^2 \\ f_{ba} &= \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = 16aU + 16bU - 12U^2 \end{aligned}$$

Extrema bestimmen:

$$f_a = 0 \quad 8ab^2 - 4(2aU + 2bU - 2ab - U^2)(U - b) = 0 \quad (1)$$

$$f_b = 0 \quad 8a^2b - 4(2aU + 2bU - 2ab - U^2)(U - a) = 0 \quad (2)$$

Aus (1) folgt: $2aU + 2bU - 2ab - U^2 = \frac{2ab^2}{U - b}$ in (2) einsetzen

$$\begin{array}{l|l}
8a^2b - 4\frac{2ab^2}{U-b}(U-a) = 0 & \div (8ab) \\
a - \frac{b}{U-b}(U-a) = 0 & \cdot (U-b) \\
a(U-b) - b(U-a) = 0 & \\
aU - ab - bU + ab = 0 & \\
aU - bU = 0 & \\
(a-b)U = 0 &
\end{array}$$

Da $U \neq 0$ ist, muss also $a = b$ sein. Setzen wir jetzt $b = a$ in (1) ein, so erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}
2a^3 - (4aU - 2a^2 - U^2)(U-a) &= 0 \\
2a^3 - (4aU^2 - 2a^2U - U^3 - 4a^2U + 2a^3 + aU^2) &= 0 \\
2a^3 - (5aU^2 - 6a^2U - U^3 + 2a^3) &= 0 \\
2a^3 - 5aU^2 + 6a^2U + U^3 - 2a^3 &= 0 \\
-5aU^2 + 6a^2U + U^3 &= 0 \\
6Ua^2 - 5U^2a + U^3 &= 0
\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind:

$$a_{1,2} = \frac{-(-5U^2) \pm \sqrt{(-5U^2)^2 - 4 \cdot 6U \cdot U^3}}{2 \cdot 6U} = \frac{5U^2 \pm \sqrt{25U^4 - 24U^4}}{12U} = \frac{5U^2 \pm U^2}{12U}$$

Wir erhalten zwei Lösungen: $a_1 = \frac{U}{2}$ und $a_2 = \frac{U}{3}$.

a_1 ist ein Extremum, aber ein Minimum, denn aus $b = a$ folgt sofort $c = 0$; damit ist es ein entartetes Dreieck; der Flächeninhalt ist Null. Wir wollen ein Maximum und verfolgen deshalb a_2 als mögliche Lösung.

Wir erhalten daraus $a = U/3$, $b = U/3$ und $c = U/3$. Wir können hier mit der weiteren Analyse abbrechen, werden sie aber der Vollständigkeit wegen noch zeigen.

Es muss $A = f_{aa}f_{bb} - f_{ab}^2$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(8\left(\frac{U}{3}\right)^2 - 8\left(U - \frac{U}{3}\right)^2\right) \left(8\left(\frac{U}{3}\right)^2 - 8\left(U - \frac{U}{3}\right)^2\right) - \\
 &\quad \left(16\left(\frac{U}{3}\right)U + 16\left(\frac{U}{3}\right)U - 12U^2\right)^2 \\
 &= 8\left(\frac{U^2}{9} - 4\frac{U^2}{9}\right) 8\left(\frac{U^2}{9} - 4\frac{U^2}{9}\right) - \left(\frac{32}{3}U^2 - 12U^2\right)^2 \\
 &= 64\left(-\frac{U^2}{3}\right)\left(-\frac{U^2}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}U^2\right)^2 \\
 &= \frac{64}{9}U^4 - \frac{16}{9}U^4 = \frac{48}{9}U^4 > 0 \\
 f_{aa} &= \left(8\left(\frac{U}{3}\right)^2 - 8\left(U - \frac{U}{3}\right)^2\right) = -\frac{8}{3}U^2 < 0
 \end{aligned}$$

Mit $A > 0$ und $f_{aa} < 0$ liegt ein Maximum vor. Somit haben wir den Beweis erbracht.