

Übungsblatt 12 - Lösung

Aufgabe 1

- a) Eine separierbare DGL hat die Form $y' = r(x) \cdot s(y)$.
Zwei beliebige Beispiele wären
- $y' = \sin(x) \cdot \tan(y)$
 - $y' = (x^2 + 2x + \pi) \cdot \log(y)$.
- b) Eine lineare DGL 1. Ordnung hat die Form $y' = p(x) \cdot y + q(x)$.
Man bezeichnet die DGL dann als homogen, wenn $q(x) = 0$ ist.
Sie lautet dann $y' = p(x) \cdot y$. Diese ist auch eine separierbare DGL.
- c) Wenn die DGL separierbar ist, dann kann sie umgeformt werden zu $\frac{dy}{s(y)} = r(x)dx$.

$$(1) \quad y' = xy \quad \Rightarrow \quad \text{separierbar} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = x dx$$

$$(2) \quad y' = x - y \quad \Rightarrow \quad \text{nicht separierbar}$$

$$(3) \quad y' = x^2 \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \text{separierbar} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 dx$$

$$(4) \quad \frac{1}{y'} = xy \quad \Rightarrow \quad \text{separierbar} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{xy} \quad \Rightarrow \quad y dy = \frac{dx}{x}$$

$$(5) \quad \frac{1}{y' + 1} = xy \quad \Rightarrow \quad \text{nicht separierbar} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{xy} - 1$$

$$(6) \quad \frac{1}{y' + 1} = \frac{1}{xy + 1} \quad \Rightarrow \quad \text{separierbar} \quad \Rightarrow \quad y' = xy, \text{ siehe (1)}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

- a) (1 Punkt) Die Lösung der homogenen DGL lautet

$$y = C e^{\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}} = C e^{\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}}$$

$$1) \quad (1/2 \text{ Punkt}) \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

$$2) \quad (1/2 \text{ Punkt}) \quad y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \quad \text{und} \quad y = e^{\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}}$$

- b) (5 Punkte)

1) (3 Punkte) Die Lösung der homogenen DGL $y' = y$ lautet $y = Ke^x$.

Variation der Konstanten: $y = K(x)e^x \Rightarrow y' = K'(x)e^x + K(x)e^x$

$$\begin{array}{rcl}
 y' = y + x^2 & & \\
 K'(x)e^x + K(x)e^x = K(x)e^x + x^2 & | - K(x)e^x & \\
 K'(x)e^x = x^2 & | \div e^x & \\
 K'(x) = e^{-x}x^2 & | & \text{(1 Punkt)}
 \end{array}$$

$K(x)$ kann mittels partieller Integration ermittelt werden, wobei wir die Integrationskonstante C erst am Schluss hinzufügen:

$$\begin{aligned}
 K(x) &= \int e^{-x}x^2 dx = -e^{-x}x^2 - \int -e^{-x}2x dx = -e^{-x}x^2 + 2 \int e^{-x}x dx \\
 &= -e^{-x}x^2 + 2 \left[-e^{-x}x - \int -e^{-x} dx \right] = -e^{-x}x^2 - 2e^{-x}x + 2 \int e^{-x} dx \\
 &= -e^{-x}x^2 - 2e^{-x}x - 2e^{-x} + C = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C \quad \text{(1 Punkt)}
 \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = K(x)e^x = Ce^x - x^2 - 2x - 2$$

Aus $y(0) = C - 2 = -1$ folgt: $C = 1$ und somit:

$$y = e^x - x^2 - 2x - 2 \quad \text{(1 Punkt)}$$

2) (2 Punkte) Die Lösung der homogenen DGL lautet $y = Ke^{-2x}$.

Variation der Konstanten: $y = K(x)e^{-2x} \Rightarrow y' = K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x}$

$$\begin{array}{rcl}
 y' = -2y + e^{-2x} & & \\
 K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x} = -2K(x)e^{-2x} + e^{-2x} & | + 2K(x)e^{-2x} & \\
 K'(x)e^{-2x} = e^{-2x} & | \div e^{-2x} & \\
 K'(x) = 1 & &
 \end{array}$$

$K(x)$ mittels Integration bestimmen:

$$K(x) = \int 1 dx = x + C \quad (1 \text{ Punkt})$$

Somit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = K(x)e^x = (x + C)e^{-2x} = Ce^{-2x} + xe^{-2x}$$

Aus $y(0) = C = 1$ folgt: $C = 1$ und somit:

$$y = e^{-2x} + xe^{-2x} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

- 1) (2 Punkte) Durch Umformung erhält man: $y' = 3x^2y + 2xe^{x^3}$. Die Lösung der homogenen DGL lautet $y = Ke^{x^3}$. Variation der Konstanten:

$$y = K(x)e^{x^3} \quad \Rightarrow \quad y' = K'(x)e^{x^3} + 3x^2K(x)e^{x^3} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2y + 2xe^{x^3} \\ K'(x)e^{x^3} + 3x^2K(x)e^{x^3} &= 3x^2K(x)e^{x^3} + 2xe^{x^3} \\ K'(x)e^{x^3} &= 2xe^{x^3} \\ K'(x) &= 2x \\ K(x) &= x^2 + C \end{aligned}$$

Man erhält als allgemeine Lösung: $y = K(x)e^{x^3} = Ce^{x^3} + x^2e^{x^3}$ (1 Punkt)

- 2) (2 Punkte) Durch Umformung erhält man:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x^2}{1+x^3} \cdot y && (1 \text{ Punkt}) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x^2}{1+x^3} \cdot y \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{x^2}{1+x^3} dx \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{1+x^3} dx \\ \ln|y| &= -\frac{1}{3} \cdot \ln(x^3 + 1) + \tilde{C} \\ y &= e^{\tilde{C}}(x^3 + 1)^{-\frac{1}{3}} = C \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} && (1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

Es gilt für den Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- 3) (2 Punkte) Durch Umformung erhält man: $y' = y \cdot \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}$. Die Lösung der homogenen DGL lautet dann $y = K \frac{1}{\cos(x)}$. Variation der Konstanten:

$$y = K(x) \frac{1}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = K'(x) \frac{1}{\cos(x)} + K(x) \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned} y' &= y \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} \\ K'(x) \frac{1}{\cos(x)} + K(x) \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} &= K(x) \frac{1}{\cos(x)} \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} \\ K'(x) \frac{1}{\cos(x)} + K(x) \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} &= K(x) \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos(x)} \\ K'(x) \frac{1}{\cos(x)} + K(x) \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} &= K(x) \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos(x)} \\ K'(x) \frac{1}{\cancel{\cos(x)}} &= \frac{1}{\cancel{\cos(x)}} \\ K'(x) &= 1 \\ K(x) &= x + C \end{aligned}$$

Man erhält als allgemeine Lösung:

$$y = K(x) \frac{1}{\cos(x)} = (x + C) \frac{1}{\cos(x)} = C \frac{1}{\cos(x)} + \frac{x}{\cos(x)} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Es gilt für den Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \pm n \cdot \pi\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

- a) (3 Punkte) Die DGL $y' = 3 \cdot (x(y-2))^2 = 3 \cdot x^2 \cdot (y-2)^2$ ist separierbar.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3 \cdot x^2 \cdot (y-2)^2 \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\frac{dy}{(y-2)^2} = 3 \cdot x^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{(y-2)^2} = \int 3 \cdot x^2 dx$$

$$\int (y-2)^{-2} dy = \int 3 \cdot x^2 dx$$

$$\frac{(y-2)^{-1}}{-1} = x^3 + \tilde{C} \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$-\frac{1}{y-2} = x^3 + \tilde{C}$$

$$\frac{1}{y-2} = -x^3 + C$$

$$y-2 = \frac{1}{-x^3 + C}$$

$$y = \frac{1}{-x^3 + C} + 2 \quad (1 \text{ Punkt})$$

- b) (1 Punkt) Ja, wir finden für $y' = 0$ die Lösung $y = 2$. Diese Lösung erfüllt die DGL und ist nicht in den allgemeinen Lösungen aus b) enthalten.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

- a) (3 Punkte) Die DGL kann mittels der Schreibweise

$$E'(x) = -\alpha E(x) + \alpha E_m$$

auf die Form einer linearen DGL zurück geführt werden. Wir lösen diese aber direkt mit der Methode der Separation der Variablen. (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
 E'(x) &= \alpha(E_m - E(x)) \\
 \frac{dE}{dx} &= \alpha(E_m - E) \\
 \frac{dE}{E_m - E} &= \alpha dx \\
 \ln |E_m - E| &= -\alpha x + C_1 \\
 |E_m - E| &= e^{-\alpha x + C_1} \\
 |E_m - E| &= C_2 e^{-\alpha x} \quad , \text{ mit } C_2 > 0 \\
 E_m - E &= C e^{-\alpha x} \quad , \text{ mit } C \in \mathbb{R} \quad (\text{wir erlauben hier auch } C=0, \text{ weil das damit} \\
 &\quad \text{auch die singuläre Lösung beinhaltet)}
 \end{aligned}$$

$$E = E_m - C e^{-\alpha x} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Mit der Anfangsbedingung $E(0) = E_0 < E_m$ kann C ermittelt werden.

$$E(0) = E_m - C = E_0 \quad \Rightarrow \quad C = E_m - E_0 \quad (1 \text{ Punkt})$$

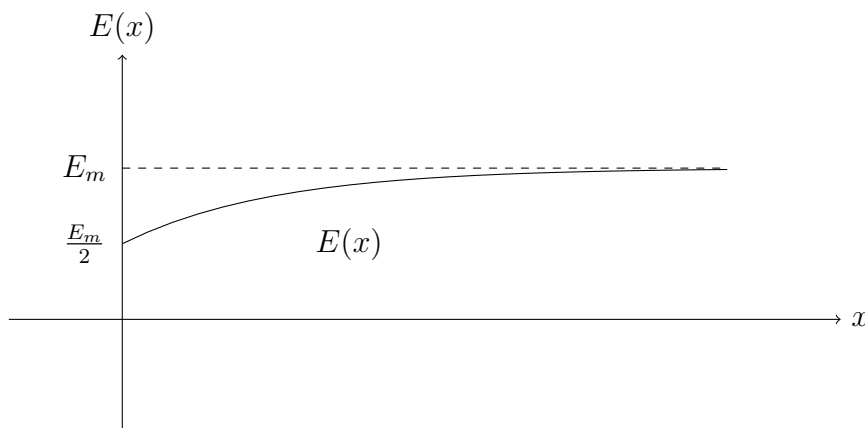
Somit erhalten wir dann für $E(x)$:

$$E(x) = E_m - (E_m - E_0)e^{-\alpha x}$$

b) (1 Punkt) Setzen wir $E_0 = \frac{E_m}{2}$ ein, so erhalten wir für $E(x)$:

$$E(x) = E_m - \left(E_m - \frac{E_m}{2}\right)e^{-\alpha x} = E_m - \frac{E_m}{2}e^{-\alpha x} = E_m \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha x}\right)$$

Für x kommen nur positive Werte vor!



Bemerkung: Dies ist ein Beispiel eines Sättigungsprozesses und ein Spezialfall des volkswirtschaftlichen Gesetzes vom abnehmenden Ertrag: Der zunehmende Einsatz eines variablen Produktionsfaktors (Dünger) auf einem fixen Produktionsfaktor (Ackerboden) führt zu abnehmenden Ertragszuwächsen.