Übungsblatt 11 - Lösung

Aufgabe 1

a) Aus $N'(t) = 10 \cdot e^{10 \cdot t} = 10 \cdot N(t) = \lambda \cdot N(t)$ folgt sofort, dass $\lambda = 10$ ist.

b) Aus $y' = x$ folgt $y = \frac{1}{2}x^2 + C$. Mit $y(0) = C = 1$ lautet die Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

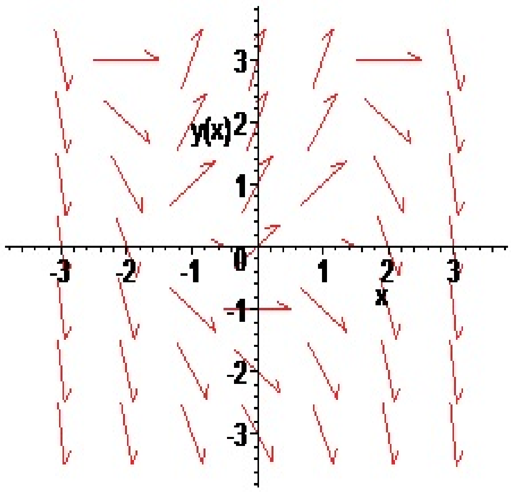
Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) (2 Punkte)

DGL: $y' = y - x^2 + 1$. Wertetabelle für y'. (1 Punkt)

	-3	-2	-1	0	1	2	3	←x
-3	-11	-6	-3	-2	-3	-6	-11	
-2	-10	-5	-2	-1	-2	-5	-10	
-1	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	
0	-8	-3	0	1	0	-3	-8	
1	-7	-2	1	2	1	-2	-7	
2	-6	-1	2	3	2	-1	-6	
3	-5	0	3	4	3	0	-5	
y↑								

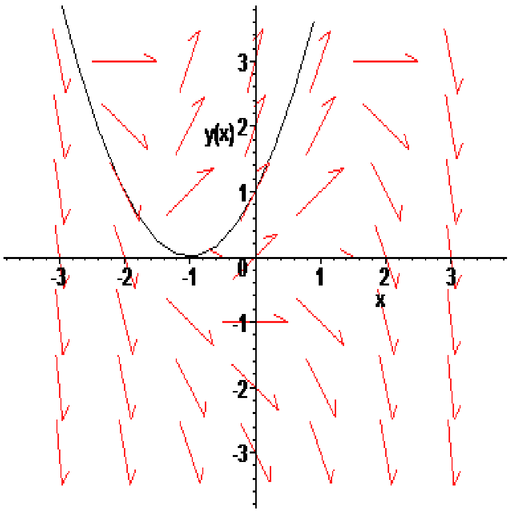
Und hier das Richtungsfeld: (1 Punkt)



b) (1 Punkt) y und y' in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} y' &= y - x^2 + 1 \\ (x^2+2x+1)' &\stackrel{!}{=} (x^2+2x+1) - x^2 + 1 \\ 2x+2 &\stackrel{!}{=} 2x+2 \qquad \Rightarrow \qquad y' = y - x^2 + 1 \qquad \text{ist erfüllt} \end{aligned}$$

c) (2 Punkte) Spezielle Lösung $y = x^2 + 2x + 1$



Es gibt (1 Punkt) für die farbig markierten Punkte der Wertetabelle für y'. Einen weiteren (1 Punkt) für die eingezeichnete Parabel.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) (2 Punkte) Wir setzen $i(t)$ und $\ddot{i}(t)$ in die DGL $\ddot{i} + \omega_0^2 i = 0$ ein.

$$\begin{aligned} i(t) &= \widehat{I} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{i}(t) &= \frac{di}{dt} = \omega_0 \widehat{I} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \ddot{i}(t) &= \frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega_0^2 \widehat{I} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$ (1 Punkt)

$$\ddot{i} + \omega_0^2 i = -\omega_0^2 \widehat{I} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 (\widehat{I} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)) = 0$$ (1 Punkt)

b) (4 Punkte)

$$\dot{i}(t) = \frac{di}{dt} = \widehat{I}\left[\omega\cos(\omega t+\varphi) - \sigma\sin(\omega t+\varphi)\right]e^{-\sigma t} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$\begin{aligned}\ddot{i}(t) = \frac{d^2 i}{dt^2} &= \widehat{I}\left[-\omega^2\sin(\omega t+\varphi) - \sigma\omega\cos(\omega t+\varphi)\right]e^{-\sigma t}\\ &\quad + \widehat{I}\left[-\omega\sigma\cos(\omega t+\varphi) + \sigma^2\sin(\omega t+\varphi)\right]e^{-\sigma t}\\ &= \widehat{I}\left[-\omega^2\sin(\omega t+\varphi) - 2\omega\sigma\cos(\omega t+\varphi) + \sigma^2\sin(\omega t+\varphi)\right]e^{-\sigma t} \qquad \text{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

Einsetzen in DGL:

$$\ddot{i} + 2\sigma\dot{i} + \omega_0^2 i = 0$$

$$\begin{aligned}&\widehat{I}\left[-\omega^2\sin(\omega t+\varphi) - 2\omega\sigma\cos(\omega t+\varphi) + \sigma^2\sin(\omega t+\varphi)\right]e^{-\sigma t}\\ &\quad + 2\sigma\widehat{I}\left[\omega\cos(\omega t+\varphi) - \sigma\sin(\omega t+\varphi)\right]e^{-\sigma t}\\ &\quad + \omega_0^2\widehat{I}\sin(\omega t+\varphi)e^{-\sigma t} \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

$$\widehat{I}\Big[-\omega^2\sin(\omega t+\varphi) - 2\omega\sigma\cos(\omega t+\varphi) + \sigma^2\sin(\omega t+\varphi) + 2\sigma\omega\cos(\omega t+\varphi) - 2\sigma^2\sin(\omega t+\varphi) + \omega_0^2\sin(\omega t+\varphi)\Big]e^{-\sigma t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\widehat{I}\Big[-\omega^2\sin(\omega t+\varphi) - \cancel{2\omega\sigma\cos(\omega t+\varphi)} + \sigma^2\sin(\omega t+\varphi) + \cancel{2\sigma\omega\cos(\omega t+\varphi)} - 2\sigma^2\sin(\omega t+\varphi) + \omega_0^2\sin(\omega t+\varphi)\Big]e^{-\sigma t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\widehat{I}\Big[-\omega^2\sin(\omega t+\varphi) - \sigma^2\sin(\omega t+\varphi) + \omega_0^2\sin(\omega t+\varphi)\Big]e^{-\sigma t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\widehat{I}\Big[-\omega^2 - \sigma^2 + \omega_0^2\Big]\sin(\omega t+\varphi)e^{-\sigma t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\widehat{I}\Big[-(\omega_0^2 - \sigma^2) - \sigma^2 + \omega_0^2\Big]\sin(\omega t+\varphi)e^{-\sigma t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\widehat{I}\Big[-\omega_0^2 + \sigma^2 - \sigma^2 + \omega_0^2\Big]\sin(\omega t+\varphi)e^{-\sigma t} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\widehat{I}\Big[0\Big]\sin(\omega t+\varphi)e^{-\sigma t} = 0 \qquad \text{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a)
- (3 Punkte)

$$\begin{aligned} y &= xe^x \\ y' &= e^x + xe^x && \text{(1 Punkt)} \\ y'' &= e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x && \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL: (1 Punkt)

$$e^{-x}y'' + e^{-x}y' = e^{-x}(2e^x + xe^x) + e^{-x}(e^x + xe^x) = 2 + x + 1 + x = 2x + 3$$

- (3 Punkte)

$$\begin{aligned} y &= e^x \sin(x) \\ y' &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) && \text{(1 Punkt)} \\ y'' &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = 2e^x \cos(x) && \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL: (1 Punkt)

$$\begin{aligned} xy'' - 2xy' + xy &= 2xe^x \cos(x) - 2x(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)) + xe^x \sin(x) \\ &= 2xe^x \cos(x) - 2xe^x \sin(x) - 2xe^x \cos(x) + xe^x \sin(x) \\ &= -xe^x \sin(x) \end{aligned}$$

b)
- (1 Punkt) Aus $y^2 + y - 2 = 0$ folgt: $(y-1)(y+2) = 0$. Daraus erhält man die Lösungen $y_1 = 1$ und $y_2 = -2$.

- (1 Punkt) Durch Probieren findet man $y_1 = 1$ als erste Lösung von $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$. Die Polynomdivision $(y^3 - 2y^2 - y + 2) : (y - 1)$ liefert anschliessend $y^2 - y - 2 = (y+1)(y-2)$. Daraus folgen die weiteren Lösungen $y_2 = -1$ und $y_3 = 2$.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Man setze $y = f(x)\sin(x)$ in die DGL ein und versuche die Identität herzuleiten.

$$\begin{aligned}
y' &\overset{!}{=} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \cot(x)\right] \cdot y \\
\frac{d}{dx}\left[f(x)\sin(x)\right] &\overset{!}{=} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \cot(x)\right] \cdot \Big(f(x)\sin(x)\Big) \\
f'(x)\sin(x) + f(x)\cos(x) &\overset{!}{=} \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right] \cdot f(x)\sin(x) \\
f'(x)\sin(x) + f(x)\cos(x) &\overset{!}{=} \frac{f'(x)}{\cancel{f(x)}} \cdot \cancel{f(x)}\sin(x) + \frac{\cos(x)}{\cancel{\sin(x)}} \cdot f(x)\cancel{\sin(x)} \\
f'(x)\sin(x) + f(x)\cos(x) &\overset{!}{=} f'(x)\sin(x) + f(x)\cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad \text{QED}
\end{aligned}$$