

Übungsblatt 12

Einige Lösungsmethoden (von Differentialgleichungen), Storrer 16

Abgabe: Mittwoch, **13.12.2017**, vor der Vorlesung.

MUST

Aufgabe 1

- Erklären Sie den Begriff separierbare Differentialgleichung.
- Erklären Sie den Begriff homogene und inhomogene lineare Differentialgleichung am Beispiel der linearen DGL 1. Ordnung.
- Welche der nachfolgenden Differentialgleichungen sind separierbar ?

$$(1) y' = xy$$

$$(2) y' = x - y$$

$$(3) y' = x^2 \sqrt{y}$$

$$(4) \frac{1}{y'} = xy$$

$$(5) \frac{1}{y' + 1} = xy$$

$$(6) \frac{1}{y' + 1} = \frac{1}{xy + 1}$$

STANDARD

Aufgabe 2 (6 Punkte)

- (1 Punkt) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = x^{\frac{3}{2}}y$ für die Anfangswerte
 - (1/2 Punkt) $y(0) = 0$
 - (1/2 Punkt) $y(0) = 1$
- Bestimmen Sie die Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit der *Methode der Variation der Konstanten*.
 - (3 Punkte) $y' = y + x^2$ mit Anfangswert $y(0) = -1$
 - (2 Punkte) $y' = -2y + e^{-2x}$ mit Anfangswert $y(0) = 1$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der linearen Differentialgleichungen.

- 1) (2 Punkte) $y' - 3x^2y - 2xe^{x^3} = 0$ (Variation der Konstanten)
- 2) (2 Punkte) $(1 + x^3)y' + x^2y = 0$ (Separation der Variablen)
- 3) (2 Punkte) $y' - y \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ (Variation der Konstanten)

Aufgabe 4 (3 Punkte)

- a) (2 Punkte) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = 3 \cdot (x(y - 2))^2$.
- b) (1 Punkt) Gibt es singuläre Lösungen?

HONOURS**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Es sei x die pro Hektar Ackerfläche ausgestreute Menge eines Düngers, $E(x)$ der resultierende Hektarertrag einer gewissen Frucht. Vermehrte Düngung verbessert den Ertrag, allerdings nicht unbeschränkt: es wird schliesslich ein Maximalertrag E_m erreicht, der durch weitere Düngung nicht mehr gesteigert werden kann - bei Überdüngung tritt sogar eine Ertragsminderung ein. Für die Phase der Ertragssteigerung gilt das *Mitscherlichsche Gesetz*:

$$E'(x) = \alpha(E_m - E(x)) \quad (\alpha \text{ ist eine positive Konstante})$$

Bestimmen Sie damit den Hektarertrag in Funktion der Düngermenge.

- a) (3 Punkte) Bestimmen Sie $E(x)$ mit $E(0) = E_0 < E_m$.
- b) (1 Punkt) Zeichnen sie qualitativ $E(x)$ für $E_0 = \frac{E_m}{2}$.