

Übungsblatt 10 - Lösung

Aufgabe 1

a)

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{x_u \rightarrow -\infty} \left(\int_{x_u}^0 e^x dx \right) = \lim_{x_u \rightarrow -\infty} \left[e^x \right]_{x_u}^0 = e^0 - \lim_{x_u \rightarrow -\infty} e^{x_u} = 1 - 0 = 1$$

b)

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^9 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^9 = 2 \cdot \left[\sqrt{x} \right]_0^9 = 2 \cdot 3 = 6$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir verwenden die Bezeichnung x_u für die untere Grenze und x_o für die obere Grenze.

a) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} dx = \int_1^{\infty} x^{-\frac{4}{3}} dx = \lim_{x_o \rightarrow \infty} \int_1^{x_o} x^{-\frac{4}{3}} dx = \\ &= \lim_{x_o \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} \right]_1^{x_o} = (-3) \cdot \lim_{x_o \rightarrow \infty} \left[x^{-\frac{1}{3}} \right]_1^{x_o} = (-3) \cdot \lim_{x_o \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right]_1^{x_o} \\ &= (-3) \cdot \lim_{x_o \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_o}} - 1 \right] = (-3) \cdot (-1) = 3 \end{aligned}$$

b) (1 Punkt) In Anlehnung an Storrer Seite 170 unten setzen wir

$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}} \cdot \cos(t)$. Wir wählen $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ und $u(t) = \sin(t)$. Womit $u'(t) = \cos(t)$ ist.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin t}} dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin t}} \cdot \cos(t) dt = \int_{u=0}^{u=1} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 2 \cdot \left[\sqrt{u} \right]_0^1 = 2 \cdot (1 - 0) = 2 \end{aligned}$$

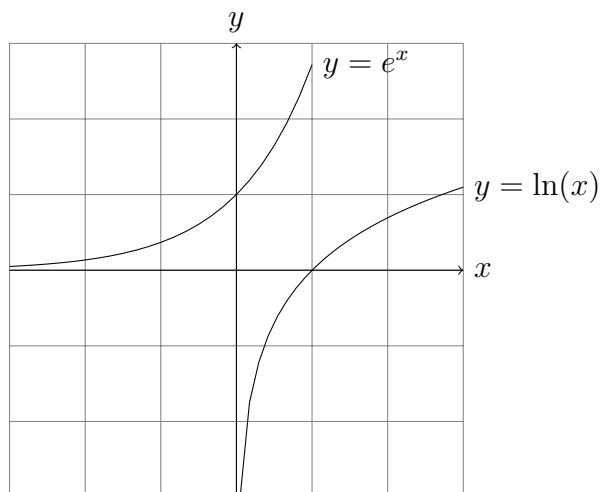
- c) (1 Punkt) Ebenso mit $g(x) = e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 2e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ setzen wir $f(u) = e^{-u}$ und $u(x) = \sqrt{x}$. Womit $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^\infty 2e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty 2e^{-u} du = 2 \cdot \int_0^\infty e^{-u} du \\ &= 2 \cdot \lim_{u_0 \rightarrow \infty} \int_0^{u_0} e^{-u} du = 2 \cdot \lim_{u_0 \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-u}}{-1} \right]_0^{u_0} = -2 \cdot \lim_{u_0 \rightarrow \infty} \left[e^{-u} \right]_0^{u_0} \\ &= -2 \cdot \left[\lim_{u_0 \rightarrow \infty} \left(e^{-u_0} \right) - 1 \right] = (-2) \cdot (-1) = 2 \end{aligned}$$

- d) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x) dx &= \int_0^1 1 \cdot \ln(x) dx = \left[x \cdot \ln(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{x_u \rightarrow 0} \left[x \cdot \ln(x) \right]_{x_u}^1 - \int_0^1 1 dx = \left[\lim_{x_u \rightarrow 0} \left(0 - x_u \cdot \ln(x_u) \right) \right] - \left[x \right]_0^1 \\ &= \left[0 - 0 \right] - \left[1 - 0 \right] = -1 \end{aligned}$$

Hinweis: Das Integral muss nicht explizit berechnet werden. Die Funktion $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion von e^x .



Es gilt:

$$\int_0^1 \ln(x) dx = - \int_{-\infty}^0 e^x dx = -1 \quad (\text{siehe 1a))}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) (2 Punkte) Der Weg $\vec{x}(t)$ und $\dot{\vec{x}}(t)$ lässt sich darstellen mittels:

$$\vec{x}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

b) (2 Punkte) Integral im Gegenuhrzeigersinn von $E(r/0)$ nach $W(-r/0)$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_0^\pi \frac{1}{r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t)} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{r}{r^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} \begin{pmatrix} -2\sin(t) + 4\cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -2\sin(t) + 4\cos(t) \end{pmatrix} dt = \frac{1}{r} \left[2\cos(t) + 4\sin(t) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{r} \left[2(-1) - 2 \right] = -\frac{4}{r} \end{aligned}$$

c) (2 Punkte) Integral im Uhrzeigersinn von $N(0/r)$ nach $S(0/-r)$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{1}{r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t)} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{r}{r^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} (-2\sin(t) + 4\cos(t)) dt \\ &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{1}{r} (-2\sin(t) + 4\cos(t)) dt = \frac{1}{r} \left[2\cos(t) + 4\sin(t) \right]_{\pi/2}^{-\pi/2} \\ &= \frac{1}{r} \left[(0 - 4) - (0 + 4) \right] = -\frac{8}{r} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Es ist:

$$\vec{x}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{(1 Punkt)}$$

Das Integral berechnet sich dann gemäss:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 5t \\ t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (6t^3 + 2t^2 + 15t) dt \\ &= \left[\frac{6t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + \frac{15t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{15}{2} = 9 + \frac{2}{3} = 9\frac{2}{3}\end{aligned}\quad (1 \text{ Punkt})$$

b) (2 Punkte) Es ist:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1 \text{ Punkt})$$

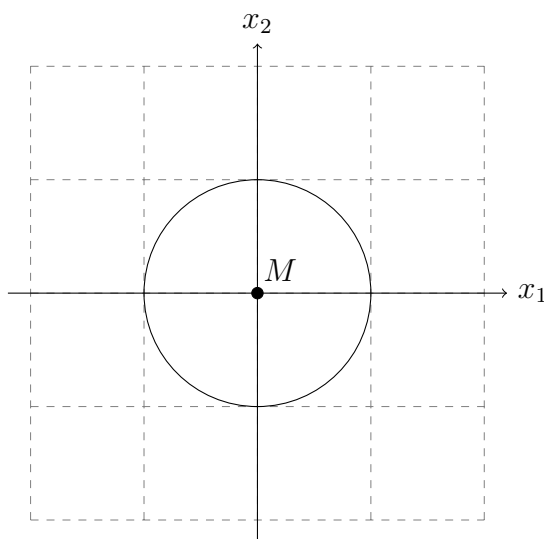
Das Integral berechnet sich dann gemäss:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t + 2t^3 \\ t^4 \\ 6t^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6t^2 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (12t^7 + 6t^6 + 6t^3 + 9t) dt \\ &= \left[\frac{12t^8}{8} + \frac{6t^7}{7} + \frac{6t^4}{4} + \frac{9t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{6}{7} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} + \frac{6}{7} \\ &= \frac{105}{14} + \frac{12}{14} = \frac{117}{14} = 8\frac{5}{14}\end{aligned}\quad (1 \text{ Punkt})$$

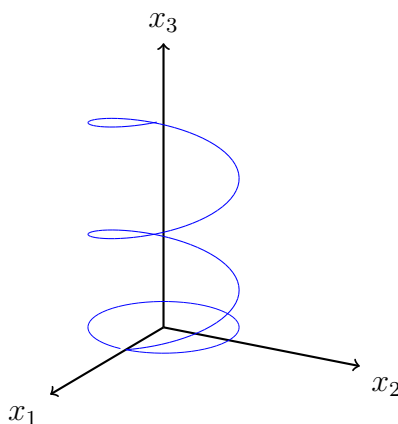
Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) (1 Punkt) Wir betrachten zuerst den Verlauf von $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ in der x_1 - x_2

Ebene. Die Kurve $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ ist ein Kreis, der im Punkt $(1/0)$ beginnt und sich im Gegenuhrzeigersinn bewegt. Der Kreis wird zwei Male durchlaufen.



In x_3 Richtung bewegt man sich gemäss $x_3(t) = t$. Das ist eine geradlinige Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit.



b) (2 Punkte)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 4\pi \quad (1 \text{ Punkt})$$

Das Integral berechnet sich dann gemäss:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{4\pi} \left(-\sin(t)\cos(t) + \sin(t)\cos(t) + t \right) dt = \int_0^{4\pi} t dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{4\pi} = 8\pi^2 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

c) (3 Punkte)

$$\int_C \vec{F} d\vec{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2} \begin{pmatrix} t \sin(t) \\ -t \cos(t) \\ t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

(1 Punkt)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t \sin^2(t) - t \cos^2(t) + t + 1}{1 + t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t[\sin^2(t) + \cos^2(t)] + t + 1}{1 + t^2} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t + t + 1}{1 + t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt$$

(1 Punkt)

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{-t}^{+t} \frac{1}{1 + t^2} \right] dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\arctan(t) \right]_{-t}^{+t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan(t)] - \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan(-t)] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

(1 Punkt)

Hinweis: Da $\frac{1}{1+t^2}$ symmetrisch ist, kann man auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+t} \frac{1}{1+t^2} \right] dt$$

so berechnen.