Übungsblatt 9 - Lösung

Aufgabe 1

a) 1) $\displaystyle\int_{-3}^{3} x^2 dx = 2\int_{0}^{3} x^2 dx = \frac{2}{3}\Big[x^3\Big]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 = 18$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} = (-\cos(\pi)) - (-\cos(-\pi))$$
$$= -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = -(-1) + (-1) = 1 - 1 = 0$$

Da $\sin(x)$ eine punktesymetrische Funktion ist, hätte man direkt $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx = 0$ schreiben können.

3) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos(x)dx = 2\Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi} = 2(\sin(\pi) - \sin(0)) = 2(0-0) = 0$$

b) Anwendung der partiellen Integration: $u'(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = \cos(x)$

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = -\cos(x)\cdot\cos(x) - \int -\cos(x)\cdot(-\sin(x))dx$$
$$= -\cos^2(x) - \int \cos(x)\cdot\sin(x)dx$$

Das Integral $\displaystyle\int \cos(x)\cdot\sin(x)dx$ auf die linke Seite bringen

$$2\cdot\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = -\cos^2(x) \quad\Rightarrow\quad \int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$$

Anwendung der Substitutionmethode:

$$u(x) = \sin(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx} = \cos(x) \quad\Rightarrow\quad du = \cos(x)dx$$
$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

Die Resultate sind gleich, da

$$\frac{1}{2}\sin^2(x) + C = \frac{1}{2}(1-\cos^2(x)) + C = -\frac{1}{2}\cos^2(x) - \frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + \tilde{C}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) (1 Punkt)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}dx &= \int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^3 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \int \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + 2\sqrt{x} + C \\ &= \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

b) (1 Punkt) Gemäss Aufgabenstellung muss $x > 0$ sein! In Anlehung an Skript Luchsinger Seite 106 unten und mit der dortigen Notation müssen wir den Integranden $g(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ in der Form $g(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$ schreiben. Wir wählen $f(u) = \frac{1}{u}$ und $u(x) = \ln(x)$. Womit $u'(x) = \frac{1}{x}$ ist.
Somit ist

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)} = \int \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln(|u|) + C = \ln(|\ln(x)|) + C$$

c) (1 Punkt) Ebenso mit $g(x) = x^3(x^4+1)^{100} = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 \cdot (x^4+1)^{100}$ setzen wir $f(u) = u^{100}$ und $u(x) = x^4 + 1$. Womit $u'(x) = 4x^3$ ist.
Somit ist

$$\begin{aligned}\int x^3(x^4+1)^{100}dx &= \frac{1}{4}\int (x^4+1)^{100} \cdot 4x^3dx = \frac{1}{4}\int u^{100}du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{101}}{101} + C \\ &= \frac{1}{404} \cdot u^{101} + C = \frac{1}{404} \cdot \left(x^4+1\right)^{101} + C\end{aligned}$$

d) (1 Punkt) Ebenso mit $g(x) = \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x}$ setzen wir $f(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u}$ und $u(x) = x^2 + 2x$. Womit $u'(x) = 2x + 2$ ist.

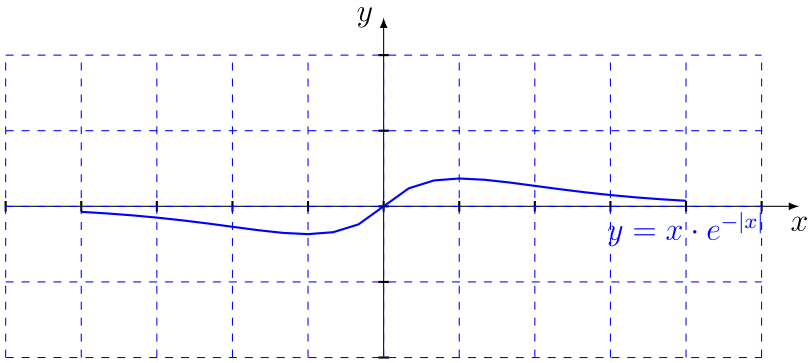
$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2x} \cdot (2x+2)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + C\end{aligned}$$

e) (1 Punkt) Ebenso mit $g(x) = e^{x-e^x} = e^x \cdot e^{-e^x}$ setzen wir $f(u) = e^{-u}$ und $u(x) = e^x$. Womit $u'(x) = e^x$ ist.

$$\int e^{x-e^x}dx = \int e^{-e^x} \cdot e^x dx = \int e^{-u}du = -e^{-u} + C = -e^{-e^x} + C$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) (1 Punkt) Beim Integrieren muss $e^{-|x|}$ für positive und negative Werte von x betrachtet werden.
Für $x > 0$ gilt: $f(x) = x \cdot e^{-|x|} = x \cdot e^{-x}$.
Für $x < 0$ gilt: $f(x) = x \cdot e^{-|x|} = x \cdot e^{-(-x)} = x \cdot e^{x}$.
Es gilt, dass $f(-x) = (-x) \cdot e^{-x} = -x \cdot e^{-x} = -f(x)$ ist. Die Funktion ist punktsymmetrisch, siehe auch Funktionsverlauf.



Somit ist $\displaystyle\int_{-3}^{3} x \cdot e^{-|x|}\, dx = 0$.

b) (2 Punkte) Wir ermitteln das unbestimmte Integral mit der partiellen Integration.. (1 Punkt)

$$\int x \cdot \sin(x)\, dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int -\cos(x)\, dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, dx$$
$$= -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C \qquad \text{(1 Punkt)}$$

c) (2 Punkte) Wir ermitteln das unbestimmte Integral mit der partiellen Integration.. (1 Punkt)

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx &= x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int 2x \cdot (-\cos(x))\,dx \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot \int x \cdot \cos(x)\,dx \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot \left[x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)\,dx\right] \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \int -\sin(x)\,dx \\ &= -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x) + C \qquad \text{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

d) (1 Punkt) Das Integral $\int_{-2}^{2} x^2 \sin(x)\,dx$ kann ohne Integrieren bestimmt werden. Die Funktion $f(x) = x^2 \sin(x)$ ist punktsymmetrisch, es gilt $f(-x) = -f(x)$. Somit ist $\int_{-2}^{2} x^2 \sin(x)\,dx = 0$.
Auch dem berechneten Integral aus c) ersieht man, dass die Stammfunktion $F(x)$ smmetrisch ist, also $F(-x) = F(x)$. Auch hier erhält man $\int_{-2}^{2} x^2 \sin(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-2}^{2} = F(2) - F(-2) = 0$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

a) (1 Punkt) Mit $u'(x) = x$ und $v(x) = \ln(x)$ folgt;:

$$\begin{aligned}\int x\ln(x) &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

b) (1 Punkt) Mit $u'(x) = \ln(x)$ und $v(x) = x$ folgt:

$$\int x\ln(x) = x\int \ln(x)dx - \int \left(\int \ln(x)dx\right)dx$$

Man muss nun $\int \ln(x)dx$ bestimmen:

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx \\ = x\ln(x) - \int 1dx = x\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

Setzt man es im obigen Integral ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x)dx &= x\int \ln(x)dx - \int\left(\int \ln(x)dx\right)dx \\
\int x\ln(x)dx &= x(x\ln(x) - x) - \int (x\ln(x) - x)\,dx \\
\int x\ln(x)dx &= x^2\ln(x) - x^2 - \int x\ln(x)dx + \int xdx && \Big| + \int x\ln(x)dx \\
2\cdot\int x\ln(x)dx &= x^2\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C} \\
2\cdot\int x\ln(x)dx &= x^2\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C} && \Big| \div 2 \\
\int x\ln(x)dx &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

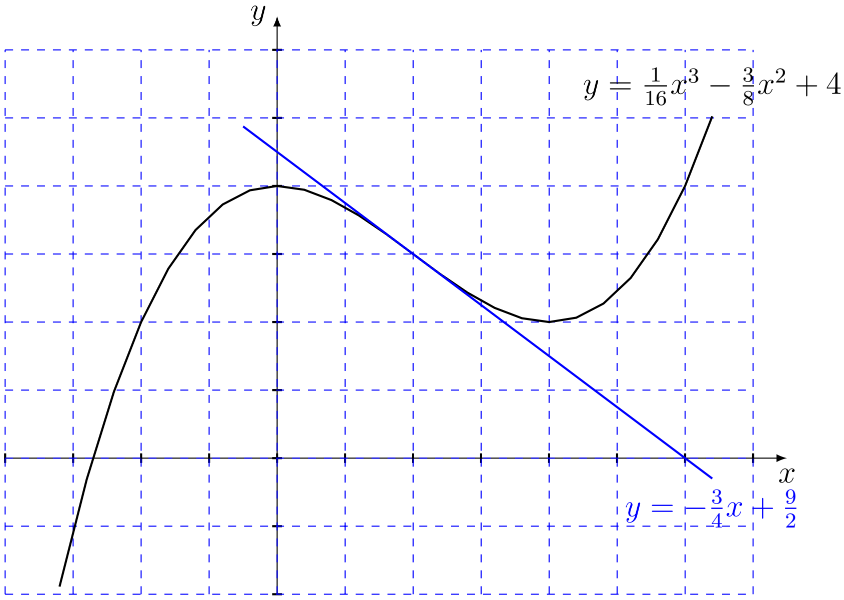
a) (2 Punkte) Man muss zuerst den Verlauf der Funktion qualitativ aufzeichnen, damit das gewünsche Integral bestimmt werden kann.

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 4 \qquad f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \qquad f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4}$$

- Nullstellen: Es ist eine Nullstelle bei $x_1 \approx -2,71$ angegeben!
- Extrema: $f'(x) = 0$. Nach kurzer Rechnung folgt: $x_2 = 0$ und $x_3 = 4$

$$\begin{aligned}
f''(x_2) &= -\frac{3}{4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Maximum} \quad f(x_2) = 4 \\
f''(x_3) &= \frac{3}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Minimum} \quad f(x_3) = 2
\end{aligned}$$

- Wendepunkte: $f''(x) = 0$. Nach kurzer Rechnung folgt: $x_4 = 2$. Es ist auch $f'''(x_4) \neq 0$. Für die Steigung der Wendetangente erhält man $f'(x_4) = -\frac{3}{4}$.
  Die Gleichung der Wendetangente kann aus $\frac{y-f(x_4)}{x-x_4} = f'(x_4)$ bestimmen. Man erhält $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$. (1 Punkt)



(1 Punkt)

b) (2 Punkte) Jetzt kann das Integral formuliert werden!

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^2 \left(\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 4\right) dx + \int_2^6 \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + 4x\right]_0^2 + \left[-\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_2^6 \\
&= \left[\frac{16}{64} - \frac{8}{8} + 8\right] + \left[-\frac{3 \cdot 36}{8} + \frac{9 \cdot 6}{2}\right] - \left[-\frac{3 \cdot 4}{8} + \frac{9 \cdot 2}{2}\right] \\
&= \left[\frac{1}{4} - 1 + 8\right] + \left[-\frac{3 \cdot 9}{2} + 27\right] - \left[-\frac{3}{2} + 9\right] \\
&= \frac{1}{4} + 7 - 13\frac{1}{2} + 27 + \frac{3}{2} - 9 \\
&= 7\frac{1}{4} + 13\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2} \\
&= 7\frac{1}{4} + 6 = 13\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Hinweis:
Das zweite Integral beschreibt eine Dreiecksfläche. Diese kann so bestimmt werden: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.
Diese Rechnung ist viel einfacher zu machen als $\int_2^6 \left(-\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}\right) dx$.