

# Übungsblatt 10

## Integration von Vektorfunktionen und Uneigentliche Integrale, Storrer 14 + 20

Abgabe: Mittwoch, **29.11.2017**, vor der Vorlesung.

### MUST

#### Aufgabe 1

Bestimmen Sie die uneigentlichen Integrale

a)

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx$$

b)

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

### STANDARD

#### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die uneigentlichen Integrale:

a) (1 Punkt)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$$

b) (1 Punkt)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} dt$$

c) (1 Punkt)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

d) (1 Punkt)

$$\int_0^1 \ln(x) dx$$

**Aufgabe 3** (6 Punkte)

Es sei das Kraftfeld  $\vec{F}$  gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral des Kraftfeldes entlang eines Kreises von Radius  $r$  um den Ursprung, wobei der Weg

- (2 Punkte) Bestimmen Sie zuerst  $\vec{x}(t)$  und  $\dot{\vec{x}}(t)$ .
- (2 Punkte) im Gegenuhrzeigersinn von  $E(r/0)$  nach  $W(-r/0)$  geht.
- (2 Punkte) im Uhrzeigersinn von  $N(0/r)$  nach  $S(0/-r)$  geht.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3^2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_C \vec{F} d\vec{x}$$

vom Ursprung zum Punkt  $P(3/2/1)$ , wenn

- (2 Punkte) wenn  $C$  die geradlinige Verbindung beider Punkte ist.
- (2 Punkte) wenn  $C$  entlang der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

verläuft.

**Aufgabe 5** (6 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung einer Schraube

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

- a) (1 Punkt) Zeichnen Sie eine Skizze der Schraube, wobei  $t$  von 0 bis  $4\pi$  geht.  
 b) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Wegintegral

$$\int_H \vec{F} d\vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei  $H$  den Weg entlang der Schraube bezeichnet, wenn  $t$  von 0 bis  $4\pi$  geht.

- c) (3 Punkte) Bestimmen Sie das uneigentliche Wegintegral

$$\int_{H_\infty} \vec{F} d\vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ z + 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $H_\infty$  die unendlich lange Schraube bezeichnet, d.h.  $t$  geht von  $-\infty$  bis  $\infty$ .  
 Lassen Sie dazu erst  $t$  von  $a$  nach  $b$  gehen und nehmen Sie dann den Grenzwert für  $a \rightarrow -\infty$  und  $b \rightarrow \infty$ .