

Übungsblatt 8 - Lösung

Aufgabe 1

a)

$$\int (x^4 - 4x^3 + x - 1) dx = \frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x + C = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

b)

$$\int \left(\frac{2}{x} - \frac{t}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{2}{x} - tx^{-2} \right) dx = 2 \ln |x| - t \frac{x^{-1}}{-1} + C = 2 \ln |x| + \frac{t}{x} + C$$

c)

$$\int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{5}} \right) dx = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} - \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} - \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + C$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) (1 Punkt)

$$\int f(x) dx = \int (2x^6 - 2x^2 + 3x + 2) dx = \frac{2}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

b) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{2}{x} \right) dx = \int \left(4x^{-3} + 2\frac{1}{x} \right) dx = 4\frac{x^{-2}}{-2} + 2 \ln |x| + C \\ &= -\frac{2}{x^2} + 2 \ln |x| + C \end{aligned}$$

c) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \sqrt[4]{x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} - x^{\frac{1}{4}} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{4}} \right) dx \\ &= \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} - \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + C \end{aligned}$$

d) (1 Punkt)

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{\tan(x)} = \int \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \ln |\sin(x)| + C$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) 1) (1 Punkt) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x_0 = 4, y_0 = 2$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$$

$$F(4) = \frac{4}{3} + C = 2 \Rightarrow C = \frac{2}{3} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}$$

2) (1 Punkt) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ $x_0 = \sqrt{e}, y_0 = \frac{e}{2}$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (x - \frac{1}{x})dx = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C$$

$$F(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} + C = \frac{e}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + \frac{1}{2}$$

3) (1 Punkt) $f(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 0$

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (2 \sin(x) \cos(x))dx = \int \sin(2x)dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2}$$

b) 1) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^2 - x + 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + (-2) \right) \\ &= \frac{8}{3} - 2 + 2 + \frac{8}{3} + 2 + 2 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

2) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (e^{2t} + e^{-2t}) dt &= \left[\frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{-2} \right]_{-2}^2 = \frac{1}{2} \left[e^{2t} - e^{-2t} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(e^4 - e^{-4} \right) - \left(e^{-4} - e^4 \right) \right] = \frac{1}{2} \left[e^4 - e^{-4} - e^{-4} + e^4 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2e^4 - 2e^{-4} \right] = e^4 - e^{-4} \approx 54.57 \end{aligned}$$

3) (1 Punkt) Hinweis:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

Damit lässt sich das Integral einfacher berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} (\tan(x) + x) dx &= \left[-\ln |\cos(x)| + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/3} \\ &= \left[-\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi^2}{18} \right] - \left[-\ln(1) + 0 \right] \\ &= \ln(2) + \frac{\pi^2}{18} \approx 1.24 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) (2 Punkte)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \quad f''(x) = 6x - 4$$

Bestimmung der Nullstellen: Durch Probieren findet man $f(1) = 0$. Mittels der Division $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x - 1) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ findet man die weiteren Nullstellen $f(-1) = 0$ und $f(2) = 0$.

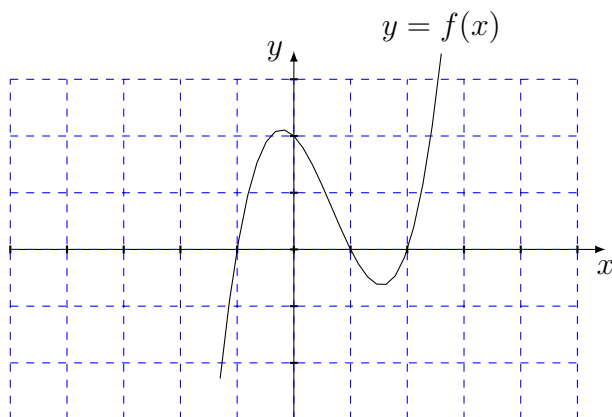
Bestimmung der Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \\ x_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} &\approx 1.54 \quad f''(x_1) = 2\sqrt{7} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum: } f(x_1) = -0.63 \\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} &\approx -0.22 \quad f''(x_2) = -2\sqrt{7} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum: } f(x_2) = 2.11 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

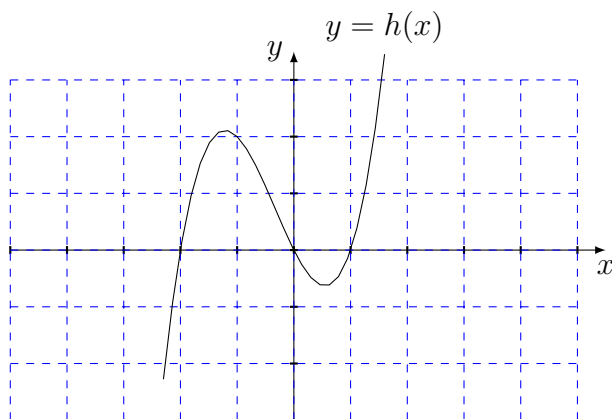
Bestimmung des Wendepunktes:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{2}{3} \quad f'''(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt: } f(x_3) \approx 0.74$$



(1 Punkt)

- b) (1 Punkt) $h(x)$ entsteht, indem man $f(x)$ um 1 Einheit nach links verschiebt. Es gilt: $h(x) = f(x - (-1)) = f(x + 1)$. Die Nullstellen, die Extrema und der Wendepunkt werden sinngemäss verschoben!



(1 Punkt)

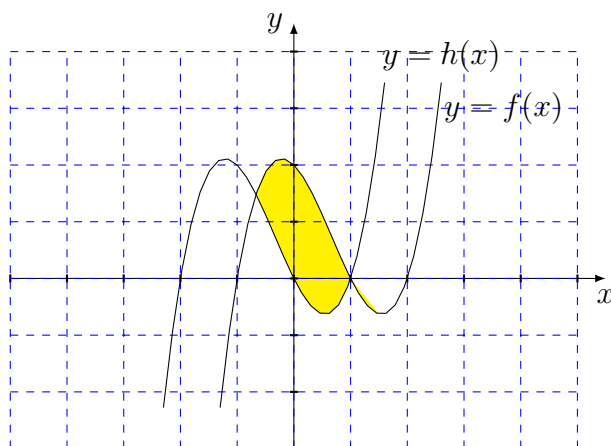
- c) (1 Punkt) Man erhält nach kurzer Rechnung $h(x) = f(x+1) = x^3 + x^2 - 2x$. Man kann aus der Darstellung $h(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1)$ die Nullstellen bei -2 , 0 und 1 sofort bestimmen. Diese ersieht man auch aus

der grafischen Darstellung von $h(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^3 + x^2 - 2x & -x^3 \\
 -2x^2 - x + 2 = x^2 - 2x & +2x^2 \\
 -x + 2 = 3x^2 - 2x & +x \\
 2 = 3x^2 - x & -2 \\
 0 = 3x^2 - x - 2 &
 \end{array}$$

Man erhält zwei Schnittpunkte: $x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = 1$.
Die Punkte liegen bei $S_1(-\frac{2}{3}/\frac{40}{27})$ und $S_2(1/0)$,

d) (2 Punkte)



(1 Punkt)

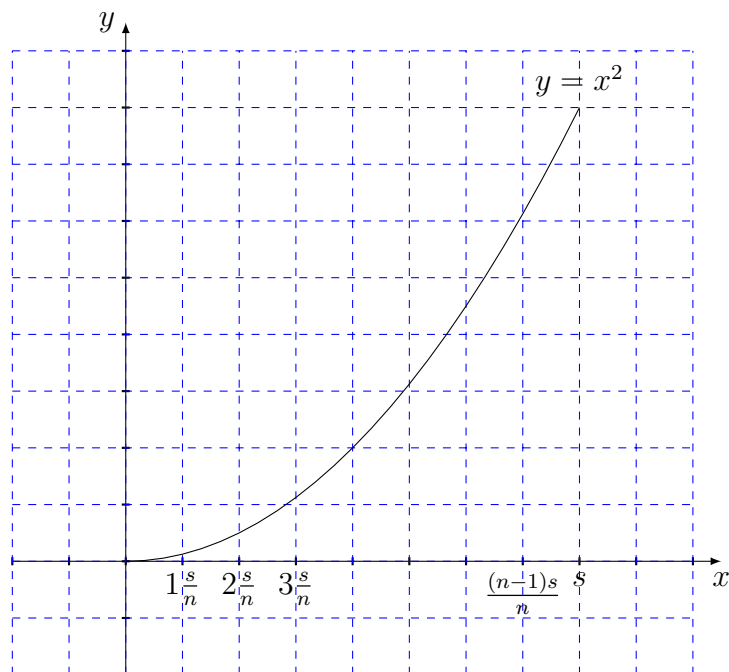
Nun kann man die gelb schraffierte Fläche berechnen:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{2}{3}}^1 [f(x) - h(x)] dx = \int_{-\frac{2}{3}}^1 [(x^3 - 2x^2 - x + 2) - (x^3 + x^2 - 2x)] dx \\
 &= \int_{-\frac{2}{3}}^1 [x^3 - 2x^2 - x + 2 - x^3 - x^2 + 2x] dx = \int_{-\frac{2}{3}}^1 [-3x^2 + x + 2] dx \\
 &= \left[-x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-\frac{2}{3}}^1 = \left[-1 + \frac{1}{2} + 2 \right] - \left[-\left(-\frac{8}{27}\right) + \frac{4}{18} - \frac{4}{3} \right] \\
 &= \left[\frac{3}{2} \right] - \left[\frac{8}{27} + \frac{4}{18} - \frac{4}{3} \right] = \frac{3}{2} - \frac{8}{27} - \frac{4}{18} + \frac{4}{3} \\
 &= \frac{81}{54} - \frac{16}{54} - \frac{12}{54} + \frac{72}{54} = \frac{125}{54}
 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

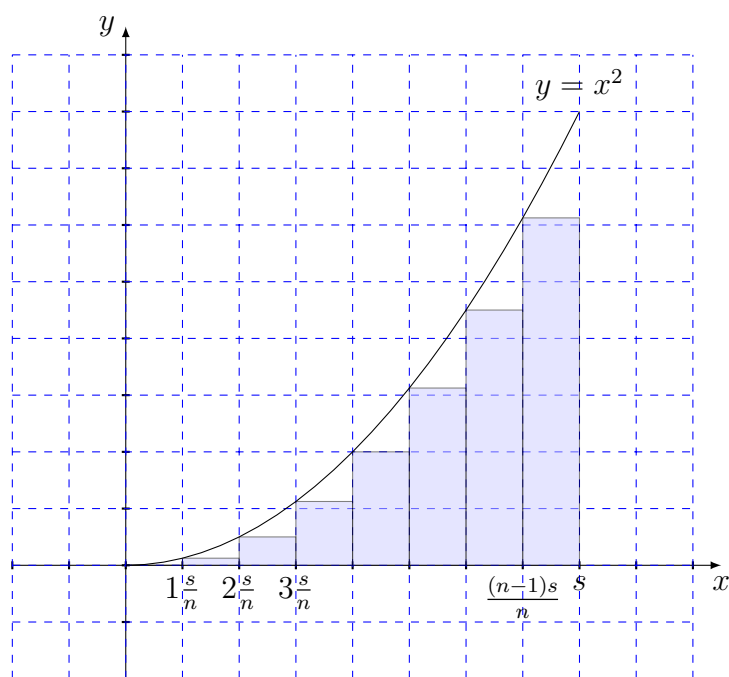
- a) (1 Punkt) Jedes Intervall in x-Richtung habe die Länge $\frac{s}{n}$. Das erste Intervall endet bei $x = 1 \cdot \frac{s}{n}$, das zweite bei $x = 2 \cdot \frac{s}{n}$, das dritte bei $x = 3 \cdot \frac{s}{n}$. Das zweitletzte Intervall endet bei $x = (n-1) \cdot \frac{s}{n}$, das letzte bei $x = n \cdot \frac{s}{n} = s$.



In den nachfolgenden Darstellungen werden die Flächen unterhalb und oberhalb der Funktion zwecks Vereinfachung geschlossen gezeichnet. In Tat und Wahrheit sind es immer n-Rechtecke !

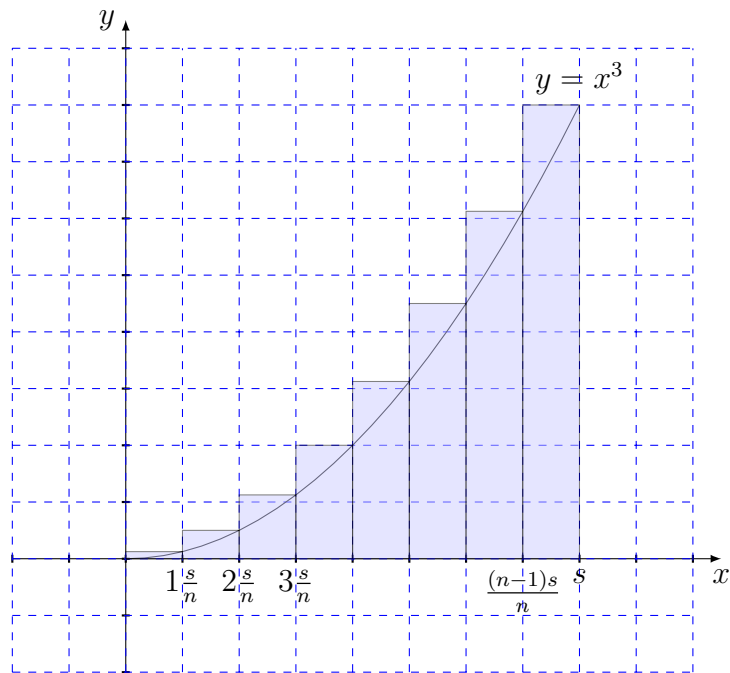
- b) (1 Punkt) Siehe nachfolgende Skizze mit den angegebenen Rechteckflächen unterhalb der Funktion $y = x^2$.

$$\begin{aligned}
 U_n &= f\left(0 \cdot \frac{s}{n}\right) \cdot \frac{s}{n} + f\left(1 \cdot \frac{s}{n}\right) \cdot \frac{s}{n} + f\left(2 \cdot \frac{s}{n}\right) \cdot \frac{s}{n} + \cdots + f\left((n-1) \cdot \frac{s}{n}\right) \cdot \frac{s}{n} = \frac{s}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(i \cdot \frac{s}{n}\right) \\
 &= \frac{s}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \cdot \frac{s}{n}\right)^2 = \frac{s}{n} \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \left(\frac{s}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \left(\frac{s}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
 &= \left(\frac{s}{n}\right)^3 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)s^3}{6n^2}
 \end{aligned}$$



- c) (1 Punkt) Siehe nachfolgende Skizze mit den angegebenen Rechteckflächen oberhalb der Funktion $y = x^2$.

$$\begin{aligned}
 O_n &= f\left(1 \cdot \frac{s}{n}\right) \cdot \frac{s}{n} + f\left(2 \cdot \frac{s}{n}\right) \cdot \frac{s}{n} + f\left(3 \cdot \frac{s}{n}\right) \cdot \frac{s}{n} + \cdots + f(s) \cdot \frac{s}{n} = \frac{s}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(i \cdot \frac{s}{n}\right) \\
 &= \frac{s}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{s}{n}\right)^2 = \frac{s}{n} \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 = \left(\frac{s}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= \left(\frac{s}{n}\right)^3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)s^3}{6n^2}
 \end{aligned}$$



d) (1 Punkt) Damit können wir nun zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)s^3}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})s^3}{6} = \frac{2s^3}{6} = \frac{s^3}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)s^3}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})s^3}{6} = \frac{2s^3}{6} = \frac{s^3}{3}$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n \text{ ist und dass } \int_0^s x^2 dx = \frac{s^3}{3} \text{ ist.}$$