Übungsblatt 7 - Lösung

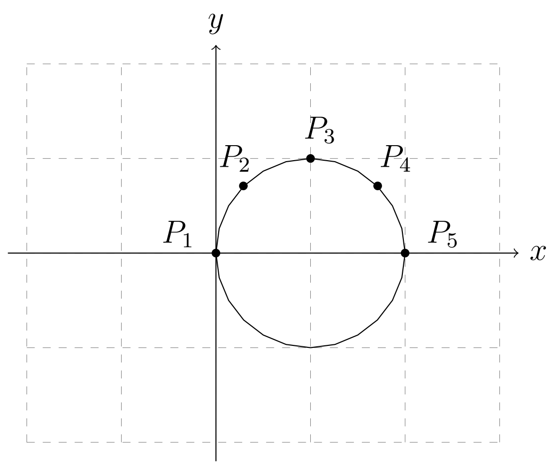
Aufgabe 1

a) $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$. Diese Funktion entspricht dem Geschwindigkeitsvektor von $\vec{x}(t)$ oder dem Tangentialvektor an $\vec{x}(t)$.

b) Einsetzen der Zahlenwerte für t.

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 0: & \vec{x}(t_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \dot{\vec{x}}(t_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
t_2 &= \frac{\pi}{4}: & \vec{x}(t_2) &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} & \dot{\vec{x}}(t_2) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
t_3 &= \frac{\pi}{2}: & \vec{x}(t_3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \dot{\vec{x}}(t_3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
t_4 &= \frac{3\pi}{4}: & \vec{x}(t_4) &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} & \dot{\vec{x}}(t_4) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
t_5 &= \pi: & \vec{x}(t_5) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \dot{\vec{x}}(t_5) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) Die Funktion $\vec{x}(t)$ kann gezeichnet werden durch Zerlegung in $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder unter Zuhilfenahme der in b) berechneten Punkte. Siehe Skizze, P_i sind die zu t_i gehörigen Punkte.



Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) (1 Punkt)

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 2 \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \qquad v(t) = \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{9t^4 + 30t^2 + 5}$$

b) (1 Punkt)

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6t \end{pmatrix} \qquad a(t) = \left|\ddot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{36t^2 + 36} = 6\sqrt{t^2 + 1}$$

c) (2 Punkte) Man sucht das Minimum der Funktion $v(t)$. $v(t)$ ist definiert für $t \geq 0$. $v(t)$ wird dann minimal, wenn die Funktion unter der Wurzel minimal wird. Somit:

$$f(t) = 9t^4 + 30t^2 + 5 \qquad \dot{f}(t) = 36t^3 + 60t \qquad \ddot{f}(t) = 108t^2 + 60$$

$$\dot{f}(t) = 0 \quad \Rightarrow 6t(6t^2 + 10) = 0 \quad \Rightarrow t = 0 \text{ , für } 6t^2 + 10 = 0 \text{ keine Lösung}$$

$$\text{somit:} \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \ddot{f}(0) = 60 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

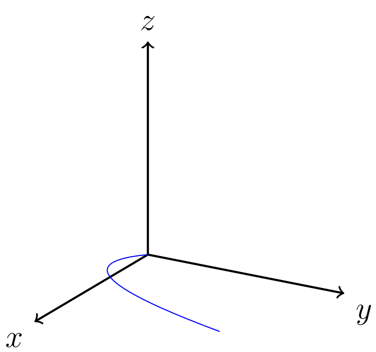
$$v(0) = \sqrt{5}$$

$t = 0$ ist gleichzeitig auch ein Randpunkt! $f(t)$ ist überall differenzierbar und für $t \to \infty$ geht auch $f(t) \to \infty$.
Somit haben wir bei $t = 0$ ein absolutes Minimum. (1 Punkt)

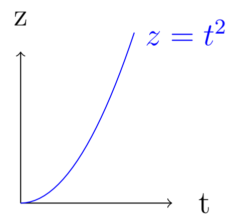
Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Wir verwenden die Bezeichnung $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = y(t)$ und $x_3(t) = z(t)$

- (1 Punkt) Mit $x(t) = t$ und $y(t) = t(t-1) = t^2 - t$ erhält man durch Elimination des Paramters t die Funktion $y = x(x-1) = x^2 - x$. Das ist eine Parabel. Siehe Bild rechts.



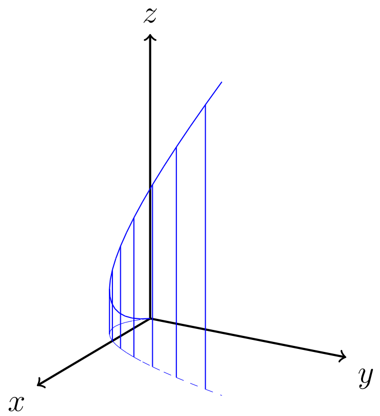
- (1 Punkt) $z(t) = t^2$ ist eine Parabel. Der Wert nimmt quadratisch zu.



- (2 Punkte) Durch Einsetzen erhält man:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)



(1 Punkt)

b) (1 Punkt)

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-1 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = \sqrt{1 + (2t-1)^2 + (2t)^2} = \sqrt{8t^2 - 4t + 2}$$

$$\dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\dot{\vec{x}}(0)\right| = \sqrt{2}$$

$$\dot{\vec{x}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left|\dot{\vec{x}}(1)\right| = \sqrt{6}$$

$$\dot{\vec{x}}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \left|\dot{\vec{x}}(2)\right| = \sqrt{26}$$

c) (1 Punkt) Mit $\left|\dot{\vec{x}}(t)\right| = f(t) = \sqrt{8t^2 - 4t + 2}$ folgt auch hier wie in Teilaufgabe 1b): Wenn $g(t) = 8t^2 - 4t + 2$ ein Extremum hat, dann hat auch $f(t)$ ein

Extremum. Für die erste und zweite Ableitungen gilt:

$$\dot{g}(t) = 16t - 4 \qquad \ddot{g}(t) = 16$$

Aus $\dot{g}(t) = 0$ erhält man $t = \frac{1}{4}$. Da $\ddot{g}(t) > 0$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ liegt bei $t = \frac{1}{4}$ ein Minimum vor. Wir erhalten $\left|\dot{\vec{x}}(\frac{1}{4})\right| = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
Wir müssen die Randpunkte betrachten.
Randpunkt für $t = 0$: $\left|\dot{\vec{x}}(0)\right| = \sqrt{2}$. Randpunkt für $t = 2$: $\left|\dot{\vec{x}}(2)\right| = \sqrt{26}$.

Zusammengefasst kann nun gesagt werden, dass für $t = \frac{1}{4}$ die Schnelligkeit am Kleinsten ist und für $t = 2$ die Schnelligkeit am Grössten ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

a) (1 Punkt)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 - 2t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2t - 2 \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$\text{Tangente T:} \quad \vec{x}(t) = \vec{x}(2) + t \cdot \dot{\vec{x}}(2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) (1 Punkt) Die Bedingung $\dot{\vec{x}}(t_1) \cdot \dot{\vec{x}}(t_2) = 0$ muss erfüllt werden, wobei t_1 und t_2 im Intervall $[1, 3]$ liegen müssen.

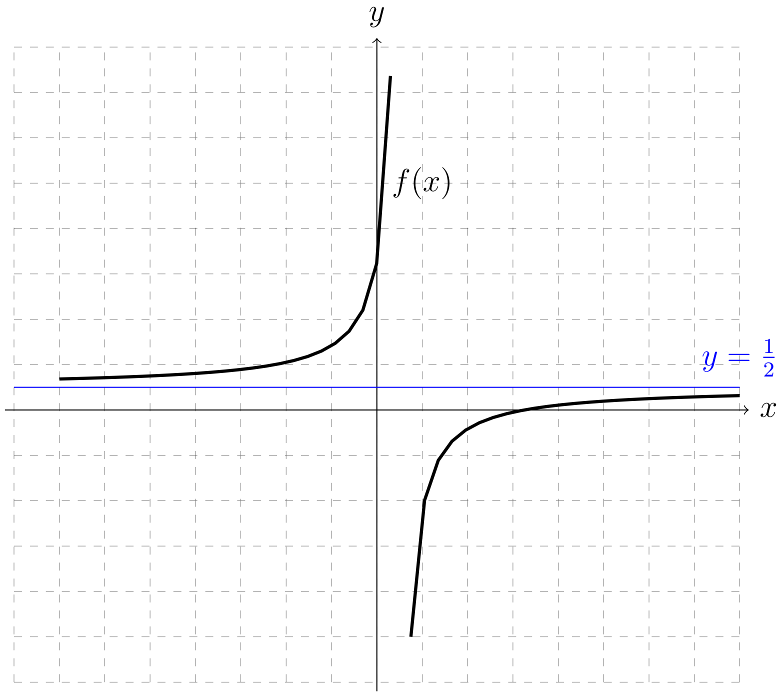
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2t_1 - 2 \\ -2t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t_2 - 2 \\ -2t_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8t_1t_2 - 4t_1 - 4t_2 + 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{4t_1 - 13}{8t_1 - 4}$$

Wir müssen nun t_2 als Funktion von t_1 betrachten und schauen, in welchen Bereichen t_2 liegt, wenn t_1 im Intervall $[1, 3]$ ist.

Wir betrachten $y = \frac{4x-13}{8x-4}$, wobei $1 \leq x \leq 3$ ist. Wir finden schnell heraus, dass

- y hat bei $x = \frac{13}{4}$ eine Nullstelle
- y hat bei $x = \frac{1}{2}$ einen Pol
- y hat für $x \to \pm\infty$ die Asymptote $y = \frac{1}{2}$

Da y sich vom Pol von $-\infty$ gegen die Nullstelle $x = \frac{13}{4}$ bewegt, sind die Werte von y immer ≤ 0. Somit liegt y nicht im gewünschten Intervall $[1, 3]$. Siehe auch grafische Darstellung.



$\Rightarrow$ Wir finden keine Lösung, da für $1 < t_1 \leq 3$ t_2 nicht im Intervall $[1, 3]$ ist.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

a) (1 Punkt) Bestimmung von $\dot{\vec{r}}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^3 - t \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ 9t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

b) (1 Punkt) <u>y-Achsenschnittpunkt</u>: x = 0

$$3t^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \quad \vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $P(0/0)$ wird zwei Male durchlaufen. Dieser muss speziell betrachtet werden.

<u>x-Achsenschnittpunkt</u>: y = 0

$$3t^3 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (bereits berechnet)} \quad t_3 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{r}(t_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) (1 Punkt) Die Tangente wird dann vertikal, wenn $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ ist.

$$6t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_3 = 0 \text{ , siehe oben} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{r}}(t_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) (1 Punkt) Die Tangente wird dann horizontal, wenn $\dot{y}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) \neq 0$ ist.

$$\begin{aligned} 9t^2 - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad t_{4,5} = \pm\frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \quad \vec{r}(t_4) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{r}}(t_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \vec{r}(t_5) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{r}}(t_5) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) (1 Punkt) Der Punkt $P(0/0)$ wird mit $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ duchlaufen.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t_1) &= \begin{pmatrix} 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 9 \cdot \frac{1}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}(t_2) &= \begin{pmatrix} -6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 9 \cdot \frac{1}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f) (1 Punkt)

$$\vec{r}(-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

g) (1 Punkt)

Wir beginnen mit $\vec{r}(-1)$. Der Richtungsvektor ist $\dot{\vec{r}}(-1) = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$. Von diesem Punkte aus bewegt man sich in Richtung des Ursprungs.

Anschliessend kommt man zum Ursprung, berechneter Punkt $\vec{r}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$, mit Richtung $\dot{\vec{r}}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann bewegt man sich weiter in Richtung Punkt mit horizontaler Tangente $\vec{r}(-\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektor $\dot{\vec{r}}(-\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Anschliessend geht es weiter zum Punkt mit vertikaler Tangente $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektor $\dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entsprechend geht es weiter zum Punkt $\vec{r}(\frac{1}{3})$, zum Punkt $\vec{r}(\frac{1}{\sqrt{3}})$ und endet im Punkt $\vec{r}(1)$.
Die Kurve kann dann wie folgt skizziert werden: