Formelsammlung MAT 182 Analysis

Pascal Christinat

Fehler oder Unvollständigkeit nicht einklagbar bei Prüfung.

1 Grundlagen

1. Mitternachtsformel
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.1 Potenzgesetze

1. $a^{n+m} = a^n \cdot a^m \qquad a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$
2. $(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
3. $a^0 = 1 \qquad 1^n = 1$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

1.2 Logarithmusgesetze

1. $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \qquad \log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y \qquad \log(x^n) = n \cdot \log x$
2. Definition $\qquad y = b^x \Leftrightarrow \log_b(y) = x$
3. $b^{\log_b(x)} = x = \log_b(b^x) \qquad e^{\ln x} = x = \ln e^x$
4. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (Basiswechselsatz)
5. $\log_b(1) = 0 \qquad \ln(e) = 1$

1.3 Trigonometrie

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
2. $\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$
3. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ (Additionstheoreme)
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$

2 Vektorgeometrie in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

1. Betrag

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. Skalarprodukt

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\varphi$$

mit Winkel

$$\varphi := \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}\right)$$

3. Vektorprodukt

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

4. Flächeninhalt Dreieck

$$\triangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{2} = \frac{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin(\varphi)}{2}$$

5. Abstand von zwei Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$

$$dist(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

6. Abstand von Punkt $P(x_0|y_0)$ und Gerade $g : ax + by + c = 0$

$$dist(P, g) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7. Abstand von Punkt $P(x_0|y_0|z_0)$ und Ebene $E : ax + by + cz + d = 0$

$$dist(P, E) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. Schnittwinkel zwischen Ebene E_1 (Normalenvektor $\vec{n}_1$) und Ebene E_2 (Normalenvektor $\vec{n}_2$)

$$\varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$

9. Neigungswinkel zwischen Gerade g (Richtungsvektor $\vec{v}$) und Ebene E (Normalenvektor $\vec{n}$)

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

3 Differentialrechnung

1. Differentialquotient
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Linearisierung
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3.1 Ableitungsregeln

1. Produktregel
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

2. Quotientenregel
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

3. Kettenregel
$$[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

4. Umkehrfunktion
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

3.2 Kurvendiskussion

1. $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist $\begin{cases} \text{Minimum} & \text{falls } f''(x_0) > 0 \\ \text{Maximum} & \text{falls } f''(x_0) < 0 \\ \text{Terrassenpunkt} & \text{falls } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$

2. $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist Wendepunkt

3. f ist (streng) monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & \text{falls } f'(x) > 0 \\ \text{fallend} & \text{falls } f'(x) < 0 \end{cases}$

3.3 Mehrdimensionale Analysis

$f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$ und $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) > 0$

$$\Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist } \begin{cases} \text{Minimum} & \text{falls } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ \text{Maximum} & \text{falls } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{cases}$$

3.4 Trigonometrie

$$\begin{tikzcd}
\sin \arrow[r, "d/dx"] & \cos \arrow[d, "d/dx"] \\
-\cos \arrow[u, "d/dx"] & -\sin \arrow[l, "d/dx"]
\end{tikzcd}$$

4 Integralrechnung

1. Partielle Integration
$$\int u' \cdot v \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \, \mathrm{d}x$$
2. Logarithmische Integration
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, \mathrm{d}x = \ln |g(x)| + C$$
Insbesondere:
$$\int \frac{y'}{y} \, \mathrm{d}x = \ln |y(x)| + C \qquad \text{(DGL)}$$
3. Rotationsvolumen
$$V(f) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x$$
4. Länge der Kurve
$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, \mathrm{d}x$$
5. Kurvenintegrale mit Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ und Vektorfeld $\vec{F}$
$$\int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \, \mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$$
6. Linearität
$$\int a \cdot f(x) + b \cdot g(x) \, \mathrm{d}x = a \cdot \int f(x) \, \mathrm{d}x + b \cdot \int g(x) \, \mathrm{d}x$$

4.1 Trigonometrie

1.
$$\int \sin^2(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C = 2\sin(x)\cos(x) + C$$
$$\int \cos^2(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C = -2\sin(x)\cos(x) + C$$

2.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin(x) + C \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arccos(x) + C \qquad \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

3.
$$\begin{tikzcd} \sin \arrow[d, "\int"'] & \cos \arrow[l, "\int"'] \\ -\cos \arrow[r, "\int"'] & -\sin \arrow[u, "\int"'] \end{tikzcd}$$

5 Wie löse ich eine lineare DGL?

Lineare Differentialgleichungen sind von der Form

$$y' = y \cdot p(x) + q(x)$$

ACHTUNG! Falls die DGL **NICHT** linear ist, also

$$y' = s(y) \cdot p(x) + q(x) \text{ für ein } s(y) \neq y$$

Dann gelten die folgenden Formeln nicht!

5.1 Homogen $q(x) = 0$ Separation der Variablen

Gegeben sei folgende homogene lineare DGL.

$$y' = p(x) \cdot y$$

Wir dividieren durch y:

$$\frac{y'}{y} = p(x) \qquad (y \not\equiv 0)$$

und integrieren:

$$\underbrace{\int \frac{y'}{y} \, \mathrm{d}x}_{= \ln(y)} = \underbrace{\int p(x) \, \mathrm{d}x}_{=: P(x)+c}$$

Exponentieren liefert die allgemeine Lösung:

$$y(x) = Ke^{P(x)}$$

Jetzt kann ein allfälliger Anfangswert eingesetzt werden, um die Konstante $K \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.

5.2 Inhomogen $q(x) \neq 0$ Variation der Konstanten

Gegeben sei folgende inhomogene lineare DGL.

$$y' = p(x) \cdot y + q(x) \qquad (q(x) \neq 0) \tag{1}$$

Wir lösen zu erst (wie in 5.1) den homogenen Fall durch Separation der Variablen:

$$y' = p(x) \cdot y \Rightarrow y(x) = Ke^{P(x)}$$

Variation der Konstanten: Wir betrachten K als Funktion von x und leiten ab (Produktregel!)

$$y'(x) = K'(x) \cdot e^{P(x)} + \underbrace{Ke^{P(x)} \cdot p(x)}_{= y \cdot p(x)}$$

Wir vergleichen mit (1):

$$\begin{aligned} K'(x) \cdot e^{P(x)} + \cancel{p(x) \cdot y} &= \cancel{p(x) \cdot y} + q(x) \\ \Rightarrow K'(x) &= q(x) \cdot e^{-P(x)} \\ \Rightarrow K(x) &= \int q(x) \cdot e^{-P(x)} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

und erhalten

$$y(x) = \left(\int q(x) \cdot e^{-P(x)} \, \mathrm{d}x \right) \cdot e^{P(x)}$$

Beachte, dass das Integral $\int q(x) e^{-P(x)} \, \mathrm{d}x$ eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ liefert, die mit dem allfälligen Anfangswert berechnet werden muss.