Übungsblatt 8

Integralrechnung, Storrer 9 - 12

Abgabe: Mittwoch, **15.11.2017**, vor der Vorlesung.

MUST

Aufgabe 1

a)

$$\int (x^4 - 4x^3 + x - 1)dx$$

b)

$$\int \left(\frac{2}{x} - \frac{t}{x^2}\right)dx$$

c)

$$\int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$$

STANDARD

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

a) (1 Punkt)

$$f(x) = 2x^6 - 2x^2 + 3x + 2$$

b) (1 Punkt)

$$f(x) = \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x}$$

c) (1 Punkt)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \sqrt[4]{x}$$

d) (1 Punkt)

$$f(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so dass $F(x_0) = y_0$ ist.

1) (1 Punkt) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad x_0 = 4\ ,\ y_0 = 2$

2) (1 Punkt) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ $\quad x_0 = \sqrt{e}\ ,\ y_0 = \frac{e}{2}$

3) (1 Punkt) $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{2}\ ,\ y_0 = 0$

b) Ermitteln Sie die folgenden Werte der bestimmten Integrale.

1) (1 Punkt) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(x^2 - x + 1\right) dx$

2) (1 Punkt) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(e^{2t} + e^{-2t}\right) dt$

3) (1 Punkt) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} (\tan(x) + x)\, dx$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Die Funktion $f(x)$ wird um -1 in Richtung der x-Achse verschoben und es entsteht die Funktion $h(x)$. Berechnen Sie die Fläche zwischen beiden Funktionen. Gehen Sie wie folgt vor:

a) (2 Punkte) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x)$. Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und den Punkt auf der y-Achse.

b) (1 Punkt) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $h(x)$.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $f(x)$ und $h(x)$.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die gesuchte Fläche.

HONOURS

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Wir wollen mit Hilfe der Riemannschen Summen das Integral $\int x^2 dx$ bestimmen.

a) (1 Punkt) Betrachten Sie die Funktion $y = x^2$ im Intervall [0, s] und unterteilen Sie es in n-gleiche Intervalle. Jedes Intervall hat die Länge $\frac{s}{n}$. Stellen Sie dies qualitativ in einer Skizze dar.

b) (1 Punkt) Bilden Sie nun die Summe U_n aller Rechtecke der Funktion $y = x^2$. Beginnen Sie mit den Rechtecken unterhalb der Kurve.

c) (1 Punkt) Bilden Sie nun die Summe O_n aller Rechtecke der Funktion $y = x^2$. Beginnen Sie mit den Rechtecken oberhalb der Kurve.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie nun, dass

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} O_n = \frac{s^3}{3}$$

gilt.

Hinweis: Sie werden folgende Formel brauchen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$